Algebra II
„Kommutative Algebra“

gehalten von Prof. Dr. U. Görtz
an der Universität Duisburg-Essen im Sommersemester 2012

Stand: 2. Juli 2013

Mitgeschrieben von Andrea Heßler, überarbeitet und gesetzt in LaTeX von Johannes Hölken

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

In dieser Vorlesung wollen wir uns dem Studium kommuttiver Ringe und ihrer Moduln widmen. Wichtige Klassen von Ringen sind die folgenden Typen:

1. Sei k ein (algebraisch abgeschlossener) Körper, dann betrachten wir endlich erzeugte k-Algebren, das heißt Ringe vom Typ

$$R \;:=\; k[X_1, \dots, X_n] \big/ I$$

wobei $I \lhd k[X_1, \dots, X_n]$ ein Ideal sei, etwa $I = (f_1, \dots, f_m)$.
Ist k algebraisch abgeschlossen, so gibt es eine Bijektion

$$\begin{aligned} \{\, \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(R) \,\} \;\xrightarrow{\;\sim\;}\; & \big\{ (\underline{x}) \in k^n \;\big|\; f_i(\underline{x}) = 0 \;\text{ für alle } i = 1, \dots, m \,\big\} \\ = \;& \big\{ (\underline{x}) \in k^n \;\big|\; f(\underline{x}) = 0 \;\text{ für alle } f \in I \,\big\} \end{aligned}$$

Diese Menge nennen wir die „simultane Nullstellenmenge der f_i".
Die Bijektion funktioniert wie folgt: Sei $\mathfrak{m} \lhd R$ von der Form

$$\mathfrak{m} \;=\; \big(X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n\big) \qquad \text{für } (x_1, \dots, x_n) \in k^n \text{ mit } f(x_1, \dots, x_n) = 0 \text{ für alle } f \in I$$

Dann ist $\mathfrak{m}$ ein maximales Ideal von R, denn

$$\begin{tikzcd} k[X_1, \dots, X_n] \arrow[rr, two heads, "X_i \mapsto x_i"] \arrow[dr, two heads, "\pi"'] & & k \\ & R \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

und es ist $\operatorname{Ker}(\psi) = \big(\overline{X_1 - x_1}, \dots, \overline{X_n - x_n}\big) \subset R$ womit sofort

$$R \big/ (X_1 - x_1, \dots, X_n - x_n) \;\cong\; k$$

folgt. Diese Betrachtung führt in die Algebraische Geometrie.

2. Sei $K / \mathbb{Q}$ eine algebraische Körpererweiterung, dann setze

$$\begin{aligned} R \;:=\;& \big\{\, x \in K \;\big|\; \operatorname{mipo}_{x,\mathbb{Q}} \in \mathbb{Z}[X] \,\big\} \\ =\;& \big\{\, x \in K \;\big|\; \text{es gibt ein normiertes } f \in \mathbb{Z}[X] \text{ mit } f(x) = 0 \,\big\} \end{aligned}$$

Ist $x \in \mathbb{Q}$, dann ist $\operatorname{mipo}_{x,\mathbb{Q}}(X) = X - x$.
Ein konkretes **Beispiel**: Sei $K = \mathbb{Q}(i)$ mit $i^2 = -1$, dann ist

$$R \;=\; \mathbb{Z}[i] \;=\; \varphi(\mathbb{Z}[X]) \quad \text{mit} \quad \varphi : \mathbb{Z}[X] \ni X \;\mapsto\; i \in \mathbb{Q}(i)$$

Um diese Behauptung zu zeigen überprüfe, dass $a + ib \in \mathbb{Q}(i)$ mit $a, b \in \mathbb{Q}$ genau dann ein Minimalpolynom in $\mathbb{Z}[X]$ hat, wenn $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt.
Hier heißt R der „Ring der ganzen Zahlen von K" beziehungsweise der „Ganzheitsring von K". Diese Betrachtung führt in die algebraische Zahlentheorie.

Die moderne kommutative Algebra / arithmetische Geometrie eröffnet eine geometrische Sichtweise auf zahlentheoretische Fragen. Hierzu werden wir für kommutative Ringe R die Menge $\operatorname{Spec}(R)$ aller Primideale von R zu einem geometrischen Objekt machen.

Kapitel I

Ringe und Moduln

1 Ringe und Ideale

Als erstes stellen wir die notwendigen Begriffe und Notationen Bereit. Hierbei werden wir in vielen Fällen Vorkenntnisse aus der Vorlesung Algebra I des vergangenen Wintersemesters voraussetzen.

Definition 1.1 *((kommutativer) Ring)*
Eine Menge R zusammen mit Abbildungen

$$+ : R \times R \to R \quad \text{und} \quad \cdot : R \times R \to R$$

heißt (kommutativer) Ring, wenn

- $(R, +)$ *eine abelsche Gruppe und*
- $(R, \cdot)$ *ein (kommutativer) Monoid*

ist und die Distributivgesetze gelten.

Im Folgenden sind alle Ringe kommutativ, auf eventuelle Ausnahmen wird explizit hingewiesen.

Definition und Bemerkung 1.2 *(Nullring)*
Sei R ein Ring. Genau dann gilt $1 = 0$ in R, wenn $R = \{0\}$ der Nullring ist.

Definition 1.3 *(Einheit, Einheitengruppe, Nullteiler, Integritätsbereich, Körper)*
Sei R ein Ring.

- *$x \in R$ heißt Einheit, falls es ein $y \in R$ mit $xy = 1$ gibt.*
  Die Menge aller Einheiten von R bezeichnen wir mit $R^\times$. Die Menge der Einheiten bildet mit der von R induzierten Multiplikation eine multiplikative Gruppe (die Einehitengruppe).
- *R heißt Körper, wenn $R^\times = R \setminus \{0\}$ ist, also wenn es zu jedem Element ein multiplikatives Inverses gibt.*
- *$x \in R$ heißt Nullteiler, falls es ein $y \in R \setminus \{0\}$ mit $xy = 0$ gibt.*
- *R heißt Integritätsbereich (Integritätsring, Nullteiler frei), wenn es ausser 0 keine weiteren Nullteiler gibt.*

Beispiel 1 *Der Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen ist ein Integritätsbereich, aber der Restklassenring $\mathbb{Z}/_{(6)}$ ist es nicht, denn $2 \cdot 3 = 6 \equiv 0 \bmod (6)$.*

Definition 1.4 *(Ringhomomorphismus)*
Seien R und S Ringe. Eine Abbildung $\varphi : R \to S$ heißt Ringhomomorphismus, falls $x, y \in R$ gelten

(1) $\varphi(1_R) \ = \ 1_S$

(2) $\varphi(x + y) \ = \ \varphi(x) + \varphi(y)$

(3) $\varphi(x \cdot y) \ = \ \varphi(x) \cdot \varphi(y)$

Definition 1.5 *(Unterring)*
Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt Unterring von R, falls $0_R, 1_r \in S$ und S bezüglich der Operationen $+, \ -, \ \cdot$ abgeschlossen ist.

Definition 1.6 *(Ideal)*
Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $\mathfrak{a} \subseteq R$ heißt Ideal von R, wenn gelten

- $\mathfrak{a} + \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$
- $1 - a \in \mathfrak{a}$ *für alle $a \in \mathfrak{a}$*
- $0_R \in \mathfrak{a}$
- $R\,\mathfrak{a} \ \subseteq \ \mathfrak{a}$

Wir schreiben dann $\mathfrak{a} \lhd R$.

Definition 1.7 *(Hauptidealring)*
Ein Ring R heißt Hauotidealring (HIR), falls R ein Integritätsring ist und es für alle Ideale $\mathfrak{a} \lhd R$ ein $a \in R$ so gibt, dass

$$\mathfrak{a} \ = \ (a) \ := \ aR \ := \ \left\{ a \cdot r \,|\, r \in R \right\}$$

gilt.

Beispiel 2 *Sei R ein Ring, dann ist*

- $\{0\} \ = \ (0) \ \lhd R$ *das Nullideal*
- $R \ = \ (1) \ \lhd R$ *das Einsideal*

Sei $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal. Gibt es ein $x \in \mathfrak{a}$, das eine Einheit ist (also $x \in R^\times$), dann ist $\mathfrak{a} = R$, denn nach Voraussetzung gibt es ein $y \in R$ mit $xy = 1$. Da R kommutativ ist, gilt $y \cdot x = 1 \in R$. Damit gilt aber für alle $r \in R$ bereits $r = r \cdot y \cdot x \in \mathfrak{a}$.

Ist R ein Körper, dann sind die trivialen Ideale ($(0), (1)$) die einzigen Ideale von R.

Sei $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}$ ein Ideal von $\mathbb{Z}$, dann gibt es eine ganze Zahl d, so dass

$$\mathfrak{a} \ = \ (d) \ := \ d\mathbb{Z} \ := \ \left\{ d \cdot z \,\middle|\, z \in \mathbb{Z} \right\}$$

Definition und Lemma 1.8 *(Kern, Bild)*
Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus[1]*, dann gelten*

1. *Der Kern* $\operatorname{Ker}(\varphi) \ := \ \varphi^{-1}(\{0\})$ *von φ ist ein Ideal in R.*
2. *Das Bild* $\operatorname{Im}(\varphi) \ := \ \varphi(R)$ *von φ ist ein Unterring von S.*

Beispiel 3 *Betrachte den Ringhomomorphismus der natürlichen Inklusion $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Es ist*

- $\operatorname{Ker}(\varphi) = \{0\}$ *und* $1 \notin \{0\}$ *also ist* $\operatorname{Ker}(\varphi)$ *kein Unterring von $\mathbb{Z}$.*
- $\operatorname{Im}(\varphi) = \mathbb{Z}$ *aber da $\mathbb{Q}$ ein Körper ist, gibt es in $\mathbb{Q}$ nur die trivialen Ideale. Daher ist* $\operatorname{Im}(\varphi)$ *kein Ideal in $\mathbb{Q}$.*

Definition und Bemerkung 1.9 *(Konstruktion von Idealen)*
Sei R ein Ring und I eine Indexmenge.

1. *Seien für alle $i \in I$ Ideale $\mathfrak{a}_i \lhd R$ gegeben, dann ist der Durchschnitt*
$$\bigcap_{i\in I} \mathfrak{a}_i \ \lhd R$$
ebenfalls ein Ideal von R.

2. *Sei $M \subseteq R$ eine Teilmenge, dann setze*
$$(M) \ := \ \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \lhd R \\ M \subseteq \mathfrak{a}}} \mathfrak{a} \ \lhd R$$
(M) ist das kleinste Ideal von R, das M enthält und heißt das von M erzeugte Ideal. Es gilt
$$(M) \ = \ \left\{ \sum_{n=1}^{N} r_n \cdot m_n \,\middle|\, N \in \mathbb{N}_0 \text{ und } r_n \in R,\ m_n \in M \text{ für alle } n \in \{1, \ldots, N\} \right\}$$
Ist $M = \{m_i | i \in I\}$ so schreibe $(m_i)_{i\in I} = (M)$. Im Spezialfall $(m_1, \ldots, m_N)$ für $N \in \mathbb{N}$ reden wir von einem endlich erzeugten Ideal.

3. *Seien für alle $i \in I$ Ideale $\mathfrak{a}_i \lhd R$ gegeben, dann ist die Summe*
$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \ := \ \Big(\bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i\Big)$$
das von der Vereinigung aller $\mathfrak{a}_i$ in R erzeugte Ideal. Es ist
$$\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \ = \ \left\{ \sum_{i\in I} a_i \,\middle|\, a_i \in \mathfrak{a}_i \text{ für alle } i \in I \text{ und } a_i = 0 \text{ fast immer} \right\}$$

[1]Mit der Voraussetzung $\varphi : R \to S$ möge ein Ringhomomorphismus sein, setzen wir implizit voraus, dass R und S Ringe sind.

4. *Seien* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd R$ *zwei Ideale, dann ist das Produkt*

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \quad := \quad \big(\{\, a \cdot b \,|\, a \in \mathfrak{a} \text{ und } b \in \mathfrak{b} \,\}\big)$$

Es gelten

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \quad = \quad \left\{ \left. \sum_{i=1}^{N} a_i b_i \,\right|\, N \in \mathbb{N} \text{ sowie alle } a_i \in \mathfrak{a} \text{ und alle } b_i \in \mathfrak{b} \right\}$$

sowie stets $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.

Definition 1.10 *(Primideal, Maximalideal)*
Sei R *ein Ring und* $\mathfrak{a} \lhd R$ *ein Ideal mit* $\mathfrak{a} \neq R$*, dann heißt*

- $\mathfrak{a}$ *ein Primideal von* R*, falls für alle* $x, y \in R$ *gilt* $xy \in \mathfrak{a} \;\Rightarrow\; (x \in \mathfrak{a} \wedge y \in \mathfrak{a})$
- $\mathfrak{a}$ *ein Maximalideal von* R*, falls für alle Ideale* $\mathfrak{b} \lhd R$ *mit* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b}$ *entweder* $\mathfrak{b} = \mathfrak{a}$ *oder* $\mathfrak{b} = R$ *gilt.*

Die Menge aller Primideale von R *heißt das (Prim-)Spektrum von* R *und wird mit* $\operatorname{Spec}(R)$ *bezeichnet. Die Menge aller Maximalideale heißt das Maximalspektrum von* R *und wird mit* $\operatorname{Spm}(R)$ *bezeichnet.*

Bemerkung 1.11 *Sei* R *ein Ring. Genau dann ist* $(0) \in \operatorname{Spec}(R)$*, wenn* R *ein Integritätsring ist.*

Beispiel 4 *(Spektren)*

- *Für den Nullring gilt:* $\operatorname{Spec}(\{0\}) \;=\; \operatorname{Spm}(\{0\}) \;=\; \varnothing$
- *Ist* K *ein Körper, so ist* $\operatorname{Spec}(K) \;=\; \operatorname{Spm}(K) \;=\; \{(0)\}$
- *Das Maximalspektrum von* $\mathbb{Z}$ *ist* $\operatorname{Spm}(\mathbb{Z}) \;=\; \{\, (p) \,|\, p > 0 \text{ prim} \,\}$
  Da $\mathbb{Z}$ *nullteilerfrei ist, ist* (0) *ein Primideal, als gilt* $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}) \;=\; \operatorname{Spm}(Z) \cup \{(0)\}$

Bemerkung 1.12 *(Konstruktion von Faktorringen)*
Es sei$R$ *ein Ring und* $\mathfrak{a} \lhd R$ *ein Ideal. Betrachte für* $x, y \in R$ *die Relation*

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathfrak{a}$$

Dies definiert eine Äquivalenzrelation:

reflexiv *Für alle* $x \in R$ *gilt* $x - x \;=\; 0 \;\in\; \mathfrak{a}$*, denn* $0 \in 0 \cdot \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}$

symmetrisch *Seien* $x, y \in R$ *mit* $x \sim y$*, dann ist* $x - y \;=\; 0$ *und es gilt* $y - x \;=\; -(x - y) \in \mathfrak{a}$ *also* $y \sim x$

transitiv *Seien* $x, y, z \in R$ *mit* $x \sim y$ *und* $y \sim z$*, da* $\mathfrak{a}$ *abgeschlossen unter Addition und* $x - y$ *sowie* $y - z$ *in* $\mathfrak{a}$ *sind nach Voraussetzung gilt* $x - z \;=\; x - y \;+\; y - z \in \mathfrak{a}$ *also* $x \sim z$

Wir setzen

$$\left\{ \overline{x} \,\middle|\, x \in R \text{ und } \overline{x} := x + \mathfrak{a} \right\} \;:=\; {}^{R}\!\big/_{\mathfrak{a}} \;:=\; {}^{R}\!\big/_{\sim}$$

diese Menge wird wieder zu einem Ring vermöge der Abbildungen

$$\begin{aligned} +, \circ : {}^{R}\!/_{\mathfrak{a}} \times {}^{R}\!/_{\mathfrak{a}} &\to {}^{R}\!/_{\mathfrak{a}} \\ (\overline{x}, \overline{y}) &\mapsto \overline{x+y} \\ \text{und } (\overline{x}, \overline{y}) &\mapsto \overline{x \circ y} \end{aligned}$$

Behauptung Die Abbildungen $+$, $\circ$sind Wohldefiniert

zu $+$**)** *Seien $x_1, x_2, y \in R$ mit $\overline{x_1} = \overline{x_2}$. Betrachte*

$$\overline{x_1} + \overline{y} \;=\; \overline{x_1 + y} \;=\; \overline{\underbrace{x_1 - x_2}_{\in \mathfrak{a}} + x_2 + y} \;=\; \overline{x_2 + y}$$

Seien nun $y_1, y_2, x \in R$ mit $\overline{y_1} = \overline{y_2}$. Betrachte

$$\overline{x} + \overline{y_1} \;=\; \overline{x + y_1} \;=\; \overline{y_1 + x} \;\overset{s.o.}{=}\; \overline{y_2 + x} \;=\; \overline{x + y_2}$$

zu $\circ$**)** *Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$ mit $\overline{x_1} = \overline{x_2}$ und $\overline{y_1} = \overline{y_2}$. Betrachte*

$$\begin{aligned} (\overline{x_1} \circ \overline{y_1}) - (\overline{x_2} \circ \overline{y_2}) &= \overline{x_1} \circ (\overline{y_1} - \overline{y_2}) + \overline{x_1 \circ y_2} - \overline{x_2 \circ y_2} \\ &= x_1 \circ (\underbrace{y_1 - y_2}_{\in \mathfrak{a}}) + (\underbrace{x_1 - x_2}_{\in \mathfrak{a}}) \circ y_2 \;=\; 0 \end{aligned}$$

Weiter sind $0_{R/\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ und $1_{R/\mathfrak{a}} = 1 + \mathfrak{a}$. Zu jedem Faktorring gibt es einen kanonischen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\begin{aligned} \pi : R &\to {}^{R}\!/_{\mathfrak{a}} \\ x &\mapsto x + \mathfrak{a} \end{aligned}$$

mit

$$\mathrm{Ker}(\pi) \;=\; \left\{ x \in R \,\middle|\, \pi(x) = x + \mathfrak{a} = \mathfrak{a} \right\} \;=\; \mathfrak{a}$$

Beispiel 5 *(Faktorringe)*

1. *Sei $R = \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{a} \lhd \mathbb{Z}$ ein Ideal. Da $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist, gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(n) = \mathfrak{a}$. Es gilt*

   $$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in \mathfrak{a} = (n) \;\Leftrightarrow\; n \,|\, (x - y)$$

   Daher heißt der Faktorring

   $${}^{\mathbb{Z}}\!\big/_{(n)} \;=\; {}^{\mathbb{Z}}\!\big/_{n\mathbb{Z}}$$

   auch der Restklassenring von $\mathbb{Z}$ modulo n.

2. *Sei K ein Körper und $f \in K[X]$ ein irreduzibles Polynom. Dann ist $K[X]/(f)$ ein Erweiterungskörper von K, in dem f eine Nullstelle besitzt.*

3. *Die Abbildung*

$$\pi : R \to R/_{(0)}$$

ist ein Isomorphismus. Weiter gilt offensichtlich

$$R/_{(1)} \;=\; R/_{R} \;=\; \{0\}$$

Bemerkung 1.13 *Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$, dann gibt es genau einen Ringhomomorphismus*

$$\psi : R/_{\mathfrak{a}} \;\to\; S$$

mit $\psi \circ \pi \;=\; \varphi$. Weiter ist ψ genau dann injektiv, wenn $\mathfrak{a} = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Beweis. Da π surjektiv ist, gibt es π^{-1}, setze also $\psi(\overline{x}) = \varphi \circ \pi^{-1}(\overline{x})$. Die Wohldefiniertheit rechnet man leicht nach. Nimm nun an, es gäbe einen weiteren Ringhomomorphismus ψ' mit

$$\psi' \circ \pi(x) \;=\; \varphi(x) \qquad \text{für alle } x \in R$$

dann ist $\psi'(\overline{x}) = \psi(\overline{x})$ für alle $x \in R$. Betrachte nun

$$\mathrm{Ker}(\psi) \;=\; \left\{ \overline{x} \in R/_{\mathfrak{a}} \,\middle|\, \psi(\overline{x}) = 0 \right\} \;=\; \left\{ \overline{x} \in R/_{\mathfrak{a}} \,\middle|\, \varphi(x) = 0 \right\} \;=\; \mathrm{Ker}(\varphi)$$

Es ist

$$\psi \text{ injektiv} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(\psi) \;=\; \{\overline{0}\}$$

also ist, falls ψ injektiv ist, $\mathrm{Ker}(\varphi) \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathrm{Ker}(\varphi)$. Die Gegenrichtung ist trivial. □

Satz 1.14 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal sowie π die kanonische Projektion. Dann existiert eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\left\{ \mathfrak{b} \lhd R \,\middle|\, \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \right\} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \left\{ \overline{\mathfrak{b}} \lhd R/_{\mathfrak{a}} \right\}$$

gegeben durch

$$\begin{aligned} \phi(\mathfrak{b}) \;&:=\; \pi(\mathfrak{b}) \quad \lhd R/_{\mathfrak{a}} \\ \text{und } \psi(\overline{\mathfrak{b}}) \;&:=\; \pi^{-1}(\overline{\mathfrak{b}}) \;\lhd R \end{aligned}$$

Diese Bijektionen erhalten Maximal- und Primideale.

Beweis. Sei $\mathfrak{b} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}$ und bezeichne $\overline{\mathfrak{b}} := \pi(\mathfrak{b})$. Wegen der Surjektivität von π ist $\overline{\mathfrak{b}}$ ein Ideal von $R/\,\mathfrak{a}$.

Behauptung 1 $\pi^{-1}(\overline{\mathfrak{b}}) \;=\; \mathfrak{b}$

Begründung Die Inklusion „$\supseteq$“ ist trivial. Andersherum sei $x \in \pi^{-1}(\overline{\mathfrak{b}})$, dann ist $\pi(x) \in \pi(\mathfrak{b}) \;=\; \overline{\mathfrak{b}}$ also $x \in \mathfrak{b}$. ◇

Mit dieser Behauptung folgt sofort $\psi \circ \phi = id_{\{\mathfrak{b} \lhd R \mid \mathfrak{b} \subset \mathfrak{a}\}}$ und $\phi \circ \psi = id_{\{\overline{\mathfrak{b}} \lhd R/\,\mathfrak{a}\}}$

Behauptung 2 *Die Bijektionen sind Inklusionserhaltent*

Begründung Seien $\mathfrak{b}', \mathfrak{b} \lhd R$ mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$ und sei $\overline{x} \in \phi(\mathfrak{b}') = \pi(\mathfrak{b}')$. Dann gibt es einen Lift x von $\overline{x}$ mit $x \in \mathfrak{b}' \subset \mathfrak{b}$ also $\pi(x) = \overline{x} \in \pi(\mathfrak{b}) = \phi(b)$.
Seien nun $\overline{\mathfrak{b}'}, \overline{\mathfrak{b}} \lhd R/\mathfrak{a}$ mit $\overline{\mathfrak{b}'} \subset \overline{\mathfrak{b}}$ sowie $x \in \mathfrak{b}' = \psi(\overline{\mathfrak{b}'})$ Dann ist $\pi(x) \in \overline{\mathfrak{b}'} \subset \overline{\mathfrak{b}} = \pi(\mathfrak{b})$ also $x \in \mathfrak{b}$. $\diamond$

Behauptung 3 *Primideale werden auf Primideale abgebildet*

Begründung Zeige zunächst, dass ϕ die Primidealeigenschaft erhält: Sei dazu $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ein Primideal mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$. Seien $x_1, x_2 \in R$ mit

$$\overline{x_1 \cdot x_2} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \ \in \ \phi(\mathfrak{p}) = \overline{\mathfrak{p}}$$

Wegen der Surjektivität von π gibt es einen Lift x_1 von $\overline{x_1}$ und x_2 von $\overline{x_2}$ mit $x_1 x_2 \in \mathfrak{p}$. Also gilt $x_1 \in \mathfrak{p}$ oder $x_2 \in \mathfrak{p}$. Nach Anwenden von π gilt also $\overline{x_1} \in \overline{\mathfrak{p}}$ oder $\overline{x_2} \in \overline{\mathfrak{p}}$. Dass auch ψ die Primidealeigenschaft erhält folgt aus dem nachstehenden Lemma:

Lemma 1.15 *Sei $\varphi : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{p}' \in \operatorname{Spec}(R')$ ein Primideal, dann ist $\varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$ ein Primideal von R.*

Beweis. Da 0 in allen Primidealen enthalten ist, ist das Urbild von $\mathfrak{p}'$ unter φ nie leer. Sei $x_1 x_2 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{p}')$, dann ist wegen der Homomorphieeigenschaft

$$\varphi(x_1 x_2) \ = \ \varphi(x_1) \cdot \varphi(x_2) \ \in \ \mathfrak{p}'$$

also wegen der Primidealeigenschaft $\varphi(x_1) \in \mathfrak{p}'$ oder $\varphi(x_2) \in \mathfrak{p}'$. Wende nun wieder φ an und erhalte das Gewünschte. $\square$

$\diamond$

Behauptung 4 *Maximalideale bleiben under ψ und ϕ erhalten.*

Begründung Sei zunächst $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(R$ ein Maximalideal mit $\mathfrak{a} \lhd \mathfrak{m}$. Wir wollen zeigen, dass $\overline{fm} = \pi(\mathfrak{m})$ ein Maximalideal in $R/\mathfrak{a})$ ist. Dazu sei $\overline{\mathfrak{b}} \lhd R/\mathfrak{a}$ ein Ideal mit $\overline{\mathfrak{m}} \subsetneq \overline{\mathfrak{b}}$. Dann ist aber auch $\psi(\overline{\mathfrak{b}}) = \mathfrak{b} \subsetneq \mathfrak{m}$, weil ψ und ϕ inklusionserhaltend sind. Da $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal und π surjektiv ist, folgt damit schon $\pi(\mathfrak{b}) = R/\mathfrak{a}$.
Sei nun $\overline{\mathfrak{m}}$ ein maximales Ideal von $R/\mathfrak{a}$ und sei $\mathfrak{b} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{b}$. Dann gilt

$$\pi(\mathfrak{m}) \subsetneq \pi(\mathfrak{b}) \ \Rightarrow \ \pi(\mathfrak{b}) = {}^{R}\!/_{\mathfrak{a}} \ \Rightarrow \ \mathfrak{b} = R$$

$\square$

Satz 1.16 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a}$ ein Ideal, dann gelten:*

(1) *R ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $(0) \in \operatorname{Spec}(R)$.*

(2) *R ist genau dann ein Körper, wenn $(0) \in \operatorname{Spm}(R)$.*

(3) *${}^{R}\!/_{\mathfrak{a}}$ ist genau dann ein Integritätsbereich, wenn $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spec}(R)$.*

(4) *${}^{R}\!/_{\mathfrak{a}}$ ist genau dann ein Körper, wenn $\mathfrak{a} \in \operatorname{Spm}(R)$.*

Beweis. Teil **(1)** haben wir schon gesehen, zu Teil **(2)** nimm zunächst an, dass R ein Körper sei. Dann ist zu zeigen, dass für alle Ideale $\mathfrak{a} \lhd R$ mit $(0) \subsetneq \mathfrak{a}$ gilt $\mathfrak{a} = R$. Das ist aber trivial, da R als Körper nur die trivialen Ideale $(0) \subseteq (1) = R$ besitzt. Sei nun (0) ein Maximales Ideal. Da Jedes Ideal das Nullideal enthält, folgt aus der Maximalidealeigenschaft von (0), dass für alle Ideale $\mathfrak{a} \lhd R$ mit $\mathfrak{a} \neq (0)$ gilt $\mathfrak{a} = R$. Also ist R ein Körper.
Für den Nachweis von **(3)** Sei zunächst $R/\mathfrak{a}$ ein Integritätsring. Wir wollen zeigen, dass dann $\mathfrak{a}$ prim ist. Dazu seien $x, y \in R$ mit $xy \in \mathfrak{a}$ Betrachte nun die kanonische Projektion nach $R/\mathfrak{a}$. Es gilt

$$\overline{0} \;=\; \pi(xy) \;=\; \overline{xy} \;=\; \overline{x} \cdot \overline{y}$$

Da der Faktorring nach Voraussetzung nullteilerfrei ist, muss bereits $\overline{x} = \overline{0}$ oder $\overline{y} = \overline{0}$ gelten. Damit also $x \in \mathfrak{a}$ oder $y \in \mathfrak{a}$. Für die Gegenrichtung sei $\mathfrak{a}$ ein Primideal. Betrachte $\overline{x}, \overline{y} \in R/\mathfrak{a}$ mit $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy} = \overline{0}$. Für alle Lifts $xy \in R$ über $\overline{xy}$ gilt $x \in \mathfrak{a}$ oder $y \in \mathfrak{a}$, da $\mathfrak{a}$ prim ist, also ist entweder bereits $\overline{x} = \overline{0}$ oder $\overline{y} = \overline{0}$.
Zu **(4)** betrachte zuerst den Fall, dass $R/\mathfrak{a}$ ein Körper ist. In diesem Fall ist zu zeigen, dass $\mathfrak{a}$ ein maximales Ideal ist, dass also für alle $\mathfrak{b} \lhd R$ mit $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{b}$ gilt $\mathfrak{b} = R$. Sei also $\mathfrak{b}$ ein solches Ideal, dann gibt es ein $x \in \mathfrak{b} \setminus \mathfrak{a}$ das unter der kanonischen Projektion nicht auf Null abgebildet wird, also $\overline{x} \neq \overline{0}$. Nach Voraussetzung ist der Faktorring ein Körper, also hat jedes von Null verschiedene Element ein multiplikatives Inverses, d.h. es gibt ein $\overline{x}^{-1}$ mit $\overline{x}^{-1} \cdot \overline{x} = \overline{1}$. Wähle nun einen beliebigen Lift x^{-1} von $\overline{x}^{-1}$, dann gilt

$$-(x^{-1} \cdot x - 1_R) \;=\; 0 \;\in\; \mathfrak{a} \;\subset\; \mathfrak{b}$$

Insbesondere also $1 \in \mathfrak{b}$ also $\mathfrak{b} = R$. Sei nun $\mathfrak{a}$ ein Maximales Ideal. In desem Fall wollen wir zeigen, dass der Faktorring ein Körper ist. Dazu sei $\overline{x} \in R/\mathfrak{a}$ mit $\overline{x} \neq \overline{0}$. Betrachte das von diesem Element erzeugte Hauptideal $(\overline{x})$. Nach dem vorangegangenen Satz ist $\pi^{-1}((\overline{x}))$ ein Ideal in R mit $\mathfrak{a} \subsetneq \pi^{-1}((\overline{x}))$. Wegen der Maximalidealeigenschaft von $\mathfrak{a}$ ist also $\pi^{-1}((\overline{x})) = R$. Damit gilt aber $\overline{x} = \pi(R) = R/\mathfrak{a}$ also insbesondere $\overline{1} = \overline{x}$. □

Satz 1.17 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \neq R$. Dann gibt es ein Maximalideal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(R)$ von R mit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$.*

Beweis. Verwende das Lemma von Zorn: Definiere dazu

$$M \;:=\; \left\{\, \mathfrak{b} \lhd R \,\middle|\, \mathfrak{a} \subset \mathfrak{b} \text{ und } \mathfrak{b} \neq R \right\}$$

Zeige, dass M ein maximales Element $\mathfrak{b} \neq R$ bezüglich Inklusion besitzt. Dazu genügt es zu zeigen, dass jede aufsteigende Kette von Elementen $\mathfrak{b}_i$ aus M eine obere Schranke besitzt.
Sei $(\mathfrak{b}_i)_{i \in I}$ eine solche Kette, dann ist

$$\left(\bigcup_{i \in I} \mathfrak{b}_i \right) \;\in\; M$$

eine obere Schranke. Nach dem Lemma von Zorn hat M dann auch ein maximales Element wie gesucht. □

Beispiel 6 *Seien K_n für $n \in \mathbb{N}_0$ Körper und $R = \prod K_n$. Die Ideale*

$$\mathfrak{m}_j \; := \; \prod_{n \in \mathbb{N}_0} \delta_{i,j} K_n \quad \text{also } \mathfrak{m}_j \; = \; (\dots, 0, K_j, 0, \dots)$$

für $j \in \mathbb{N}_0$ sind offensichtlich maximal, denn die zugehörige natürliche Projektion

$$\pi_j : R \twoheadrightarrow K_j$$

hat Kern $\mathfrak{m}_j$. Nach dem Homomorphiesatz gilt also $K_j \cong R/\mathfrak{m}_j$. Es gibt aber noch weitere Maximalideale, denn betrachte

$$I \;\; := \;\; \left\{ (r_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in R \,\middle|\, \text{fast alle } r_n = 0 \right\}$$

Offensichtlich ist I ein Ideal von R und $(\dots, 1, 1, 1, \dots) = 1_R \notin I$ also insbesondere $I \neq R$. Nach dem obigen Satz gibt es also ein Maximalieal $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(R)$ mit $I \subset \mathfrak{m}$. Dies kann aber keins der offensichtlichen sein, denn für alle $i \in \mathbb{N}_0$ ist $e_i = (\dots, 0, 1_{K_i}, 0, \dots) \in I$ aber $e_i \notin \mathfrak{m}_j$ für $i \neq j$. Also gilt insebseondere $\mathfrak{m}_j \neq \mathfrak{m}$ für alle j.

2 Die Zariski Topologie

Unser Ziel in desem Abschnitt ist es, das Primspektrum eines Rings $\operatorname{Spec}(\ )$ mit einer Topologie zu versehen. Zunächst einige grundlegende Begriffe:

Definition 2.1 *(Topologischer Raum und stetige Abbildungen)*
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ ist gegeben durch eine Menge X und eine Teilmenge $\mathcal{T} \subseteq \mathbb{P}(X)$ der Potenzmenge von X, so dass

- $\varnothing, X \in \mathcal{T}$
- *Beliebige Vereinigungen von Mengen aus $\mathcal{T}$ selbst wieder in $\mathcal{T}$ sind, also seien für $i \in I$, mit I beliebig, Mengen $X_i \in \mathcal{T}$ gegeben, dann gelte*

$$\bigcup_{i \in I} X_i \; \in \; \mathcal{T}$$

- *Endliche Schnitte von Mengen aus $\mathcal{T}$ selbst wieder in $\mathcal{T}$ sind, also seien für $N \in \mathbb{N}$ Mengen $X_1, \dots, X_N \in \mathcal{T}$ gegeben, dann gelte*

$$\bigcap_{i=1}^{N} X_i \; \in \; \mathcal{T}$$

Die Elemente von $\mathcal{T}$ heißen die offenen Mengen von X und die Elemente $x \in X$ heißen Punkte.

Seien $(X, \mathcal{T}_X)$ sowie $(Y, \mathcal{T}_Y)$ zwei topologische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt stetig, wenn die Urbilder offener Mengen ebenfalls offen sind, d.h. wenn für alle $V \in \mathcal{T}_Y$ gilt $f^{-1}(V) \in \mathcal{T}_X$.

Beispiel 7 *Sei $X = \mathbb{R}$, dann setzen wir*

$$\mathcal{T} \; := \; \left\{ U \subseteq \mathbb{R} \,\middle|\, U \text{ offen im üblichen Sinne} \right\}$$

Offensichtlich ist $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum.
Allgemein gilt: *Immer wenn es eine Abstandsfunktion gibt, können wir ε-Kugeln bilden und mit diesen und beliebigen Vereinigungen dieser eine Topologie bilden. Insbesondere sind damit metrische Räume immer auch topologische Räume.*

Beispiel 8 *(diskrete und triviale Topologie)*
Sei X eine beliebige Menge, dann heißt $\mathcal{T} := \{\varnothing, X\}$ die triviale Topologie und $\mathcal{T} := \mathbb{P}(X)$ die diskrete Topologie auf X.

Definition 2.2 *(abgeschlossene Menge)*
Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum eine Menge F heißt abgeschlossen in X, wenn es eine offene Menge $U \in \mathcal{T}$ mit $F = X \setminus U$ gibt.

Beispiel 9 *Die Begriffe offen und abgeschlossen sind nicht conträr, denn betrachte $X \setminus \varnothing$. Da $\varnothing$ in $\mathcal{T}$ nach Voraussetzung, ist X abgeschlossen, aber X ist ebenfalls offen nach Voraussetzung. Es gibt also Mengen, die sowohl abgeschlossen als auch offen sind. Triviale Fälle: X, $\varnothing$*

Bemerkung 2.3 *Sei $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum. Sei F ein abgeschlossene Menge, dann ist $X \setminus F$ offen. Setze*

$$\mathcal{A} \;:=\; \{\, F \in X \mid F \text{ abgeschlossen} \,\}$$

dann gelten:

- $\varnothing, X \in \mathcal{A}$
- *Beliebige Schnitte von abgeschlossenen Mengen sind selbst wieder abgeschlossen, also seien für $i \in I$, mit I beliebig, Mengen $X_i \in \mathcal{A}$ gegeben, dann gelte*

$$\bigcap_{i \in I} X_i \;\in\; \mathcal{A}$$

- *Endliche Vereinigungen von abgeschlossenen Mengen sind selbst wieder abgeschlossen, also seien für $N \in \mathbb{N}$ Mengen $X_1, \dots, X_N \in \mathcal{A}$ gegeben, dann gelte*

$$\bigcup_{i=1}^{N} X_i \;\in\; \mathcal{A}$$

Ist weiterhin $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}(X)$ mit den Bedingungen wie oben, so existiert auf X eine eindeutig bestimmte Topologie, deren offene Mengen genau die Komplemente der Mengen aus $\mathcal{A}$ sind.

Definition 2.4 *(quasi-kompakt)*
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt quasi-kompakt, wenn es für alle offenen Überdeckungen von X eine endliche (offene) Teilüberdeckung von X gibt. Wir nennen $(X, \mathcal{T})$ dann auch Überdeckungskompakt.

Definition 2.5 *(zusammenhängend)*
Ein topologischer Raum $(X, \mathcal{T})$ heißt zusammenhängend, wenn er sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer offener Teilmengen schreiben lässt, also wenn aus $X = X_1 \cup X_2$ mit $X_1 \cap X_2 = \varnothing$ stets $X_1 = \varnothing$ oder $X_2 = \varnothing$ folgt.

Nachdem wir nun einige grundlegende Begriffe bereitgestellt haben, beginnen wir mit dem eigentlichen Gegenstand dieses Abschnittes und definieren eine Topologie auf dem Primspektrum.

Definition 2.6 *(Verschwindungsmenge eines Ideals)*
Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal, dann heißt die Menge aller Primideale, die $\mathfrak{a}$ enthalten, also

$$V(\mathfrak{a}) \;:=\; \left\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \,\middle|\, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \,\right\} \;\subseteq\; \operatorname{Spec}(R)$$

die Verschwindungsmenge von $\mathfrak{a}$.

Anmerkung Eine Erläuterung für den Namen „Verschwindungsmenge" erhalten wir erst beim Studium der algebraischen Geometrie.

Definition und Satz 2.7 *(Zariski Topologie)*
Sei R ein Ring. Die Menge $\mathcal{A} := \{\, V(\mathfrak{a}) \mid \mathfrak{a} \lhd R \,\}$ bildet die Menge aller abgeschlossenen Teilmengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(R)$. Wir nennen diese Topologie die Zariski Topologie.

Beweis. Wir müssen überprüfen, on die oben definierte Menge $\mathcal{A}$ die Bedingungen aus Bemerkung 2.3 erfüllt. Es gelten

$$\begin{array}{rrcccl} & V(0) & = & \left\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \,\middle|\, (0) \in \mathfrak{p} \,\right\} & = & \operatorname{Spec}(R) \\ \text{und} & V(R) & = & \left\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \,\middle|\, (1) \in \mathfrak{p} \,\right\} & = & \varnothing \end{array}$$

Tatsächlich sind auch beliebige Schnitte von Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$ wieder von der Form $V(\mathfrak{b})$. Betrachte dazu das folgende

Lemma 2.8 *Seien R ein Ring und I eine beliebige Indexmenge. Seien weiter für $i \in I$ Ideale $\mathfrak{a}_i \lhd R$ gegeben, dann gilt*

$$\bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) \;=\; V\Big(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\Big)$$

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ dann gilt

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} \in \bigcap_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i) &\iff \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}_i) \quad \text{für alle } i \in I \\ &\iff \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{für alle } i \in I \\ &\iff \bigcup_{i\in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p} \\ &\overset{1.9}{\iff} \sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i \subseteq \mathfrak{p} \\ &\iff \mathfrak{p} \in V\Big(\sum_{i\in I} \mathfrak{a}_i\Big) \end{aligned}$$

□

Weiterhin sind auch endliche Vereinigungen von diesem Mengen wieder von der Form $V(\mathfrak{a})$. Dazu genügt es dies für zwei solcher Mengen zu zeigen, dann folgt der Rest induktiv.

Lemma 2.9 *Sei R ein Ring und seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd R$ zwei Ideale. Dann gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \,\cup\, V(\mathfrak{b}) \;=\; V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$$

Beweis. Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ gilt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) &\iff \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \quad \text{und} \quad \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p} \\
&\iff \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \\
&\implies \mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})
\end{aligned}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass aus $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ stets auch $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ oder $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ folgt. Sei also $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ und nimm ohne Einschränkung an, dass $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p}$ also $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$ gilt. Wir wollen nun zeigen, dass dann $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$ gilt. Nach den gemachten Voraussetzungen gibt es ein $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$. Sei $y \in \mathfrak{b}$ beliebig, dann gilt wegen der Idealeigenschaft $xy \in \mathfrak{b}$ und $xy \in \mathfrak{a}$ also $xy \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist und wir x gerade so gewählt haben, dass $x \notin \mathfrak{p}$ gilt, muss $y \in \mathfrak{p}$ gelten und damit folgt was zu zeigen war. □

Mit diesen beiden Lemmata ist der Satz 2.7 gezeigt. □

Beispiel 10 *(Zariski Topologie)*

(i) *Sei K ein Körper, dann ist $\operatorname{Spec}(K) = \{(0)\}$ eine einpunktige Menge. Diese wird zusammen mit der trivialen Topologie ein topologischer Raum, der sogenannte Einpunktraum.*

(ii) *Sei K ein Körper und $R = K[T]$ der Polynomring in einer Variable über K. Wir wissen bereits, dass dies ein euklidischer, also insbesondere ein Hauptidealring ist. Ebenfalls wissen wir, dass in Hauptidealringen ein Element genau dann prim ist, wenn es irreduzibel ist. Damit erhalten wir*

$$\operatorname{Spec}(K[T]) \;=\; \big\{ \, (f) \,\big|\, f \in K[T] \text{ irred. \& normiert} \,\big\} \cup \big\{ \, (0) \, \big\}$$

Was sind nun die abgeschlossenen Teilmengen von $X := \operatorname{Spec}(K[T])$?

1. *Klar sind X, $\varnothing$ abgeschlossen*
2. *Wie sehen die Mengen $V(\mathfrak{a})$ mit $\mathfrak{a} \lhd K[T]$ konkret aus?*
   Da $K[T]$ ein Hauptidealring ist, gibt es ein normiertes Polynom $f \in K[T]$ mit $(f) = \mathfrak{a}$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
V(\mathfrak{a}) \;=\; V((f)) \;&=\; \big\{ \, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(K[T]) \,\big|\, (f) \subseteq \mathfrak{p} \, \big\} \\
&= \big\{ \, (g) \,\big|\, g \in K[T] \text{ irred. \& normiert sowie } (f) \subseteq (g) \, \big\} \\
&= \big\{ \, (g) \,\big|\, g \in K[T] \text{ irred. \& normiert sowie } g|f \, \big\} \\
&= \big\{ \, (g) \,\big|\, g \text{ irred. Teiler von } f \, \big\}
\end{aligned}$$

   Insbesondere folgt damit $\sharp V(\mathfrak{a}) < \infty$. Also ist $V(\mathfrak{a})$ eine endliche Menge von Punkten der Form $\mathfrak{p} \neq (0)$.
3. *Sind $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec}(K[T]) \setminus \{(0)\}$ Primideale mit $(f_i) = \mathfrak{p}_i$ für alle i, dann ist auch die Menge $\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\}$ abgeschlossen, denn*

$$\{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n\} \;=\; V\Big(\Big(\prod_{i=1}^{n} f_i\Big)\Big)$$

   Insbesondere ist also $\{\mathfrak{p}\}$ für $\mathfrak{p}$ in $\operatorname{Spec}(K[T]) \setminus \{(0)\}$ abgeschlossen.
   Die Menge $\{(0)\}$ ist <u>nicht</u> abgeschlossen, da $0 \in K[T]$ nicht irreduzibel ist.

(iii) *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper. Wir betrachten wieder* $\mathrm{Spec}(K[T])$*. Über einem algebraisch abgeschlossenen Körper zerfallen alle Polynome in ihre Linearfaktoren, damit konkretisiert sich die Beschreibung des Spektrums weiter zu*

$$\mathrm{Spec}\,K[T] \;=\; \left\{\, (T-a) \,\middle|\, a \in K \,\right\} \cup \left\{\, (0) \,\right\}$$

Außerdem gilt $\mathrm{Spec}\,K[T] \setminus \{(0)\} = \mathrm{Spm}\,K[T]$ *und damit erhalten wir eine Bijektion*

$$\begin{array}{rcl} K & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Spm}\,K[T] \\ a & \mapsto & T-a \end{array}$$

damit zerlegt sich das Primspektrum in eine „Gerade über K“ $\mathrm{Spm}\,K[T]$ *und einen „generischen Punkt“* (0).

Definition 2.10 *(Ausgezeichnete offene Teilmenge)*
Sei R ein Ring. Die Mengen der Form

$$D(f) \;:=\; \mathrm{Spec}\,R \setminus V((f)) \;=\; \left\{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R \,\middle|\, f \notin \mathfrak{p} \,\right\}$$

für $f \in R$ heißen ausgezeichnete offene Teilmengen von $\mathrm{Spec}\,R$.

Definition und Lemma 2.11 *(Basis der Topologie)*
Sei R ein Ring, dann bilden die ausgezeichneten offenen Teilmengen eine Basis der Zariski Topologie, das heißt jede offene Menge von $\mathrm{Spec}(R)$ *lässt sich als Vereinigung von ausgezeichneten offenen Teilmengen schreiben. Daher findet sich auch oft die Bezeichnung „basisoffen“ für die ausgezeichneten offenen Teilmengen.*

Beweis. Sei $U \subseteq \mathrm{Spec}\,R$ offen, dann gibt es ein $\mathfrak{a} \lhd R$ mit $U = \mathrm{Spec}\,R \setminus V(\mathfrak{a})$. Für $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\,R$ gilt

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{p} \in U & \Leftrightarrow & \mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{p} \\ & \Leftrightarrow & \exists\, f \in \mathfrak{a} \,:\, f \notin \mathfrak{p} \\ & \Leftrightarrow & \exists\, f \in \mathfrak{a} \,:\, \mathfrak{p} \in D(f) \\ & \Leftrightarrow & \mathfrak{p} \in \displaystyle\bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f) \\ & \Rightarrow & U = \displaystyle\bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f) \end{array}$$

Erinnerung an Lemma 1.15: Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, dann gilt für alle Primideale $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}\,S$: $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \mathrm{Spec}\,R$.

Definition 2.12 *(assoziierte Abbildung)*
Sei $\varphi : R \to S$ ein Ringhomomorphismus, dann heißt

$$\begin{array}{rcl} {}^a\varphi : \mathrm{Spec}(S) & \to & \mathrm{Spec}(R) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

die zu φ assoziierte Abbildung. In manchen Texten findet sich auch die Schreibweise φ^*.

Bemerkung 2.13 *Wegen der vorangegangenen Erinnerung ist diese Abbildung Wohldefiniert. Weiter ist* ${}^a\varphi$ *sogar stetig bezüglich der Zariski Topologie auf beiden Räumen.*

Beweis. Es ist äquivalent zu prüfen, ob die Urbilder offener Mengen wieder offen sind, oder ob die Urbilder abgeschlossener Mengen wieder angschlossen sind. Da wir die abgeschlossenen Mengen der Zariski Topologie besser verstehen, betrachten wir diese. Sei also $F \in \operatorname{Spec} R$ abgeschlossen, dann ist F von der From $V(\mathfrak{a})$ für ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd R$. Es gilt

$$\begin{aligned}({}^a\varphi)^{-1}\big(V(\mathfrak{a})\big) &= \left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S \mid \mathfrak{a} \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \right\} \\ &= \left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S \mid \varphi(\mathfrak{a}) \subseteq \mathfrak{q} \right\} \\ &= \left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S \mid \varphi(\mathfrak{a})S = \big(\varphi(\mathfrak{a})\big) \subseteq \mathfrak{q} \right\} \\ &= V\big((\varphi(\mathfrak{a}))\big)\end{aligned}$$

und dies ist offensichtlich eine abgeschlossene Menge von $\operatorname{Spec} S$ $\square$

3 Lokale Ringe und Lokalisierung

Definition 3.1 *(Multiplikatives System)*
Sei R ein Ring. Eine Teilmenge $S \subseteq R$ heißt multiplikativ oder multiplikatives System, falls $1_R \in S$ und für alle $s, t \in S$ auch $s \cdot t \in S$ ist.

Definition und Bemerkung 3.2 *(Konstruktion der Lokalisierung)*
Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf $R \times S$ via

$$(x, s) \sim (y, t) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, r \in S \,:\, r\,(xt - ys) = 0$$

Die Symmetrie und Reflexivität sind klar. Zur Transitivität betrachte $(x, s) \sim (y, t)$ und $(y, t) \sim (z, u)$, dann gibt es $r, q \in S$ mit $r(xt - ys) = 0$ und $q(yu - zt) = 0$. Betrachte

$$\underbrace{rqt}_{\in S}\,(xu - zs) \overset{kommut.}{=} qrxtu - rqzts = qrysu - rqyus \overset{kommut.}{=} 0$$

Bezeichne mit

$$S^{-1}R := {}^{R \times S}\!\big/\!_{\sim}$$

die Menge aller Äquivalenzklassen und mit $\frac{x}{s}$ die Äquivalenzklasse von (x, s), dann sind die Abbildungsvorschriften

$$\frac{x}{s} + \frac{y}{t} = \frac{xt + ys}{st} \qquad \text{und} \qquad \frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} = \frac{xy}{st}$$

wohldefiniert (nachrechnen!), das heißt sie definieren Abbildungen $+, \cdot : S^{-1}R \times S^{-1}R \to S^{-1}R$ vermöge derer $S^{-1}R$ zu einem kommutativen Ring mit $0_{S^{-1}R} := \frac{0}{1}$ und $1_{S^{-1}R} := \frac{1}{1}$ wird.
Wir bezeichnen den Ring $S^{-1}R$ als die Lokalisierung von R nach S.
Auch zu dieser Konstruktion gibt es einen natürlichen Ringhomomorphismus:

$$\begin{aligned} \tau : R &\to S^{-1}R \\ x &\mapsto \frac{x}{1} \end{aligned}$$

/!\ Achtung /! Auch wenn uns diese Abbildung τ sehr vertraut vorkommt, ist sie im Allgemeinen nicht injektiv, denn in $S^{-1}R$ gilt genau dann $\frac{x}{1} = \frac{0}{1}$, wenn es ein $s \in S$ mit $sx = 0$ gibt, also wenn x ein Nullteiler ist. Betrachte dazu das folgende

Beispiel 11 *Sei $R := \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ und $S := \{(x, y) | x \neq 0\}$. Dann ist S ein multiplikatives System, denn $(1, 1) \in S$ und für $x, y \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ gilt $xy \neq 0$, also ist für $(x, s), (y, t) \in S$ auch $(xy, st) \in S$. Betrachte nun das Element $(0, 1) \in R$ unter der Abbildung τ, dann gilt*

$$\tau((0, 1)) = \frac{(0, 1)}{(1, 1)} = 0_{S^{-1}R} \quad \text{denn } (1, 0) \cdot (0, 1) = (0, 0)$$

Trotz der im Allgemeinen fehlenden Injektivität von τ schreiben wir oft einfach nur x anstelle von $\frac{x}{1}$, wenn wir ein Element $x \in R$ als Element von $S^{-1}R$ auffassen wollen.

Beispiel 12 *(Standartbeispiele zur Lokalisierung)*
Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System.

- *Wir haben in der Definition des Multiplikativen Systems nicht $0 \in S$ ausgeschlossen. Es gilt*

$$\begin{aligned} 0 \in S \quad &\Leftrightarrow \quad \exists\, s \in S \,:\, -s \,=\, s(0-1) \,=\, 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{0}{1} = \frac{1}{1} \\ &\Leftrightarrow \quad S^{-1}R \,=\, \{0\} \end{aligned}$$

- *Sei R ein Integritätsbereich und $S = R \setminus \{0\}$, dann ist*

$$S^{-1}R \quad = \quad \mathrm{Quot}(R) \quad = \quad \mathrm{Frac}(R)$$

  der Qutientenkörper von R. Konkret: $R = \mathbb{Z}$ und $S = Z \setminus \{0\}$, dann ist $S^{-1}R = \mathbb{Q}$.

- *Seien $R := \mathbb{Z}$ und $p \in \mathbb{Z}_{>0}$ eine Primzahl. Setze*

$$S \quad := \quad \mathbb{Z} \backslash (p) \quad = \quad \left\{\, x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, p \nmid x \,\right\}$$

  dann ist

$$S^{-1}R \quad = \quad \left\{\, \frac{x}{s} \,\middle|\, x, s \in \mathbb{Z} \text{ und } p \nmid s \,\right\} \quad =: \quad \mathbb{Z}_{(p)} \quad \subset \quad \mathbb{Q}$$

- *Seien $R := \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{Z}$ eine Zahl. Setze $S := \{1, s, s^2, s^3, \ldots\}$ dann ist*

$$S^{-1}R \quad = \quad \begin{cases} \{0\} & \text{falls } s = 0 \\ \left\{\, \frac{x}{s^n} \,\middle|\, x \in \mathbb{Z} \text{ und } n \in \mathbb{N}_0 \,\right\} \subset \mathbb{Q} & \text{sonst} \end{cases}$$

Die beiden letzten Punkte des Beispiels lassen sich verallgemeinern zu

Definition und Bemerkung 3.3 *Sei R ein Ring.*

- *Sei $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$ ein Primelement und $S := R \setminus \mathfrak{p}$. Wir schreiben*

$$R_{\mathfrak{p}} \quad := \quad S^{-1}R$$

  $R_{\mathfrak{p}}$ ist nie der Nullring, denn $0 \notin S$ da $0 \in \mathfrak{p}$.
  /! *Manchmal wird $S{-}1R$ auch R_S geschrieben, dann kommt es aber zu Notationskonflikten, denn $R_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R = R_{R\backslash\mathfrak{p}}$*

- *Sei $s \in R$ und $S := \{1, s, s^2, s^3, \ldots\}$. Wir schreiben*

$$R_s \quad := \quad S^{-1}R$$

  R_s ist genau dann der Nullring, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s^n = 0$ gibt, also wenn s nilpotent ist.

Satz 3.4 *Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ multiplikativ sowie $\tau : R \to S^{-1}R$ der natürliche Ringhomomorphismus. Dann ist die zu τ assoziierte stetige Abbildung*

$${}^a\tau : \mathrm{Spec}\, S^{-1}R \to \mathrm{Spec}\, R$$

injektiv mit Bild

$$\mathrm{Im}({}^a\tau) \;=\; \left\{\, \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R \,\middle|\, \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \,\right\}$$

Damit erhalten wir inklusionserhaltende zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S^{-1}R & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \,\middle|\, \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \right\} \subseteq \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{q} & \mapsto & {}^a\tau(\mathfrak{q}) = \tau^{-1}(\mathfrak{q}) \\ \mathfrak{p}\, S^{-1}R & \leftarrow\!\shortmid & \mathfrak{p} \end{array}$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass wir die Bijektionen erhalten, denn dann ist ${}^a\tau$ automatisch injektiv. Wir zeigen

(1) Für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}R$ gilt $\tau^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S = \varnothing$

(2) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ gilt: Das von $\mathfrak{p}$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}\, S^{-1}R$ ist ein Primideal.

(3) Für alle $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}R$ gilt $\tau^{-1}(\mathfrak{q})S^{-1}R = \mathfrak{q}$

(4) Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ist $\tau^{-1}(\mathfrak{p}\, S^{-1}R) = \mathfrak{p}$

Offensichtlich zeigen (3) und (4) zusammen, dass die Abbildungen invers zueinander sind.

Zu (1) Sei $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}R$ und nimm an es gäbe ein $x \in \tau^{-1}(\mathfrak{q}) \cap S$. Dann wäre $\frac{x}{1} \in \mathfrak{q}$ und somit wäre $\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{1} = 1_{S^{-1}R} \in \mathfrak{q}$ und dies kann nicht auftreten, da $\mathfrak{q}$ nach Voraussetzung prim ist.

Lemma 3.5 *Sei $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal und bezeichne $\mathfrak{a}\, S^{-1}R$ das von $\mathfrak{a}$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal. Es gilt*

$$\mathfrak{a}\, S^{-1}R \quad = \quad \left\{ \frac{x}{s} \,\middle|\, x \in \mathfrak{a} \text{ und } s \in S \right\}$$

Beweis. Wir zeigen die beiden Inklusionen:

„$\supseteq$“ Nach Definition gilt $\frac{x}{1} \in \mathfrak{a}\, S^{-1}R$ für alle $x \in \mathfrak{a}$. Da $\mathfrak{a}\, S^{-1}R$ ein Ideal ist, gilt dann auch $\frac{x}{s} = \frac{x}{1} \cdot \frac{1}{s} \in \mathfrak{a}\, S^{-1}R$ für alle $s \in S$.

„$\subseteq$“ Weil $\mathfrak{a}\, S^{-1}R$ nach Definition das kleinste Ideal von $S^{-1}R$ ist, dass alle $\frac{x}{1}$ für $x \in \mathfrak{a}$ enthält, genügt es zu zeigen, dass

$$\mathfrak{b} \quad := \quad \left\{ \frac{x}{s} \,\middle|\, x \in \mathfrak{a} \text{ und } s \in S \right\} \quad \lhd \quad S^{-1}R$$

ein Ideal ist. Es gelten

- $0 = \frac{0}{1} \in \mathfrak{b}$, denn $0 \in \mathfrak{a}$
- Seien $\frac{x}{s}, \frac{x'}{s'} \in \mathfrak{b}$ mit $x, x' \in \mathfrak{a}$ dann folgt wegen der Idealeigenschaft von $\mathfrak{a}$, dass $xs' + x's \in \mathfrak{a}$ ist und damit gilt
$$\frac{x}{s} + \frac{x'}{s'} \quad = \quad \frac{xs' + x's}{ss'} \quad \in \mathfrak{b}$$
- Sei $\frac{x}{s} \in \mathfrak{b}$ mit $x \in \mathfrak{a}$ und sei $\frac{y}{t} \in S^{-1}R$ dann ist
$$\frac{x}{s} \cdot \frac{y}{t} \quad = \quad \frac{xy}{st} \in \mathfrak{b}$$
denn $xy \in \mathfrak{a}$ wegen der Idealeigenschaft von $\mathfrak{a}$. □

Zu (2) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ein Primideal mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$. Wir wollen zeigen, dass das von $\mathfrak{p}$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal $\mathfrak{p}\, S^{-1}R$ ein Primideal ist. Es gelten

- $1_{S^{-1}R} \notin \mathfrak{p}$, denn sonst wäre nach dem obigen Lemma 3.5
$$\frac{1}{1} = \frac{x}{s} \qquad \text{mit } x \in \mathfrak{p} \text{ und } s \in S$$
In der Lokalisierung heißt das, dass es ein $r \in S$ gäbe, so dass $0 = r(1 \cdot s - x \cdot 1) = rs - rx$ gilt. Es folgte also $rs = rx$, aber damit hätten wir aber ein Element im Schnitt $\mathfrak{p} \cap S$ gefunden, denn $rs \in S$ und $rx \in \mathfrak{p}$. Dies kann nach den Voraussetzungen an $\mathfrak{p}$ nicht sein.

- $\mathfrak{p}\, S^{-1}R$ erfült die Primidealeigenschat. Seien $\frac{x}{s}, \frac{y}{t} \in S^{-1}R$ gegeben mit $\frac{xy}{st} \in \mathfrak{p}\, S^{-1}R$.
Behauptung *Ist $\frac{z}{r} \in \mathfrak{p}\, S^{-1}R$, so ist stets $z \in \mathfrak{p}$.*
Begründung Nach dem Lemma gilt für $\frac{z}{r} \in \mathfrak{p}\, S^{-1}R$, dass es ein $\frac{z'}{r'}$ mit $z' \in \mathfrak{p}$ und $r' \in S$ sowie $\frac{z}{r} = \frac{z'}{r'}$ gibt. Damit gibt es also ein $r'' \in S$, so dass $r''(zr' - z'r) = 0$ ist. Also gilt mit diesem r'' auch $(r''r')z = rr''z \in \mathfrak{p}$. Da $\mathfrak{p}$ ein Primideal ist, muss so entweder $r''r' \in \mathfrak{p}$ oder $z \in \mathfrak{p}$ gelten, aner ersterer Fall kann nicht auftreten, da $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$ nach Voraussetzung. Also bleibt nur $z \in \mathfrak{p}$. $\diamond$
Mit dieser Behauptung folgt aus $\frac{xy}{st} \in \mathfrak{p}\, S^{-1}R$ also unmittelbar, dass $xy \in \mathfrak{p}$ sind. Damit ist aber schon entweder $x \in \mathfrak{p}$ oder $y \in \mathfrak{p}$ also $\frac{x}{s} \in \mathfrak{p}\, S{-}1R$ oder $\frac{y}{t} \in \mathfrak{p}\, S{-}1R$.

Zu (3) Wir betrachten nun ein $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}R$ und wollen zeigen, dass $\tau^{-1}(\mathfrak{q})S^{-1}R = \mathfrak{q}$ gilt. Nach Lemma 3.5 gilt
$$\tau^{-1}(\mathfrak{q})S^{-1}R = \left\{ \frac{x}{s} \,\middle|\, x \in \tau^{-1}(\mathfrak{q}) \text{ und } s \in S \right\} = \left\{ \frac{x}{s} \,\middle|\, \frac{x}{1} \in \mathfrak{q} \text{ und } s \in S \right\} = \mathfrak{q}$$
Die letzte Gleichheit folgt hierbei aus der Tatsache, dass für $t \in S$ und $\frac{x}{s} \in S^{-1}R$ gilt
$$\frac{x}{s} \in \mathfrak{q} \;\Leftrightarrow\; \frac{tx}{s} \in \mathfrak{q} \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{ts} \in \mathfrak{q} \qquad \text{denn } \frac{t}{1}, \frac{1}{t} \in (S^{-1}R)^\times$$

Zu (4) Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ mit $\mathfrak{p} \cap S = \varnothing$, dann wollen wir nun zeigen, dass $\tau^{-1}(\mathfrak{p}\, S^{-1}R) = \mathfrak{p}$gilt. Dies ist aber klar, denn
$$\tau^{-1}(\mathfrak{p}\, S^{-1}R) = \left\{ x \in R \,\middle|\, \frac{x}{1} \in \mathfrak{p}\, S^{-1}R \right\}$$
und
$$\frac{x}{1} \in \mathfrak{p}\, S^{-1}R \;\Leftrightarrow\; x \in \mathfrak{p}$$
nach der Behauptung zu **(2)**. $\square$

Beispiel 13 *(Lokalisierung als lokaler Ring)*
Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Maximalideal. Via ${}^a\tau$ haben wir eine Bijektion
$$\operatorname{Spec} R_{\mathfrak{p}} \xleftrightarrow{{}^a\tau} \left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \,\middle|\, \mathfrak{q} \cap (R \setminus \mathfrak{q}) = \varnothing \right\} = \left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R \,\middle|\, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \right\}$$
In der rechten Menge kann höchstens $\mathfrak{p}$ selber maximal sein, denn alle Maximalideale sind Primideale und es gilt
$$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}' \overset{Bew(3)}{\Longleftrightarrow} \tau^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \tau{-}1(\mathfrak{q}') \qquad \text{für } \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}R \text{ und}$$
$$\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}' \overset{Bew(4)}{\Longleftrightarrow} \mathfrak{p}\, S^{-1}R \subseteq \mathfrak{p}\, S^{-1}R \qquad \text{für } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$$

da alle anderen Primideale in $\mathfrak{p}\, R_\mathfrak{p}$ enthalten sind. Da wir aber ebenfalls wissen, dass alle echten Ideale, das heißt Ideale, die nicht der ganze Ring sind, also insbesondere $\mathfrak{p}\, R_\mathfrak{p}$, in einem Maximalideal enthalten sind, folgt

$$\operatorname{Spm} R_\mathfrak{p} \quad = \quad \{\ \mathfrak{p}\, R_\mathfrak{p}\ \}$$

Die Lokalisierung nach einem Primideal besitzt also nur genau ein einziges Maximales Ideal.

***Konkret** betrachte $R = \mathbb{Z}$ und $\mathfrak{p} = (p)$ mit einer Primzahl $p \in \mathbb{Z}_{>0}$. Es ist*

$$\{\, (q) \in \operatorname{Spec} \mathbb{Z} \,\big|\, (q) \subseteq (p) \,\} \quad = \quad \operatorname{Spec} \mathbb{Z}_{(p)} \quad = \quad \{\, (0),\, p\,\mathbb{Z}_{(p)}\ \}$$

Nach Lemma 3.5 können wir das Maximalideal sogar ganz explizit beschreiben. Es ist

$$p\,\mathbb{Z}_{(p)} \quad = \quad \left\{ \frac{x}{s} \,\middle|\, p \,|\, x \text{ und } p \nmid s \right\} \quad = \quad \left(\frac{p}{1}\right)$$

Dieses Beispiel motiviert auch die folgende

Definition 3.6 *(Lokaler Ring, Restklassenkörper)*
Ein Ring R heißt lokal oder ein lokaler Ring, falls R genau ein maximales Ideal besitzt.
Ist R ein lokaler Ring mit maximalideal $\mathfrak{m}$, so heißt

$$\kappa \quad := \quad R/\mathfrak{m}$$

der Restklassenkörper von R.

***Notation** Wenn wir schreiben $(R, \mathfrak{m})$ sei ein lokaler Ring, so meinen wir, dass R ein lokaler Ring mit dem einzigen maximalen Ideal $\mathfrak{m}$ sei. Analog meinen wir bei $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$, dass R ein lokaler Ring mit Maximalideal $\mathfrak{m}$ und Restklassenkörper κ ist.*

Beispiel 14 *Polynomringe über Körpern, $\mathbb{Z}$, ... sind nicht lokal.*

Bemerkung 3.7 *Wie wir im Beispiel 13 gesehen haben ist $R_\mathfrak{p}$ für einen Ring R und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein lokaler Ring mit maximalem Ideal $\mathfrak{p}\, R_\mathfrak{p}$. Den Restklassenkörper von R in $\mathfrak{p}$ bezeichnen wir mit*

$$\kappa(\mathfrak{p}) \quad = \quad R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}\, R_\mathfrak{p}$$

Satz 3.8 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{m} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{m} \neq R$. Dann sind äquivalent*

(i) $(R, \mathfrak{m})$ *ist ein lokaler Ring.*

(ii) $\mathfrak{m}$ *ist genau die Menge der Nichteinheiten von R, also $R \setminus \mathfrak{m} \ = \ R^\times$*

(iii) $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ *und für alle $x \in \mathfrak{m}$ gilt $1 + x \in R^\times$*

Beweis. Für den Schluss „(ii)⇒(i)“ genügt eine schwächere Voraussetzung: Sei $R \setminus \mathfrak{m} \subseteq R^\times$ und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{m} \subsetneq \mathfrak{a}$, dann gibt es ein $a \in \mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a} \in R \setminus \mathfrak{m} \subseteq R^\times$. Das Ideal $\mathfrak{a}$ enthält also eine Einheit, also ist $\mathfrak{a} = R$. Damit ist $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal von R. Angenommen es gäbe weitere, etwa $\mathfrak{m}' \in \operatorname{Spm} R$, dann wäre $\mathfrak{m}' \not\subseteq \mathfrak{m}$ und so gäbe es ein $m' \in \mathfrak{m}'$ mit $m' \in R \setminus \mathfrak{m} \subseteq R^\times$. Also wäre $\mathfrak{m}' = R$. Dies kann aber nicht sein, da $\mathfrak{m}'$ maximal sein sollte.

Bemerkung Es gilt $(R \setminus \mathfrak{m} \subseteq R^\times) \ \Rightarrow \ (R \setminus \mathfrak{m} = R^\times)$, denn $\mathfrak{m} \cap R^\times = \varnothing$.

Betrachte nun „(i)⇒(ii)“. Sei dazu $x \in R \setminus \mathfrak{m}$. Es ist $(x) = R$ und somit gilt $x \in R^\times$, denn wäre $(x) \neq R$, so wäre (x) in einem Maximalideal enthalten, aber $(x) \not\subseteq \mathfrak{m}$ nach Voraussetzung.

Für den Schritt „(ii)⇒(iii)" benutzen wir das bereits gezeigte, denn wir wissen schon, dass $(R, \mathfrak{m})$ in diesem Fall ein lokaler Ring ist. Insbesondere ist $\mathfrak{m}$ maximal. Damit gilt für alle $x \in \mathfrak{m}$, dass $1+x \notin \mathfrak{m}$ ist, denn $1 \notin \mathfrak{m}$.

Zum Abschluss betrachte „(iii)⇒(ii)": Sei $x \in R \setminus \mathfrak{m}$, dann ist $\mathfrak{m} \subsetneq (x, \mathfrak{m})$ also muss $(x, \mathfrak{m}) = R$ gelten, denn $\mathfrak{m}$ ist nach Voraussetzung maximal. Damit gibt es aber ein $m \in \mathfrak{m}$ und ein $a \in R$ mit

$$1 \;=\; m + a \cdot x \;\in\; R^\times \quad \Rightarrow \quad 1 - m = ax \;\in R^\times$$

Damit ist jedes $x \in R \setminus \mathfrak{m}$ eine Einheit. □

Satz 3.9 *(Universelle Eigenschaft der Lokalisierung)*
Sei R ein Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System. Dann ist

$$\tau : R \;\to\; S^{-}R$$

ein Ringhomomorphismus mit $\tau(S) \subseteq (S^{-1}R)^\times$. Für jeden weiteren Homomorphismus von Ringen $\varphi : R \to R'$ mit $\varphi(S) \subseteq (R')^\times$ gilt: Es gibt einen eindeutig bestimmten Ringhomomorphismus $\psi : S^{-1}R \to R'$ mit $\psi \circ \tau = \varphi$. Also so, dass dasoffensichtliche Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} R \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\tau"'] & & R' \\ & S^{-1}R \arrow[ur, dashed, "\exists!\,\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit. Nimm also an,wir hätten bereits einen Ringhomomorphismus ψ mit den gewünschten Eigenschaften gefunden, dann muss für $x \in R$ und $s \in S$ gelten

$$\begin{aligned} \psi\Big(\frac{x}{s}\Big) \;&=\; \psi\Big(\frac{x}{1} \cdot \frac{1}{s}\Big) \;=\; \psi\Big(\Big(\frac{s}{1}\Big)^{-1}\Big) \cdot \psi\Big(\frac{x}{1}\Big) \\ &=\; \psi\big(\tau(s)^{-1}\big) \cdot \psi\big(\tau(x)\big) \;=\; \varphi(s)^{-1} \cdot \varphi(x) \end{aligned}$$

Und damit ist ψ bereits eindeutig bestimmt. Wir wollen nun zeigen, dass so ein ψ tatsächlich existirert. Dazu benutzen wir, was wir oben schon gelernt haben und definieren

$$\psi\Big(\frac{x}{s}\Big) \;:=\; \varphi(s)^{-1} \cdot \varphi(x) \qquad \text{für } s \in S \text{ und } x \in R$$

Diese Definition ist sinnvoll, denn wegen $\varphi(S) \subseteq (R')^\times$ existiert ein multiplikatives Inverses zu $\varphi(s)$. Wir müssen aber noch die Wohldefiniertheit, da wir hier mit Äquivalenzklassen hantieren,und die Ringhomomorphismuseigenschaft von ψ zeigen. Seien also $\frac{x}{s} = \frac{x'}{s'}$ gegeben. Angenommen $\varphi(s)^{-1}\varphi(x) \neq \varphi(s')^{-1}\varphi(x')$, dann folgte $\frac{x}{s} \neq \frac{x'}{s'}$, da φ ein Ringhomomorphismus ist. Wohldefiniertheit ist also klar. Die Ringhomomorphieeigenschaft „erbt" ψ von φ, denn

$$\psi\Big(\frac{1}{1}\Big) \;=\; \varphi(1)^{-1} \cdot \varphi(1) \;=\; 1 \qquad \text{und} \qquad \psi\Big(\frac{0}{1}\Big) \;=\; \varphi(1)^{-1} \cdot \varphi(0) \;=\; 0$$

□

Lemma 3.10 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Dann gilt*

$$\kappa(\mathfrak{p}) \;=\; {}^{R_\mathfrak{p}}\!/_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}} \;\cong\; \operatorname{Frac} {}^{R}\!/_{\mathfrak{p}}$$

Beweis. Wir wollen Abbildungen

$$R_{\mathfrak{p}} /_{\mathfrak{p}} R_{\mathfrak{p}} \quad \rightleftarrows \quad \operatorname{Frac} R/\mathfrak{p}$$

konstruieren. Dazu betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\sigma\circ\rho"] \arrow[ddr, "\rho"'] & R_{\mathfrak p} \arrow[r, two heads, "\pi"] \arrow[d, "\gamma"] & R_{\mathfrak p}/\mathfrak p R_{\mathfrak p} \arrow[dl, shift left, "\zeta"] \\
& \operatorname{Frac} R/\mathfrak p \arrow[ur, shift left, "\xi"] & \\
& R/\mathfrak p \arrow[u, hook, "\sigma"] \arrow[uur, hook, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Die Abbildungen ρ, σ, π, τ und $\sigma \circ \rho$ sind die kanonischen Abbildungen. Die anderen Abbildungen werden wir aus den universellen Eigenschaften des Faktorrings und der Lokalisierung herleiten:

- Nach dem Homomorphiesatz faktorisiert $\pi \circ \tau$ via ρ über $R/\mathfrak{p}$, denn $\mathfrak{p} \subseteq \operatorname{Ker}(\pi \circ \tau)$. Damit existiert ein eindeutig bestimmter Ringhomomorphismus

  $$\psi : R/\mathfrak{p} \;\to\; R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

  Weiter ist ψ wegen

  $$\operatorname{Ker}(\pi \circ \tau) \;=\; \left\{ x \in R \,\middle|\, \pi\big(\tau(x)\big) = \overline{0} = 0 + \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \right\} \;=\; \left\{ \frac{p}{1} \,\middle|\, p \in \mathfrak{p} \right\} \;=\; \mathfrak{p}$$

  sogar injektiv.

- Gilt $\psi((R/\mathfrak{p}) \setminus \{0\}) \subseteq R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$, dann faktorisiert wegen der universellen Eigenschaft der Lokalisierung ψ via σ über $\operatorname{Frac} R/\mathfrak{p}$. Damit erhalten wir eine eindeutig bestimmte Abbildung

  $$\xi : \operatorname{Frac} R/\mathfrak{p} \;\to\; R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

  mit $\psi = \xi \circ \sigma$. Es genügt zu zeigen, dass für alle $x \in (R/\mathfrak{p}) \setminus \{0\}$ gilt

  $$\psi(x) \;\in\; \left(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\right)^{\times} \;=\; \left(R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}\right) \setminus \{0\}$$

  Denn, da $R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist, sind alle von Null verschiedenen Elemente Einheiten. Dies ist aber klar, denn ψ ist injektiv.

- Es ist leicht zu sehen, dass ξ ein Isomorphismus ist: Die Abbildung ist injektiv, da Quelle und Ziel Körper sind. Die Abbildung ist surjektiv, weil

  $$\operatorname{Im}(\xi) \;=\; R_{\mathfrak{p}}/\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$$

- Damit haben wir bereits einen Isomorphismus wie gesucht gefunden. Wir können die Umkehrabbildung Abbildung aber noch genauer angeben, denn ist $x \in R$ mit $0 = \pi \circ \tau(x) = \pi(\frac{x}{1})$, so ist $\frac{x}{1} \in \operatorname{Ker} \pi = \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}$ und damit gilt nach der Behauptung im Beweis zum Satz 3.4 $x \in \mathfrak{p}$. Damit können wir eine eindeutige Umkehrabbildung aus dem eingangs aufgezeigten großen Diagramm konstruieren:

– Betrachte das obere linke Dreieck. Die Abbildung $\sigma \circ \rho$ faktorisiert über τ, denn für alle $x \in R \setminus \mathfrak{p}$ ist $\sigma \circ \rho(x) \neq \overline{0}$ und damit ist

$$\sigma\big(\rho(x)\big) \;\in\; \Big(\operatorname{Frac} {}^{R}\!/\!_{\mathfrak{p}}\Big)^{\times}$$

Wir erhalten also eine Abbildung $\gamma : R_{\mathfrak{p}} \to R/\,\mathfrak{p}$ aus der universellen Abbildungseigenschaft der Lokalisierung.

– Es ist

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}(\gamma) &= \Big\{ \frac{x}{s} \in R_{\mathfrak{p}} \,\Big|\, \gamma\Big(\frac{x}{s}\Big) \;=\; \overline{0} \Big\} \\ &= \Big\{ \frac{x}{s} \,\Big|\, x \in R \text{ und } s \in R \setminus \mathfrak{p} \text{ und } \sigma \circ \rho(x) \;=\; \overline{0} \Big\} \\ &= \Big\{ \frac{x}{s} \,\Big|\, x \in \mathfrak{p} \text{ und } s \notin \mathfrak{p} \Big\} \;=\; \mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir aus der universellen Eigenschaft des Faktorrings eine Abbildung

$$\zeta : {}^{R_{\mathfrak{p}}}\!/\!_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} \;\to\; \operatorname{Frac} {}^{R}\!/\!_{\mathfrak{p}}$$

Es gilt $\zeta \circ \xi \,=\, id$ und $\xi \circ \zeta \,=\, id$, denn beide Abbildungen sind eindeutig durch universelle Eigenschaften bestimmt, so das alle Teildiagramme kommutierten. Damit kommutiert auch das gesamte Diagramm und die Abbildungen sind eindeutig bestimmt.

- Es gelten

$$\begin{aligned} \xi\Big(\frac{\overline{x}}{1}\Big) &= \overline{\Big(\frac{x}{1}\Big)} \;\in {}^{R_{\mathfrak{p}}}\!/\!_{\mathfrak{p}\,R_{\mathfrak{p}}} && \text{für } \overline{x} \in {}^{R}\!/\!_{\mathfrak{p}} \\ \text{und} \quad \zeta\Big(\overline{\Big(\frac{x}{1}\Big)}\Big) &= \frac{\overline{x}}{1} && \text{für } \overline{\Big(\frac{x}{1}\Big)} \in {}^{R_{\mathfrak{p}}}\!/\!_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} \end{aligned}$$

□

Beispiel 15 *(Besondere Restklassenkörper)*

- *Betrachte das Primideal* (0) *in* $\mathbb{Z}$, *dann gilt*

$$\kappa(0) \;=\; {}^{\mathbb{Z}_{(0)}}\!/\!_{(0)\mathbb{Z}_{(0)}} \;=\; {}^{\mathbb{Z}\setminus(0)}\!/\!_{(0)} \;=\; \operatorname{Frac} {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{(0)} \;=\; \mathbb{Q}$$

Sei p *eine Primzahl, dann gilt*

$$\kappa(p) \;=\; {}^{\mathbb{Z}_{(p)}}\!/\!_{(p)\mathbb{Z}_{(p)}} \;=\; {}^{\mathbb{Z}\setminus(p)}\!/\!_{(p)} \;=\; \operatorname{Frac} {}^{\mathbb{Z}}\!/\!_{(p)} \;=\; \mathbb{F}_p$$

- *Sei* K *ein Körper und* $R = K[T_1, \ldots, T_n]$ *der Polynomring über* K *in* n*-Variablen. Offenbar ist* $\mathfrak{m} := (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$ *für* $x_i \in K$ *ein maximales Ideal dieses Polynomrings. Betrachte die Abbildung*

$$\begin{aligned} \alpha : K[T_1, \ldots, T_n] &\;\to\; K \\ T_i &\;\mapsto\; x_i \end{aligned}$$

dann ist $\mathfrak{m} \subseteq \operatorname{Ker}(\alpha)$*, denn offensichtlich ist* $T_i - x_i \in \operatorname{Ker}(\alpha)$ *für alle* i*. Andererseits gilt auch* $f \in \mathfrak{m}$ *für alle* $f \in \operatorname{Ker}(\alpha)$*. Schreibe*

$$f \;=\; \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot (T_i - x_i) + c \qquad \text{mit } g_i \in R \text{ und } c \in K$$

Wende nun α *auf* f *an, dann gilt*

$$0 \;=\; \alpha(f) \;=\; f(x_1, \ldots, x_n) \;=\; \sum_{i=1}^{n} g_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot (x_i - x_i) + c \;=\; c$$

also $c = 0$ *und somit* $f \in \mathfrak{m}$*. Da also* $\mathfrak{m} = \operatorname{Ker}(\alpha)$ *gilt, ist die Abbildung* $R/\mathfrak{m} \to K$*, die wir aus der universellen Eigenschaft des Faktorrings erhalten, sogar injektiv. Diese Abbildung ist offensichtlich aber auch surjektiv und damit gilt:*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[rr, two heads, "\alpha"] \arrow[dr] & & K \\
& R/\mathfrak{m} \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

daher ist $\kappa(\mathfrak{m}) = R/\mathfrak{m} = K$*.*

- *Sei* K *ein Körper und* $R = K[T]$ *der Polynomring in einer Variablen. Sei weiter* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ *ein Primideal. Da* $K[T]$ *ein Hauptidealring ist, können nur die folgenden beiden Fälle eintreten:*

Fall 1 $\mathfrak{p} = (0)$*. In diesem Fall ist*

$$\kappa(0) \;=\; \operatorname{Frac} K[T]/(0) \;=\; \operatorname{Frac} K[T] \;=\; K(T)$$

Fall 2 $\mathfrak{p} = (f)$ *für ein irreduzibles Polynom* $f \in K[T]$*. In diesem Fall ist* $\mathfrak{p}$ *ein Maximalideal und wir sehen sofort*

$$\kappa(f) \;=\; K[T]/(f)$$

ist ein Erweiterungskörper von K *mit Grad* $\deg(f)$*.*

Insbesondere *tritt jede (endliche) primitive Körpererweiterung von* K *als Restklassenkörper von* $K[T]$ *auf.*

4 Radikale

Definition 4.1 *(Jacobson Raikal)*
Sei R ein Ring. dann heißt

$$\operatorname{jac}(R) \;:=\; j(R) \;:=\; \bigcap_{\mathfrak{m}\,\in\,\operatorname{Spm} R} \mathfrak{m}$$

das Jacobson-Radikal von R.

Anmerkung Da Schnitte von Idealen auf natürliche Weise wieder Ideale sind, ist auch das Jacobson-Radikal ein Ideal von R.

Beispiel 16 *(Jacobson Ideal)*

- *Das Jacobson-Radikal von $\mathbb{Z}$ ist* $\operatorname{jac}(\mathbb{Z}) = (0)$
- *Sei K ein Körper, dann ist*

$$\operatorname{jac}(K[X]) \;=\; \left\{ f \in K[X] \,\middle|\, \forall\, g \in K[X] \text{ irred. } : \;\; g \mid f \right\}$$

Falls K unendlich *Sei $f \in \operatorname{jac}(K[X])$, dann gilt für alle $\alpha \in K$, dass f von $X - \alpha$ geteilt wird. Also hat f unendlich viele Nullstellen und es muss $f = 0$ gelten.*

Falls K endlich *In diesem Fall gibt es für alle $n \in \mathbb{N}$ ein irreduzibles Polynom $g \in K[X]$ mit $\deg(g) = n$, denn nach Voraussetzung ist K endich, etwa $K = \mathbb{F}_q$. Der Grad der Körpererweiterung $\mathbb{F}_{q^n} \,/\, \mathbb{F}_q$ ist n und für alle $\alpha \in \mathbb{F}_{q^n}$ ist $\mathbb{F}_{q^n} = \mathbb{F}_q(\alpha)$. Und das Minimalpolynom $\operatorname{mipo}_{\alpha,\mathbb{F}_q}$ ist irreduzibel vom Grad n.*
Damit folgt aus Gradgründen für $f \in \operatorname{jac}(K[X])$, dass $f = 0$ ist.

In beiden Fällen ist also $\operatorname{jac}(K[X]) = (0)$.

- *Sei $(R, \mathfrak{m})$ ein lokaler Ring, dann ist* $\operatorname{jac}(R) = \mathfrak{m}$

Lemma 4.2 *Sei R ein Ring, dann ist*

$$\operatorname{jac}(R) \;=\; \left\{ x \in R \,\middle|\, \forall\, y \in R \,:\, 1 - xy \in R^\times \right\}$$

Beweis. Wir benutzen eine allgemeine Tatsache über Ringe, und zwar gilt

$$R^\times \;=\; R \setminus \bigcup_{\mathfrak{m}\,\in\,\operatorname{Spm} R} \mathfrak{m} \qquad\qquad (*)$$

Sei zunächst $x \in \operatorname{jac}(R)$, dann folgt aus der Idealeigenschaft, dass auch $xy \in \operatorname{jac}(R)$ ist für alle $y \in R$. Also ist $1 - xy$ in keinem Maximalideal enthalten, denn sonst wären x und y Einheiten. Mit $(*)$ ist dann aber $1 - xy$ eine Einheit von R. Für die andere Inklusion sei $x \notin \operatorname{jac}(R)$, dann gibt es nach Definition des Jacobson-Radikals ein Maximalideal $\mathfrak{m}$ von R mit $x \notin \mathfrak{m}$ und somit ist $\mathfrak{m} \subsetneq (\mathfrak{m}, x)$. Da $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal ist, ist $(\mathfrak{m}, x)$ dann bereits ganz R und es gibt ein $z \in \mathfrak{m}$ sowie ein $y \in R$ mit $1 = z + xy$. Stellen wir diese Gleichung nach z um erhalten wir $1 - xy = z$ und $z \notin R^\times$ nach $(*)$. □

Definition 4.3 *(Nil-Radikal)*
Sei R ein Ring, dann heißt

$$\operatorname{rad}(R) \ := \ \operatorname{nil}(R) \ := \ \bigcap_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R} \mathfrak{p}$$

das (Nil-)Radikal von R

Anmerkung Genau wie das Jacobson-Radikal ist auch das Nil-Radikal ein Ideal von R.

Definition 4.4 *(Nilpotent)*
Sei R ein Ring. Ein Element $x \in R$ heißt nilpotent, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$ gibt.

Beispiel 17 *Betrachte $x = 2$ im Ring $\mathbb{Z}/(4)$. Es gilt $2^2 = 4 \equiv 0$ mod (4) und somit ist x in diesem Ring nilpotent.*

Bemerkung 4.5 *Sei R ein Ring. Ist R nicht der Nullring, so gilt*

$$(0) \ \subseteq \ \operatorname{nil}(R) \ \subseteq \ \operatorname{jac}(R) \ \subsetneq \ R$$

Der folgende Satz erklärt den Namen Nil-Radikal:

Satz 4.6 *Sei R ein Ring, dann gilt*

$$\operatorname{nil}(R) \quad = \quad \{\, x \in R \,|\, x \text{ ist nilpotent} \,\}$$

Beweis. Sei $x \in R$ nilpotent, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n = 0$. Da die Null in jedem Primideal enthalten ist, gilt $x^n = 0 \in \mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$. Wegen der Primidealeigenschaft gilt dann aber auch sofort $x \in \mathfrak{p}$ für alle Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$.
Sei nun $x \in R$ <u>nicht</u> nilpotent. Dann ist

$$0 \ \notin \ S \ := \ \{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$$

und es gilt $0 \neq S^{-1}R = R_x$ und R_x besitzt ein Primideal (sogar ein Maximalideal). Wir wissen bereits mit Satz 3.4, dass die natürliche Abbildung $\tau : R \to R_x$ eine inklusionserhaltende Bijektion

$$\operatorname{Spec} R_x \ \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \ \{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \,|\, \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \,\}$$

liefert. Damit gibt es also ein Primideal in R, welches mit S leeren Schnitt hat, und somit gibt es ein Primideal, das insbesondere x nicht enthält, also ist $x \notin \operatorname{nil}(R)$. □

Definition 4.7 *(reduziert)*
Ein Ring R heißt reduziert, wenn $\operatorname{nil}(R) = (0)$ ist. Mit anderen Worten, wenn 0 das einzige nilpotente Element von R ist.

Beispiel 18 *(Reduzierte Ringe)*

- *Jeder Integritätsring ist reduziert, denn (0) ist in Integritätsringen ein Primideal.*

- *Sei $n \in \mathbb{N}$, dann ist der Restklassenring $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann reduziert, wenn n quadratfrei ist, das heißt wenn n von keiner Quadratzahl geteilt wird.*
  Konkret *Der Ring $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ ist kein Integritätsring, denn es gilt $2 \cdot 3 = 6 \equiv 0$. Dennoch ist der Ring reduziert, denn 6 ist quadratfrei.*
  Hingegen der Ring $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ ist weder ein Integritätsringbereich, noch ist 12 quadratfrei (denn es gilt $2^2 = 4 \mid 12$) und tatsächlich gilt $12 \mid 36 = 6^2$ somit ist 6 nilpotent.

Bemerkung 4.8 *Sei R ein Ring, dann induziert die kanonische Projektion*

$$\pi : R \twoheadrightarrow R/\mathrm{nil}(R)$$

einen Homöomorphismus, das ist eine bijektive und in beide Richtungen stetige Abbildung topologischer Räume, auf den Spektren in die andere Richtung:

$$^a\pi : \operatorname{Spec} R/\mathrm{nil}(R) \rightarrow \operatorname{Spec} R$$

Beweis. Wir wissen bereits, dass die assoziierte Abbildung $^a\pi$ injektiv und stetig ist und dass sie den topologischen Raum $\operatorname{Spec} R/\mathrm{nil}(R)$ mit einer abgeschlossenen Teilmenge von $\operatorname{Spec} R$ identifiziert. Genauer wissen wir bereits

$$\operatorname{Spec} R/\mathrm{nil}(R) \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \,\middle|\, \mathrm{nil}(R) \subseteq \mathfrak{p} \right\} \overset{(4.3)}{=} \operatorname{Spec} R$$

□

Bemerkung 4.9 *Sei R ein Ring, dann ist der Faktorring $R/\mathrm{nil}(R)$ reduziert.*

Beweis. Sei $x \in R$ dessen Bild $\overline{x} \in R/\mathrm{nil}(R)$ im Faktorring nilpotent sei, dann ist $\overline{x}^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$ somit ist $x^n \in \mathrm{nil}(R)$. Da das Nil-Radikal Schnitt aller Primideale ist, liegt x^n somit in allen Primidealen und daher auch x. Damit ist $x \in \mathrm{rad}(R)$ und es gilt $\overline{x} = \overline{0}$. □

Definition 4.10 *(Radikal eines Ideals)*
Sei R ein Ring, und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal. Die Verschwindungsmenge eines Ideals hatten wir definiert als

$$V(\mathfrak{a}) = \left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \right\} \subseteq \operatorname{Spec} R$$

Wir nennen den Schnitt aller Primideale aus dieser Menge

$$\sqrt{\mathfrak{a}} := \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}$$

das Radikal von $\mathfrak{a}$.
Konvention *$\sqrt{(1)} := R$, da es kein Primideal gibt, das Einheiten enthält.*

Bemerkung 4.11 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal, dann ist offensichtlich $\sqrt{\mathfrak{a}}$ ebenfalls ein Ideal von R. Da (0) in allen Pridealen enthalten ist, gilt weiter $\sqrt{(0)} = \mathrm{nil}(R)$.*

Lemma 4.12 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal, dann gilt*

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \;=\; \left\{ x \in R \,\middle|\, \exists n \in \mathbb{N} : x^n \in \mathfrak{a} \right\}$$

Beweis. Betrachte die natürliche Projektion

$$R \ni x \mapsto \overline{x} \in {}^{R}\!/\!_{\mathfrak{a}}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} x \in \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \;&\Leftrightarrow\; \overline{x} \in \bigcap_{\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R(\mathfrak{a}} \mathfrak{q} \;=\; \operatorname{nil} {}^{R}\!/\!_{\mathfrak{a}} \\ &\Leftrightarrow\; \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } \overline{x}^n \;=\; \overline{0} \\ &\Leftrightarrow\; \text{Es gibt ein } n \in \mathbb{N} \text{ mit } x^n \;\in\; \mathfrak{a} \\ &\Leftrightarrow\; x \in \sqrt{\mathfrak{a}} \end{aligned}$$

□

Lemma 4.13 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal. Seien weiter $\mathfrak{p}_1, \dots, \mathfrak{p}_n \in \operatorname{Spec} R$ endlich viele Primideale, dann gelten*

$$\mathfrak{a} \;\subseteq\; \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \;\Leftrightarrow\; \exists j \in \{1, \dots, n\} : a \subseteq \mathfrak{p}_j \tag{4.1}$$

$$\mathfrak{a} \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \;\Rightarrow\; \exists j \in \{1, \dots, n\} : a = \mathfrak{p}_j \tag{4.2}$$

***Beachte**, dass Gleichheit auf der rechten Seite nicht notwendig Gleichheit auf der linken induziert.*

Beweis. Die Behauptungsrichtung „$\Leftarrow$“ ist trivial. Die andere Implikation zeigen wir per Induktion

Anfang $n = 1$: In diesem Fall ist die Behauptung klar, denn

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1 \;\Rightarrow\; \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_1$$

Schritt $n > 1$: Angenommen es gäbe kein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_j$ aber $\mathfrak{a}$ wäre in der Vereinigung der Primideale enthalten. Wäre

$$\mathfrak{a} \subseteq \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{p}_i \qquad \text{für alle } j \in \{1, \dots, n\}$$

dann gäbe es für alle $j = 1, \dots, n$ ein $i \neq j$ mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}_i$ nach Induktionsvoraussetzung. Dies kann aber nach unserer Annahme nicht sein. Also gilt für alle $j = 1, \dots, n$

$$\mathfrak{a} \;\not\subseteq\; \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{p}_i$$

Wähle nun für alle $j = 1, \dots, n$ ein

$$a_j \quad \in \quad \mathfrak{a} \setminus \bigcup_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \mathfrak{p}_i$$

und setze

$$b_i \quad := \quad \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_j \qquad \text{für alle } i = 1, \dots, n$$

nach dieser Konstruktion gilt also $a_j \in \mathfrak{p}_j$, $b_j \notin \mathfrak{p}_j$ sowie $b_j \in \mathfrak{a}$ für alle $j = 1, \dots, n$ und insbesondere ist

$$b_i \quad \in \quad \mathfrak{a} \cap \Big(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \mathfrak{p}_j \Big)$$

Dann ist aber

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \quad \in \quad \mathfrak{a} \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{p}_i \quad = \quad \varnothing$$

was offensichtlich einen Widerspruch liefert.

□

Lemma 4.14 *Sei R ein Ring und seien $\mathfrak{a}_1, \dots, \mathfrak{a}_n \lhd R$ Ideale sowie $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal, dann gilt*

$$\bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{a} \quad \subseteq \quad \mathfrak{p} \quad \Rightarrow \quad \exists\, j \in \{1, \dots, n\} \,:\, a_j \subseteq \mathfrak{p}$$

Hierbei impliziert Gleichheit auf der linken Seite auch Gleichheit auf der rechten.

Beweis. Angenommen das Lemma wäre falsch, also nimm an es wäre $\bigcap \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ aber keines der $\mathfrak{a}_j$ läge bereits ganz in $\mathfrak{p}$. Dann wähle für alle $j = 1, \dots, n$ ein $a_j \in \mathfrak{a}_j \setminus \mathfrak{p}$, dann ist

$$\prod_{i=1}^{n} a_j \quad \in \quad \Big(\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{a}_i \Big) \setminus \mathfrak{p} \quad = \quad \varnothing$$

Auch hier erhalten wir einen offensichtlichen Widerspruch. □

5 Moduln

Definition 5.1 *(R-Modul)*
Sei R ein Ring. Ein R-Modul ist eine Menge M zusammen mit Verknüpfungen

$$+ : M \times M \to M \qquad \text{und} \qquad \bullet : R \times M \to M$$

so dass gelten

- $(M, +)$ *ist eine abelsche Gruppe*
- $x \cdot (y \bullet m) = (x \cdot y) \bullet m$ *für alle* $m \in M$ *und alle* $x, y \in R$
- $(x + y) \bullet m = x \bullet m + y \bullet m$ *und*
  $x \bullet (m + n) = x \bullet m + x \bullet n$ *für alle* $x, y \in R$ *und alle* $m, n \in M$
- $1_R \bullet m = m$ *für alle* $m \in M$

Da meistens klar ist, in welchem Kontext wir die Multiplikation ausführen misbrauchen wir die Notation etwas und schreiben auch für die „Skalarmultiplikation ($\bullet$)“ wieder $\cdot$ oder gar kein Zeichen.

Beispiel 19 *Ist $R = K$ ein Körper, so sind alle K-Vektorräume K-Moduln. Die Definition von Moduln verallgemeinert also die Definition von Vektorräumen.*
Ist R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal, dann ist $\mathfrak{a}$ mit der normalen Multiplikation auf R ein Modul. Die Definition von Moduln verallgemeinert also in gewissem Sinne auch die Definition von Idealen.

Definition 5.2 *(R-Modul-Homomorphismus)*
Sei R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Eine Abbildung $f : M \to N$ heißt R-Modul-Homomorphismus (oder R-lineare Abbildung), wenn für alle $x \in R$ und alle $m, m' \in M$ gelten

$$f(xm + m') = xf(m) + f(m')$$

Wir bezeichnen die Menge aller R-Modul-Homomorphismen von M nach N mit $\mathrm{Hom}_R(M, N)$.

Beispiel 20 *(Abelsche Gruppen = $\mathbb{Z}$-Moduln)*
Ist M ein $\mathbb{Z}$-Modul, so ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe nach Definition.
Ist $(M, +)$ eine abelsche Gruppe, so wird M zu einem $\mathbb{Z}$-Modul via

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{Z} \times M &\to M \\ (z, m) &\mapsto \begin{cases} \underbrace{m + \ldots + m}_{|z|-mal} & \text{falls } z \geq 0 \\ -(\overbrace{m + \ldots + m}) & \text{falls } z < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Unter diesen Sichtweisen entsprechen sich $\mathbb{Z}$-Modul-Homomorphismen und Homomorphismen abelscher Gruppen.

Beispiel 21 *(Vektorraum als $K[X]$-Modul)*
Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$ und ϕ ein K-linearer Endomorphismus auf V, dann wird V zu einem $K[X]$-Modul via

$$\begin{array}{rcl} K[X] \times V & \to & V \\ (f, v) & \mapsto & f\big(\phi(v)\big) \end{array}$$

mit

$$f\big(\phi(v)\big) \;:=\; \sum_{i=0}^{n} a_i\ \varphi^i(v) \qquad \text{für } f \;=\; \sum_{i=0}^{n} a_i\, X^i$$

dabei bezeichne ϕ^i die i-fache Hintereinanderausführung von ϕ.

Definition 5.3 *(endlich erzeugter Modul, Basis)*
Sei R ein Ring und M ein R-Modul, dann heißt M endlich erzeugt, wenn es endlich viele Elemente $m_1, \ldots, m_n \in M$ so gibt, dass für alle $x \in M$ Elemente $r_1, \ldots, r_n \in R$ existieren, so dass

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n} r_i\, m_i$$

wir schreiben dann auch

$$Rm_1 + \ldots + Rm_n \;=\; M$$

Ein Erzeugenden System heißt Basis, wenn für $r_1, \ldots, r_n \in R$ stets

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\, m_i \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad r_1 \;=\; \ldots \;=\; r_n \;=\; 0$$

gilt.

/!\ Achtung nicht jeder endlich erzeugte Modul hat eine Basis!

Beispiel 22 *(Basen von Moduln)*

- *Ist K ein Körper und M ein K-Vektorraum, dann hat M eine Basis im Vektorraum Sinn, und diese ist auch eine Basis im Modul-Sinn.*
- *Der Modul $\mathbb{Z}$ also Modul über $\mathbb{Z}$ hat die Basis $\{1\}$.*
- *Der Restklassenring $M := \mathbb{Z}/d\,\mathbb{Z}$ mit $d \notin \{0, 1\}$ besitzt aufgefasst als Modul über $\mathbb{Z}$ keine Basis, denn in M gilt $0 \cdot m = d \cdot m$ für alle $m \in M$ und somit kann kein m Element einer Basis sein.*
  Dennoch wird jedes Element in M vom Erzeugendensystem $\{1\}$ erzeugt.
- *Der Körper $\mathbb{Q}$ hat aufgefasst als Modul über $\mathbb{Z}$ keine Basis, denn*
  ***Fall 1** Basis hat nur ein Element $m \in \mathbb{Q}$, so ist*

  $$\big\{\, z \cdot m \,\big|\, z \in \mathbb{Z} \,\big\} \;\subsetneq\; \mathbb{Q}$$

  Dieser Fall tritt also nicht auf.
  ***Fall 2** Basis hat mehr als ein Element. Sind $m, m' \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ mit $m \neq m'$, so gibt es Elemente $z, z' \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ mit $zm + z'm' = 0$. Also kann es auch keine Basis mit mehr als einem Element geben.*

Definition 5.4 *(R-Algebra)*
Sei R ein Ring. Eine (assoziative, kommutative) R-Algebra (mit Eins) ist ein Ring A zusammen mit einer Multiplikation

$$\bullet : R \times A \;\; \to \;\; A$$

die $(A, +)$ zu einem R-Modul macht und die verträglich mit der internen Multiplikation $(\cdot)$ von A ist, das heißt, so dass für alle $\alpha \in R$ und alle $x, y \in A$ gilt

$$\alpha \bullet (x \cdot y) \;\; = \;\; (\alpha \bullet x) \cdot y \;\; = \;\; x \cdot (\alpha \bullet y)$$

Wie üblich benutzen wir keine Sondernotation für die äußere Multiplikation.

Definition 5.4' *(R-Algebra, alternative Sichtweise)*
Ist A eine R-Algebra, wie oben, so gibt es einen natürlichen Ringhomomorphismus

$$\varphi : \; R \ni \alpha \mapsto \alpha \cdot 1_A \in A$$

Ist $\varphi : R \to A$ ein Ringhomomorphismus, so wird durch φ via

$$\cdot : R \times A \ni (\alpha, x) \mapsto \varphi(\alpha) \cdot x \in A$$

A zu einer R-Algebra.

Es ist also das gleiche eine R-Algebra A oder einen Ringhomomorphismus $R \to A$ anzugeben.

Beispiel 23 *(Standartbeispiel für R-Algebren)*
Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R[X_1, \ldots, X_n]$ ein Ideal, dann ist der Faktorring

$$R[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{a}$$

eine R-Algebra.

Definition 5.5 *(R-Algebra-Homomorphismus)*
Seien R ein Ring und A, B zwei R-Algebren. Ein Ringhomomorphismus $f : A \to B$ heißt R-Algebren-Homomorphismus, falls f ein R-Modul-Homomorphismus ist. Bezüglich der alternativen Sichtweise ist es äquivalent zu fordern, dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] & & B \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Definition 5.6 *(Untermodul)*
Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Eine Teilmenge $N \subseteq M$ heißt Untermodul von M, falls gelten

- *$(N, +) \leq (M, +)$ ist eine Untergruppe.*
- *N ist bezüglich der äusseren Multiplikation abgeschlossen, dass heißt für alle $\alpha \in R$ und alle $n \in N$ gilt $\alpha \cdot n \in N$.*

Beispiel 24 *Sei R ein Ring.*

- *Sei $f : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus, dann sind* $\mathrm{Ker}(f) \subseteq M$ *und* $\mathrm{Im}(f) \subseteq N$ *Untermoduln.*
- *R aufgefasst als Modul über sich selbst ist ein R-Untermodul.*
- *Wir können die Ideale von R auch auf diese Weise betrachten, denn $\mathfrak{a} \subseteq R$ ist genau dann ein Ideal, wenn $\mathfrak{a}$ ein Untermodul von R ist.*

Definition und Bemerkung 5.7 *(Konstruktion von Untermoduln)*
Sei R ein Ring.

(1) *Sei M ein R-Modul und $X \subseteq M$ eine Teilmenge, dann ist*

$$< X >_R \quad := \quad \bigcap_{\substack{\text{Untermoduln} \\ X \subseteq N \subseteq M}} N \quad = \quad \left\{ \sum_{x \in X} \alpha_x \cdot x \,\middle|\, \alpha_x \in R \text{ und fast alle } \alpha_x = 0 \right\}$$

der kleinste Untermodul von M, der X enthält und heißt der von X erzeugte Untermodul von M.
Ein Modul M ist genau dann endlich erzeugt, wenn es eine Teilmenge $X \subseteq M$ mit $\sharp M < \infty$ und $< X >_R = M$ gibt.

(2) *Sind M, N zwei R-Moduln, so wird die Menge der R-Modul-Homomorphismen* $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ *zu einem R-Modul via*

$$\begin{aligned} (f+g): \ m &\ \mapsto \ f(m) + g(m) \\ (\alpha \cdot f): \ m &\ \mapsto \ \alpha\, f(m) \end{aligned}$$

für $m \in M$ und $\alpha \in R$.

(3) *Sei I eine Menge und seien für $i \in I$ R-Moduln M_i gegeben. Dann wird die direkte Summe (auch Koprodukt) der M_i*

$$\bigoplus_{i \in I} M_i \quad := \quad \left\{ (m_i)_{i \in I} \,\middle|\, m_i \in M_i \text{ und fast alle } M_i = 0 \right\}$$

zusammen mit der komponentenweisen Addition

$$(m_i)_{i \in I} + (n_i)_{i \in I} \quad := \quad (m_i + n_i)_{i \in I}$$

und komponentenweiser äußerer Multiplikation

$$\alpha \cdot (m_i)_{i \in I} \quad := \quad (\alpha \cdot m_i)_{i \in I}$$

zu einem R-Modul.

Beispiel 25 *(Endlich erzeugte Modul)*

- *Sei R ein Ring, dann ist $< 1 >_R = R$ aufgefasst als R-Moduln.*
- *Der $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Q}$ ist über $\mathbb{Z}$ nicht endlich erzeugt.*
- *Der Faktorring $\mathbb{Z}\,/d\,\mathbb{Z}$ ist durch $< \overline{1} >_R$ endlich erzeugt.*

Definition 5.8 *(Torsionselement, Torsionsmodul, Torsionsfrei)*
Sei R ein Ring und M ein R-Modul, damm heißt

- *$m \in M$ Torsionselement, wenn es ein $r \in R \setminus \{0\}$ mit $r \cdot m = 0_M$ gibt.*
- *M ein Torsionsmodul, wenn jedes Element von m ein Torsionselement ist.*
- *M ein Torsionsfrei, wenn 0_M das einzige Torsionselement von M ist.*

Satz 5.9 *Sei R ein Integritätsring und M ein endlich erzeugter torsionsfreier R-Modul, dann besitzt M eine Basis.*

Beweis. Seien $b_1, \ldots, b_n \in M$ ein minimales Erzeugendensystem, das heißt wenn wir ein Element entfernen ist es kein Erzeugendensystem mehr. Betrachte

$$\sum_{i=1}^{n} r_i\, b_i \quad = \quad 0_M \qquad \text{mit geeigneten } r_i \in R$$

Gäbe es $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit

$$-r_j\, b_j \quad = \quad \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} r_i\, b_i$$

so wäre das Erzeugendensystem nicht minimal, denn R ist Nullteilerfrei nach Voraussetzung. Damit muss aber $r_1 = \ldots = r_n = 0$ gelten. □

Bemerkung 5.10 *Sei I eine Menge und R ein Ring. Der R-Modul*

$$M \quad := \quad \bigoplus_{i \in I} R$$

besitzt eine Basis, nämlich $\{e_i | i \in I\}$ mit

$$e_i \quad := \quad (\delta_{ij})_{j \in I} \qquad \text{mit } \delta_{i,j} \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } i \neq j \\ 1 & \text{fallst } i = j \end{cases}$$

Denn wir können jedes $m \in M$ auf eindeutige Weise darstellen als

$$m \quad = \quad (m_i)_{i \in I} \quad = \quad \sum_{i \in I} m_i\, e_i$$

Ist andererseits M ein R-Modul mit Basis $\{b_i | i \in I\}$, dann ist der R-Modul-Homomorphismus

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i \in I} R \quad &\to \quad M \\ (x_i)_{i \in I} \quad &\mapsto \quad \sum_{i \in I} x_i\, b_i \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Der Übergang von M zur direkten Summe entspricht einer Basiswahl.

Definition 5.11 *(Freier Modul)*
Ein R-Modul M heißt frei, wenn es einen Isomorphismus $M \cong \bigoplus_{i \in I} R$ für eine Menge I existiert. Mit anderen Worten: M heißt frei, wenn M eine (nicht notwendig endliche) Basis besitzt.

Satz 5.12 *(Universelle Eigenschaft der direkten Summe in der Kategorie der Moduln)*
Sei R ein Ring und I eine Menge. Seien R-Moduln M_i zusammen mit R-Modul-Homomorphismen

$$\iota_i: \ M_i \ \ni \ m \ \ \mapsto \ \ m \cdot e_i \ \in \ \bigoplus_{i \in I} M_i$$

für $i \in I$ gegeben. Dann gibt es für jeden R-Modul T zusammen mit R-Modul-Homomorphismen $f_i : M_i \to T$ für $i \in I$ einen eindeutig bestimmten R-Modul-Homomorphismus

$$f : \bigoplus_{i \in I} M_i \quad \to \quad T$$

derart, dass für alle $i \in I$ gilt $f_i = f \circ \iota_i$ gilt, also so dass das offensichtliche Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M_i \arrow[rr, "\iota_i"] \arrow[dr, "f_i"'] & & \bigoplus_{i \in I} M_i \arrow[dl, dashed, "f"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeit von f. Nimm dazu an, es gäbe ein f wie bechrieben und sei $(x_i)_{i \in I} \in \bigoplus M_i$. Setze $I_x := \{i \in I | \, x_i \neq 0\}$. Da wir eine direkte Summe betrachten ist I_0 endlich und es gilt

$$(x_i)_{i \in I} \quad = \quad \sum_{i \in I_x} \iota_i(x_i)$$

Daher muss für f in jedem Fall

$$f\big((x_i)_{i \in I}\big) \quad = \quad \sum_{i \in I_x} f \circ \iota_i\big(x_i\big) \quad = \quad \sum_{i \in I_x} f_i(x_i)$$

gelten und dadurch ist f bereits eindeutig bestimmt.
Wir wollen nun die Existens zeigen. Wir definieren

$$f\big((x_i)_{i \in I}\big) \quad := \quad \sum_{i \in I_x} f_i(x_i)$$

Es ist offensichtlich, dass die Abbildung ein R-Modul-Homomorphismus ist, der die gewünschte Kommutativität liefert. □

Definition und Satz 5.13 *(Direktes Produkt)*
Seien R ein Ring und I eine Menge. Seien R-Moduln M_i für $i \in I$ gegeben. Wir nennen

$$\prod_{i \in I} M_i \quad := \quad \big\{ \, (x_i)_{i \in I} \, \big| \, x_i \in M_i \, \big\}$$

zusammen mit Projektionen

$$\pi_i : \prod_{i \in I} M_i \quad \twoheadrightarrow \quad M_i$$

für $i \in I$ das direkte Produkt der M_i.
Das direkte Produkt wird mit komponentenweiser Addition und komponentenweiser äußerer Multiplikation zu einem R-Modul.

Das direkte Produkt erfüllt die folgende universelle Eigenschaft: Für jeden R-Modul T zusammen mit R-Modul-Homomorphismen $f_i : T \to M_i$ für $i \in I$ gibt es einen eindeutig bestimmten R-Modul-Homomorphismus

$$f : T \;\to\; \prod_{i \in I} M_i$$

derart, dass $f_i = f \circ \pi$ gilt, also das offensichtliche Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
M_i & & \prod\limits_{i \in I} M_i \arrow[ll, two heads, "\pi_i"'] \\
& T \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, dashed, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Anmerkung Beachte, dass sich die Pfeilrichtungen der universellen Eigenschaften bei Produkt und Koprodukt (direkte Summe) genau vertauschen. Ist I eine endliche Indexmenge, so fallen die Konstruktionen von direkter Summe und direktem Produkt zusammen.

Folgerung 5.14 *Seien I, R, M_i, T, ι_i wie im Satz zuvor, dann gibt es eine Bijektion*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Hom}\Big(\bigoplus\limits_{i \in I} M_i,\ T\Big) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \prod\limits_{i \in I} \operatorname{Hom}(M_i, T) \\
g & \mapsto & (g \circ \iota_i)_{i \in I} \\
f & \leftarrow\!\shortmid & (f_i)_{i \in I}
\end{array}$$

Wobei f durch die universelle Eigenschaft und $f_i = f \circ \iota_i$ eideutig bestimmt ist.

Die obige Situation hat einen interessanten Spezialfall: Sei M ein freier R-Modul, dann haben wir nach Basiswahl

$$M \;\cong\; \bigoplus_{i \in I} R \;=:\; R^{(I)}$$

mit der Folgerung gilt für einen R-Modul T

$$\operatorname{Hom}_R(M, T) \;\cong\; \operatorname{Hom}_R(R^{(I)}, T) \;\cong\; \prod_{i \in I} \operatorname{Hom}_R(R, T) \;\cong\; \prod_{i \in I} T$$

Lokalisierung von Moduln

Wir wollen nun eine Analoge Konstruktion zur Lokalisierung von Ringen auf Moduln einführen. Da die meisten Beweise fast wörtlich die selben wie im Abschnitt I.3 „Lokale Ringe und Lokalisierung“ sind, werden hier viele Beweise nur angedeutet.

Zunächst benötigen wir wieder ein Setting nach dem wir lokalisieren können. Sei also R ein Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, sowie M ein R-Modul. Betrachte auf $M \times S$ die Relation

$$(x, s) \;\sim\; (y, t) \quad :\Leftrightarrow \quad \exists\, r \in S \,:\, r(tx - sy) \;=\; 0_M$$

Dies ist genau wie bei den Ringen eine Äquivalenzrelation. Setze nun

$$S^{-1}M \;=\; {}^{M \times S}\!/\!_{\sim}$$

Analog zu den Ringen schreiben wir $\frac{m}{s}$ für die Äquivalenzklasse von $(m,s) \in M \times S$. Mit den Verknüpfungen

$$\begin{aligned} + : S^{-1}M \times S^{-1}M &\to S^{-1}M \\ \left(\frac{x}{s}, \frac{y}{t}\right) &\mapsto fractx + syst \\ \text{und} \quad \cdot : S^{-1}R \times S^{-1}M &\to S^{-1}M \\ \left(\frac{r}{s}, \frac{m}{t}\right) &\mapsto fracamst \end{aligned}$$

deren Wohldefiniertheit wir hier auch nicht nachrechnen, da der Beweis wörtlich von den Ringen genommen werden kann, wird $S^{-1}M$ zu einem $S^{-1}R$-Modul. Vermöge der kanonischen Abbildung

$$\tau : R \ni r \mapsto \frac{r}{1} \in S^{-1}R$$

und der äußeren Multiplikation

$$\begin{aligned} \cdot : R \times S^{-1}M &\to S^{-1}M \\ \left(r, \frac{m}{t}\right) &\mapsto \tau(r) \cdot \frac{m}{t} \end{aligned}$$

wird $S^{-1}M$ auch zu einem R-Modul. Wie auch bei den Ringen erhalten wir einen kanonischen R-Modul-Homomorphismus

$$M \ni m \mapsto \frac{m}{1} \in S^{-1}M$$

Analog zu den Ringen hat es sich auch für Moduln bewährt die folgenden Schreibweisen einzuführen

- Ist $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal und $S := R \setminus \mathfrak{p}$, so schreibe $S^{-1}M =: M_{\mathfrak{p}}$
- Ist $f \in R$ ein Element und $S := \{1, f, f^2, \ldots\}$, so schreibe $S^{-1}M =: M_f$

Beispiel 26 *Betrachte den Ring $\mathbb{Z}$ mit dem Multiplikativen System $S := \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, dann ist $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$.*

- *Fasse $\mathbb{Z}$ als Modul über sich selbst auf, dann ist $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Q}$ als $\mathbb{Q}$-Moduln.*
- *Fasse $\mathbb{Q}$ als Modul über $\mathbb{Z}$ auf, dann ist $S^{-1}\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$, denn die Zuordnungen*

  $$\frac{x}{s} \mapsto \frac{1}{s} \cdot x \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{y}{s} = \right) \frac{x}{1} \mapsfrom x \left(= \frac{y}{s}\right)$$

  für x, y, s geeignet, sind zueinander invers.
- *Betrachte den Faktorring $M = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ für $m \neq 0$ als Modul über $\mathbb{Z}$. Es ist $S^{-1}M = \{0\}$, denn $m \in S$, da $m \neq 0$ ist. Damit*

  $$m(1 \cdot x - 0 \cdot s) = mx = 0_M \qquad \Rightarrow \qquad \frac{x}{s} = \frac{0}{1}$$

Bemerkung 5.15 *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, dann wird der Faktorring $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ ein $\mathbb{Z}_{(p)}$-Modul durch*

$$\frac{x}{s} \cdot \overline{y} := \overline{t \cdot xy} \qquad \text{mit } \overline{t} = \overline{s}^{-1}$$

für $\frac{x}{s} \in \mathbb{Z}_{(p)}$ und $x, y, s \in \mathbb{Z}$. Diese Zuordnung ist Wohldefiniert, denn da p nicht das s teilt ist $\operatorname{ggT}(s, p^m) = 1$ also ist $\overline{s}$ eine Einheit im Faktorring. Das heißt aber es gibt ein $t \in \mathbb{Z}$ mit $st \equiv 1$ (mod) p^m, also $\overline{t} = \overline{s}^{-1}$

Beispiel 27 *Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $S := \mathbb{Z} \setminus (p)$.*

- *Fasse Z als Modul über sich selbst auf, dann ist $S^{-1}\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_{(p)}$ als $\mathbb{Z}_{(p)}$-Moduln*
- *Fasse $\mathbb{Q}$ als Modul über $\mathbb{Z}$ auf, dann ist $S^{-1}\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ als $\mathbb{Z}_{(p)}$-Moduln*
- *Betrachte $M = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ als Modul über $\mathbb{Z}$. Nach der vorangegangenen Bemerkung ist $\mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ auch ein $\mathbb{Z}_{(p)}$-Modul und es gilt $S^{-1}M = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$ als $\mathbb{Z}_{(p)}$-Moduln*
- *Betrachte $M = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ für $m \neq 0$ als Modul über $\mathbb{Z}$. Wenn n nicht von p geteilt wird gilt $S^{-1}M = 0$*

Übungsaufgabe In der Situation des Beispiels gilt allgemein für

$$M := \mathbb{Z}/np^m\mathbb{Z} \qquad \text{mit } p \nmid n$$

dass

$$S^{-1}M = \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z}$$

Schreiben Sie Isomorphismen auf.

Quotienten nach Untermoduln

Auch diese Konstruktion kennen wir schon von Ringen und wollen Sie im Folgenden verallgemeinern. Seien R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul von M. Wir betrachten auf M die Äquivalenzrelation

$$x \sim y \quad :\Leftrightarrow \quad x - y \in N$$

Wir bezeichnen mit

$$x + N := \{ x + z \mid z \in N \}$$

die Äquivalenzklasse von x und die Menge aller Äquivalenzklassen bezeichnen wir wie üblich als Quotient M/N. Dieser wird durch die folgenden Verknüpfungen ein R-Modul:

$$\begin{array}{rrcl} + : & M/N \times M/N & \to & M/N \\ & \big((x+N),(y+N)\big) & \mapsto & (x+y)+N \\ \text{und} \quad \cdot : & R \times M/N & \to & M/N \\ & \big(\alpha,(x+N)\big) & \mapsto & (\alpha x)+N \end{array}$$

Die Wohldefiniertheit zeigt man genau analog zur Wohldefiniertheit der entsprechenden Verknüofungen bei Ringquotienten.

Satz 5.16 *(Homomorphiesatz für Moduln)*
Seien R ein Ring, M ein R-Modul und $N \subseteq M$ ein Untermodul von M. Die kanonische Projektion

$$\pi : M \ni x \mapsto x + N \in M/N$$

ist ein surjektiver R-Modul-Homomorphismus. Ist weiter $f : M \to T$ ein R-Modul-Homomorphismus mit $N \subseteq \operatorname{Ker} f$, dann gibt es einen eindeutig bestimmten R-Modul-Homomorphismus $\varphi : M/N \to T$ mit $f = \varphi \circ \pi$, also so dass das offensichtliche Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & T \\ & M/N \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Weiter ist $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\varphi)$ und φ ist genau dann injektiv, wenn $\operatorname{Ker}(f) = N$ ist.

Beweis. Da $(M, +)$ und $(N, +)$ abelsche Gruppen sind, folgt fast alles aus dem Homomorphiesatz für abelsche Gruppen. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass φ auch ein R-Modul-Homomorphismus ist, sich also auch mit der Multiplikation verträgt. Betrachte dazu

$$\varphi\big(\alpha(x+N)\big) = \varphi(\alpha x + N) \overset{N \subseteq \operatorname{Ker} f}{=} f(\alpha x) = \alpha f(x) = \alpha\,\varphi(x+N)$$

$\square$

Bemerkung 5.17 *Seien R ein Ring und M ein R-Modul. Für $I = \{1, \ldots, n\}$ schreiben wir*

$$R^{(I)} = \bigoplus_{i \in I} R = \bigoplus_{i \in 1}^{n} R = R^n$$

Es gilt: M ist genau dann endlich erzeugt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen Untermodul $N \subseteq R^n$ so gibt, dass

$$M \cong R^n/N$$

Beweis. Angenommen M ist endlich erzeugt, dann gibt es ein Erzeugendensystem $x_1, \ldots, x_n \in M$. Definiere

$$\begin{aligned} f : R^n &\to M \\ e_i &\mapsto x_i \end{aligned}$$

dann ist f ein R-Modul-Homomorphismus und $\operatorname{Im}(f) \subseteq M$ aber $\operatorname{Im}(f)$ enthält alle Erzeuger x_i von M, damit ist f surjektiv und nach Homomorphiesatz gilt

$$R^n/\operatorname{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} M$$

setze $N := \operatorname{Ker}(f)$.
Für die andere Implikation nimm an, es gäbe so einen Isomorphismus $g : R^n/N \xrightarrow{\sim} M$. Der Modul R^n/N wird über R von den Restklassen der e_i erzeugt und so wird M von den Bildern $g(e_i + N)$ erzeugt. $\square$

Beispiel 28 *Betrachte die $\mathbb{Z}$-Moduln $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{Z}$. Wir haben eine Bijektion*

$$[0,1)_{\mathbb{Q}} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Beispiel 29 *Sei K ein Körper und $R = K[X]$ der Polynimring über R in nur einer Varablen. Betrachte R_X, die Lokalisierung von R bezüglich der multiplikativen Menge $\{1, X, X^2, \ldots\}$. Es gilt*

$$K[X]_X \quad = \quad \left\{ \sum_{i=N}^{M} f_i\, X^i \,\middle|\, f_i \in K[X] \text{ und } N, M \in \mathbb{Z} \text{ mit } N \leq M \right\}$$

In Worten heißt das, wir dürfen Potenzen von X in den Nenner schreiben. Fasse nun $K[X]$ als Untermodul von $K[X]_X$ auf, dann erhalten wir eine Bijektion

$$K[X]_X/K[X] \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \sum_{i=N}^{-1} f_i\, X^i \,\middle|\, f_i \in R \text{ und } N \in \mathbb{Z}_{<0} \right\}$$

6 Das Lemma von Nakayama

Sei R ein Ring $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal sowie M ein R-Modul. Wir definieren

$$\mathfrak{a}\, M \quad := \quad \left\langle am \,\middle|\, a \in \mathfrak{a} \wedge m \in M \right\rangle_R \quad = \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i m_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \wedge a_i \in \mathfrak{a} \wedge m \in M \right\}$$

als den von $\mathfrak{a}$ und M erzeugten Untermodul.

Beispiel 30 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal. Fasse R als Modul über sich selbst auf, dann ist $\mathfrak{a}\, R \;=\; \mathfrak{a}$*

Lemma 6.1 *(Lemma von Nakayama)*
Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{jac}(R)$.
Ist $\mathfrak{a}\, M \;=\; M$ so folgt $M = 0$.

Beweis. Sei $x_1, \ldots, x_n \in M$ ein minimales Erzeugendensystem. Falls $M = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen, ansonsten ist $M \neq 0$ also $n \geq 1$. Nach Voraussetzung ist $x_n \in M = \mathfrak{a}\, M$. damit gibt es also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathfrak{a}$ mit

$$x_n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$$

Da $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{jac}(R)$ gilt, ist insbesondere $1 \notin \mathfrak{a}$ aber für alle $\alpha \in \mathfrak{a}$ ist $1 - \alpha \in R^{\times}$ damit folgt aus obiger Gleichung

$$(1 - \alpha_n) x_n \quad = \quad \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i x_i$$

und damit genügen also die ersten $n - 1$ Elemente um M zu erzeugen. Dies ist aber ein Widerspruch zur Minimalität des Erzeugendensystems. $\square$

Beispiel 31 *Die Voraussetzung „endlich erzeugt“ im Lemma von Nakayama kann nicht einfach ausgelassen werden. Betrachte dazu*

- $\mathbb{Q}$ *als* $\mathbb{Z}$ *Modul ist nicht endlich erzeugt. Für alle* $d \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *gilt jedoch* $(d)\,\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$*.*
- $\mathbb{Q}$ *ist als* $\mathbb{Z}_{(p)}$*-Modul, für eine Primzahl* $p \in \mathbb{Z}$*, nicht endlich erzeugt. Für alle* $d \in \mathbb{Z}_{(p)} \setminus \{0\}$ *gilt ebenfalls* $(d)\,\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ *und für* $d = pd'$ *mit* $d' \in \mathbb{Z}_{(p)}$ *gilt* $(d) \subseteq (p) \subseteq \operatorname{jac}(\mathbb{Z}_{(p)})$

Folgerung 6.2 *Seien* R *ein Ring,* M *ein endlich erzeugter* R*-Modul,* N *ein Untermodul von* M *sowie* $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{jac}(R)$ *ein Ideal. Ist* $N + \mathfrak{a}\,M = M$ *so gilt bereits* $N = M$*.*

Beweis. Erinnerung: Wir haben bereits gesehen:

$$\begin{array}{rcl} N = M & \Leftrightarrow & M/N = \{0\} \\ M \text{ endl. erz.} & \Leftrightarrow & M/N \text{ endl. erz.} \end{array}$$

Damit genügt es zu zeigen, dass $\mathfrak{a}(M/N) = M/N$ ist. Sei $x + N \in M/N$. Nach Voraussetzung ist $N + \mathfrak{a}\,M = M$ also schreibe $x = n + m$ mit $n \in N$ und $m \in \mathfrak{a}\,M$. Da M endlich erzeugt ist, gibt es $m_i \in M$ und $\alpha_i \in \mathfrak{a}$ mit $m = \alpha_1 m_1 + \ldots \alpha_n m_n$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x + N &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i + n\Big) + N \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i m_i\Big) + N \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (m_i + N) \quad \in \mathfrak{a}\Big(M/N\Big) \end{aligned}$$

□

Folgerung 6.3 *Sei* $(R, \mathfrak{m}, \kappa)$ *ein lokaler Ring und* M *ein endlich erzeugter* R*-Modul.*

- *Dann ist* $M/\mathfrak{m}\,M$ *in natürlicher Weise ein* κ*-Vektorraum.*
- *Sind* $x_1, \ldots, x_n \in M$*, so dass die Restklassen* $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ *eine* κ*-Basis von* $M/\,\mathfrak{m}\,M$ *bilden, so ist*
$$M = < x_1, \ldots, x_n >_R$$

Beweis. Analog zur Bezeichnung $\overline{x}$ der Restklasse von $x \in M$ in $M/\,\mathfrak{m}\,M$ bezeichnen wir mit $\overline{\alpha} \in \kappa = R/\,\mathfrak{m}$ die Restklasse von $\mathfrak{a} \in R$. Mit der Skalarmultiplikation

$$\begin{array}{rcl} \kappa \times M/\mathfrak{m}\,M & \to & M/\mathfrak{m}\,M \\ (\overline{\alpha}, \overline{x}) & \mapsto & \overline{\alpha x} \end{array}$$

wird $M/\,\mathfrak{m}\,M$ zu einem κ-Vektorraum. Diese Abbildung ist Wohldefiniert, denn ist $\overline{\alpha} = \overline{\alpha'} \in \kappa$ also $\alpha - \alpha' \in \mathfrak{m}$, so ist $\alpha x - \alpha' x = (\alpha - \alpha')x \in \mathfrak{m}\,M$ und somit $\overline{\alpha' x} = \overline{\alpha x}$.
Seien nun $x_1, \ldots, x_n \in M$ wie in der Behauptung gegeben, dann genügt es mit der vorangegangenen Folgerung zu zeigen, dass $< x_1, \ldots, x_n >_R + \mathfrak{m}\,M = M$ ist. Dies folgt jedoch gerade daraus, dass die Restklassen der x_i den Quotienten $M/\,\mathfrak{m}\,M$ erzeugen. □

Wir wollen nun aus Nakayamas Lemma und einige Folgerungen für lokalisierungen von Ringen und deren Moduln ziehen. Sei dafür R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal und M ein R-Modul. Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, squiggly] \arrow[d, dash] & M_\mathfrak{p} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, dash] & M(\mathfrak{p}) \arrow[d, dash] \\ R \arrow[r, squiggly] & R_\mathfrak{p} \arrow[r, squiggly] & \kappa(\mathfrak{p}) \end{tikzcd}$$

Wir haben im bereits gesehen, dass $R_\mathfrak{p}$ ein lokaler Ring ist, und dass $M_\mathfrak{p}$ in natürlicher Weise sowohl als R als auch $R_\mathfrak{p}$-Modul aufgefasst werden kann. Wir definieren im Sinne der vorangegangenen Folgerung

Definition und Bemerkung 6.4 *(Faser)*
Seien R ein Ring, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal und M ein R-Modul

$$M(\mathfrak{p}) \;:=\; M_\mathfrak{p} / \mathfrak{P} M_\mathfrak{p} \qquad \text{mit } \mathfrak{P} := \mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$$

Dann ist $M(\mathfrak{p})$ ein Vektorraum über

$$\kappa(\mathfrak{p}) \;=\; R_\mathfrak{p} / \mathfrak{p} R_\mathfrak{p}$$

und heißt die Faser von M in $\mathfrak{p}$. Es gilt

$$M_\mathfrak{p} / \mathfrak{P} M_\mathfrak{p} \;\cong\; M_\mathfrak{p} / \mathfrak{p} M_\mathfrak{p}$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} M_\mathfrak{p} &= \left\langle a \cdot m \,\middle|\, a \in \mathfrak{p},\, m \in M_\mathfrak{p} \right\rangle_{R_\mathfrak{p}} \\ \text{und} \quad \mathfrak{p} M_\mathfrak{p} &= \left\langle \frac{a}{1} \cdot m \,\middle|\, a \in \mathfrak{p} \subseteq R,\, m \in M_\mathfrak{p} \right\rangle_{R_\mathfrak{p}} \end{aligned}$$

Bemerkung 6.5 *(Schrittweises Lokalisieren) Sei R ein Ring und seien $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R$ mit $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}$, dann ist $\mathfrak{p} R_\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} R_\mathfrak{q}$ ein Primideal (denn $R \setminus \mathfrak{q} \subseteq R \setminus \mathfrak{p}$) und es gelten*

$$\begin{aligned} &(1) \qquad R_\mathfrak{p} \;\cong\; \left(R_\mathfrak{q}\right)_{\mathfrak{p} R_\mathfrak{q}} \\ &(2) \qquad \kappa(\mathfrak{p}) \;=\; R_\mathfrak{p} / \mathfrak{p} R_\mathfrak{p} \;\cong\; \left(R_\mathfrak{q}\right)_{\mathfrak{p} R_\mathfrak{q}} / \mathfrak{p} \left(R_\mathfrak{q}\right)_{\mathfrak{p} R_\mathfrak{q}} \;=\; \kappa(\mathfrak{p} R_\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

Sei nun M ein R-Modul, dann gelten weiterhin

- *Die Fasern sind isomorph: $M(\mathfrak{p}) \cong M(\mathfrak{p} R_\mathfrak{q})$*
- *Ist M ein endlich erzeugter R-Modul, so ist $M_\mathfrak{q}$ ein eindlich erzeugter $R_\mathfrak{q}$-Modul.*
- *Sind $x_1, \ldots, x_n \in M_\mathfrak{q}$ Elemente, derart dass die Restklassen $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n \in M(\mathfrak{q})$ eine $\kappa(\mathfrak{q})$-Basis bilden, so bilden die $x_1, \ldots, x_n$ nach Nakayamas Lemma 6.1 ein Erzeugendensystem von $M_\mathfrak{q}$ über $R_\mathfrak{q}$. Sei weiter*

  $$\varphi : M_\mathfrak{q} \;\to\; M_\mathfrak{q}(\mathfrak{p} R_\mathfrak{q})$$

  ein Modul-Homomorphismus, dann bilden die Bilder $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ der x_i unter φ ein Erzeugendensystem des $\kappa(\mathfrak{p} R_\mathfrak{q})$-Vektorraums $M_\mathfrak{q}(\mathfrak{p} R_\mathfrak{q})$, daher gilt die Dimensionsformel

  $$\dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M(\mathfrak{p}) \;\leq\; \dim_{\kappa(\mathfrak{q})} M(\mathfrak{q})$$

Beispiel 32 *(Fasern in Primidealen)*
Sei M ein endlich erzeugter $\mathbb{Z}$-Modul, also eine endlich erzeugte abelsche Gruppe, dann gelten

- *$M(0)$, die Faser von M in (0) ist ein $\mathbb{Q}$-Vektorraum.*
- *Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl, dann ist $M((p))$ die Faser von M in (p) ein $\mathbb{F}_p$-Vektorraum.*

Nach der Bemerkung ist $\dim_{\mathbb{Q}} M(0) \leq \dim_{\mathbb{F}_p} M(P)$. Die Faser über dem generischen Punkt (0) hat also die kleinste Dimension.

Definition 6.6 *(Annulator)*
Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Wir definieren den Anulator von $x \in M$ als

$$\operatorname{Ann}(x) \;:=\; \left\{ a \in R \,\middle|\, ax = 0 \right\}$$

und den Annulator von M als

$$\operatorname{Ann}(M) \;:=\; \left\{ a \in R \,\middle|\, ax = 0 \text{ für alle } x \in M \right\}$$

Anmerkung Es ist leicht zu sehen, dass der Annulator ein Ideal ist. Ebenfalls sieht man sofort, dass

$$\operatorname{Ann}(M) \;=\; \bigcap_{x \in M} \operatorname{Ann}(x)$$

Satz 6.7 *Sei R ein Ring und M ein R Modul. Es sind äquivalent*

(1) $M = 0$

(2) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ *für alle Primideale* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$

(3) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ *für alle Maximalideale* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$

In dieser Situation gilt weiter

(4) $M(\mathfrak{m}) = 0$ *für alle Maximalideale* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$

Ist M zudem endlich erzeugt, so sind alle Aussagen äquivalent.

Beweis. Die Implikationsrichtung „(1)⇒(2)⇒(3)⇒(4)“ ist klar, denn wir haben schon gesehen, dass alle maximalen Ideale Primideale sind und die anderen Schritte sind trivial.

(4)⇒(3): Nach Voraussetzung ist M endlich erzeugt und für alle Maximalideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ gilt

$$M(\mathfrak{m}) \;=\; M_{\mathfrak{m}} / \mathfrak{m} M_{\mathfrak{m}} \;=\; 0$$

Damit gilt also $M_{\mathfrak{m}} = \mathfrak{m} M_{\mathfrak{m}}$. Da $R_{\mathfrak{m}}$ ein lokaler Ring mit einzigem Maximalideal $\mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}}$ ist, gilt $\mathfrak{m} R_{\mathfrak{m}} = \operatorname{jac}(R)$. Da M endlich erzeugt ist, ist auch $M_{\mathfrak{m}}$ endlich erzeugt und wir können Nakayamas Lemma 6.1 anwenden. Es gilt also $M_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$.

(3)⇒(1): Die Sondervoraussetzung, dass M endlich erzeugt sei, lassen wir nun wieder fallen. Sei $x \in M$, dann wollen wir zeigen, dass $x = 0$ gilt. Nach Voraussetzung gilt

$$\frac{x}{1} \;=\; \frac{0}{1} \quad \text{in } M_{\mathfrak{m}}$$

für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$, das heißt für jedes Maximalideal $\mathfrak{m}$ gibt es ein $s \in R \setminus \mathfrak{m}$ mit $s \cdot x = 0$. Damit liegt aber der Annulator $\operatorname{Ann}(x)$ von x in <u>keinem</u> Maximalideal. Also gilt

$$\operatorname{Ann}(X) \;=\; R \;=\; (1)$$

und damit ist $1 \cdot x = 0$ □

7 Tensorprodukte

Wir erinnern uns an das Diagramm zur Lokalisierung aus dem letzten Abschnitt. Mit dem Tensorprodukt erhalten wir auf die Lokalisierung (und auf viele Dinge mehr) eine alternative Sichtweise:

$$\begin{tikzcd}
 & M \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, equal] & M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[d, equal] \\
M \arrow[ur, squiggly] \arrow[r, squiggly] \arrow[d, dash] & M_{\mathfrak{p}} \arrow[r, squiggly] \arrow[d, dash] & M(\mathfrak{p}) \arrow[d, dash] \\
R \arrow[r, squiggly] & R_{\mathfrak{p}} \arrow[r, squiggly] & \kappa(\mathfrak{p})
\end{tikzcd}$$

Dies können wir allgemeiner auch mit beliebigen Ringen tun, solange wir einen Ringhomomorphismus haben. Motivierend sei diese Definition vorangestellt

Definition 7.1 *(Basiswechsel)*
Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Sei weiter $f : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus so heißt das Tensorprodukt $M \otimes_R R'$ ein Basiswechsel.

Wir werden später sehen, dass $M \otimes_R R'$ tatsächlich ein R'-Modul ist. Wir definieren das Tensorprodukt über eine universelle Eigenschaft:

Definition 7.2 *(Tensorprodukt von Moduln)*
Seien R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Sei T ein weiterer R-Modul und die Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes : M \times N &\to T \\ (m,n) &\mapsto m \otimes n \end{aligned}$$

R-bilinear, das heißt die Abbildung erfülle die R-Modul-Homomorphismus-Eigenschaften in beiden Komponenten. Das Tupel $(T, \otimes)$ heißt Tensorprodukt von M und N über R, falls für alle R-Moduln P zusammen mit einer R-bilinearen Abbildung $f : M \times N \to P$ ein eindeutig bestimmter R-Modul-Homomorphismus $\psi : T \to P$ existiert, so dass das offensichtliche Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & P \\
 & T \arrow[ur, dashed, "\psi"'] &
\end{tikzcd}$$

Das heißt so dass $f = \psi \circ \otimes$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $M \otimes_R N := T$.

Lemma 7.3 *Das Tensorprodukt wird durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Angenommen es gäbe ein Tensorprodukt (Das ist zu diesem Zeitpunkt noch nicht klar) $M \otimes_R N$ wie in der Definition. Nimm weiter an das Tupel (P, f) erfülle ebenfalls die Definition, dann gibt es wegen der universellen Eigenschaften zwei eindeutig bestimmte R-Modul-Homomorphismen ψ, φ, die wegen $f = \psi \circ \otimes$ und $\otimes = \varphi \circ f$ invers zueinander sind.

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & P \arrow[dl, shift left, "\varphi"] & \\
& M \otimes_R N \arrow[ur, shift left, "\psi"] & & M \times N \arrow[ll, "\otimes"] \arrow[ul, "f"']
\end{tikzcd}$$

□

Per definition ist $\otimes$ eine R-bilineare Abbildung, das heißt es gelten

$$\begin{aligned}(am + bm') \otimes n &= a\,(m \otimes n) + b\,(m' \otimes n)\\ m \otimes (an + bn') &= a\,(m \otimes n) + b\,(m \otimes n')\end{aligned}$$

für alle $m, m' \in M$, $n, n' \in N$ und $a, b \in R$.

/!\ Warnung: Im Allgemeinen gilt $m \otimes n \neq n \otimes m$, denn wenn $M \neq N$ ist, ist eine der beiden Varianten nicht notwendig definiert. Ferner kann auch im Falle $M = N$ für $x \neq 0$ gelten $x \otimes x = 0$. Betrachte zum Beispiel $M = N = \mathbb{Z}/4\,\mathbb{Z}$ über $\mathbb{Z}$, dann ist

$$2 \otimes 2 \overset{bil.}{=} 2\,(2 \otimes 1) = 4 \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0 \otimes 0$$

Wegen der Bilinearität werden die Elemente $a \cdot (x, y)$, (ax, y), (x, ay) unter $\otimes$ auf das selbe Element abgebildet. Daher ist $\otimes$ insbesondere nicht injektiv. Im Allgemeinen ist $\otimes$ ebenfalls nicht surjektiv.

Wir wollen nun zeigen, dass es das von uns definierte Tenorprodukt tatsächlich auch gibt. Um uns die Sache etwas zu erleichtern beweisen wir zunächst unter der Annahme, dass es ein Tensorprodukt gäbe, noch den folgenden Satz:

Satz 7.4 *Seien R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Gibt es ein Tensorprodukt $M \otimes_R N$, dann sind alle $z \in M \otimes_R N$ von der Form*

$$z = \sum_{i=1}^{n} x_i \otimes y_i \qquad \text{mit } x_i \in M,\ y_i \in N \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

Beweis. Setze

$$T' := \big\langle x \otimes y \,\big|\, x \in M,\ y \in N \big\rangle_R \subseteq M \otimes_R N$$

Wegen der Bilinearität von $\otimes$ gilt insbesondere $(ax) \otimes y = a(x \otimes y)$ für $a \in R$, $x \in M$ und $y \in N$. Damit genügt es $T' = M \otimes_R N$ zu zeigen. Hierfür nutzen wir das vorangegangene Lemma und die universelle Eigenschaft. Die Abbildung

$$\begin{aligned} M \times N &\to T' \\ (x, y) &\mapsto x \otimes y \end{aligned}$$

ist offensichtlich bilinear. Sei nun P ein R-Modul und $f : M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung. Wir wollen nun zeigen, dass T' die universelle Eigenschaft erfült, also dass es einen eindeutig bestimmten R-Modul-Homomorphismus $\psi' : T' \to P$ mit $\psi' \circ \otimes = f$ gibt. Aus der universellen Eigenschaft des

Tensorproduktes erhalten wir einen eindeutig bestimmten R-Modul-Homomorphismus $\psi : M \otimes_R N \to P$ mit $\psi \circ \otimes = f$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & P \\ & M \otimes_R N \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \times N \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\otimes"'] & & P \\ & T' \arrow[ur, dashed, "\psi'"'] & \end{tikzcd}$$

Setze $\psi' := \psi_{|_{T'}}$, dann erfüllt ψ' offensichtlich alle geforderten Bedingungen. Damit erfüllt T' die universelle Eigenschaft und mit Lemma 7.3 folgt die Behauptung. □

Folgerung 7.5 *Seien R ein Ring und M, N zwei R-Moduln. Sei $(x_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von M und $(y_j)_{j\in J}$ ein Erzeugendensystem von N. Gibt es ein Tensorprodukt $M \otimes_R N$, wird es als R-Modul von $(x_i \otimes y_j)_{i\in I,\, j\in J}$ erzeugt.*

Beweis. Seien $x \in M$ und $y \in N$ etwa

$$x = \sum_{i\in I} a_i x_i \qquad \text{und} \qquad y = \sum_{j\in J} b_j y_j$$

so gilt

$$x \otimes y = \Big(\sum_{i\in I} a_i x_i\Big) \otimes \Big(\sum_{j\in J} b_j y_j\Big) = \sum_{i,j} a_i b_j \,(x_i \otimes y_j)$$

und nach dem vorangegangenen Satz ist dann $(x_i \otimes y_j)_{i\in I,\, j\in J}$ ein Erzeugendensystem. □

Satz 7.6 *Sei R ein Ring und M, N zwei R-Moduln, dann existiert das Tensorprodukt $(M \otimes_R N, \otimes)$.*

Beweis. Erinnerung: Wir schreiben

$$R^{(N\times M)} = \bigoplus_{i\in M\times N} R \qquad \text{und} \qquad (a_i)_{i\in M\times N} = \sum_{(x,y)\in M\times N} a_{(x,y)} \cdot (x,y) \in R^{(N\times M)}$$

Wir wollen nun das Tensorprodukt konstruieren. Dazu definieren wir einen Untermodul von $R^{(N\times M)}$ durch

$$Q := \left\langle \begin{array}{c} (ax+bx',y) - a\,(x,y) - b\,(x',y) \\ (x, ay+by') - a\,(x,y) - b\,(x,y') \end{array} \;\middle|\; x,x' \in M,\ y,y' \in N,\ a,b \in R \right\rangle$$

und setzen

$$M \otimes_R N := R^{M\times N}\big/ Q$$

sowie die zugehörige Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes : M \times N &\to M \otimes_R N \\ (x,y) &\mapsto \overline{1 \cdot (x,y)} \end{aligned}$$

Nach Konstruktion ist diese Abbildung bilinear, denn die Terme, um welche sich beispielsweise $\otimes(x, y+y')$ und $\otimes(x,y) + \otimes(x,y')$ unterscheiden liegen gerade im Untermodul Q, sind also 0 in $M \otimes_R N$. Ebenfalls offensichtlich ist $M \otimes_R N$ ein R-Modul.

Es bleibt nun zu zeigen, dass $M \otimes_R N$ die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes erfüllt. Sei also P ein R-Modul und $f : M \times N \to P$ eine bilineare Abbildung. Wir wollen nun zeigen, dass es einen R-Modul-Homomorphismus $\psi : M \otimes_R N \to P$ mit $f = \psi \circ \otimes$ gibt. Definiere dazu zunächst

$$\begin{aligned} \tilde{\psi} : R^{(M\times N)} &\to P \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

Betrachte das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\otimes"'] & P & R^{(M\times N)} \arrow[l, "\tilde{\psi}"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\ & M \otimes_R N \arrow[u, dashed, "\psi"] & \end{tikzcd}$$

wobei $\gamma\big(a\,(x,y)\big) := \overline{a\,(x,y)}$ sei.

Behauptung $\tilde{\psi}$ faktorisiert über $M \otimes_R N$ via ψ.

Begründung Nach dem Homomorphiesatz für R-Moduln genügt es $Q = \operatorname{Ker}\gamma \subseteq \operatorname{Ker}\tilde{\psi}$ zu zeigen. Dafür ist es Ausreichend nachzuweisen, dass die Ausdrücke welche Q erzeugen im Kern von $\tilde{\psi}$ liegen. Betrachte also

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}\big((ax+bx',y)\big) &= f\big((ax+bx',y)\big) \\ &\overset{f\,bilin.}{=} a\cdot f\big((x,y)\big) + b\cdot f\big(x',y)\big) \\ &= a\tilde{\psi}\big((x,y)\big) + b\tilde{\psi}\big((x',y)\big) \end{aligned}$$

Für den anderen Ausdruck analog. Damit erhalten wir nun eine Abbildung $\psi : M \otimes_R N \to P$ mit

$$\psi\big(\otimes(x,y)\big) \;=\; \psi\big(\overline{1\cdot(x,y)}\big) \;\overset{\tilde{\psi}=\psi\circ\gamma}{=}\; \tilde{\psi}\big(1\cdot(x,y)\big) \;=\; f\big((x,y)\big)$$

also kommutiert das Diagramm wie gewünscht. Durch die Bedingung $f = \psi \circ \otimes$ ist ψ auf Elementen der Form $\otimes(x,y)$ eindeutig bestimmt. Nach dem Satz zuvor ist dies zusammen mit der Homomorphieeigenschaft ausreichend, damit ψ eindeutog bestimmt ist. $\square$

Bemerkung 7.7 *(Tensorprodukt und Homomorphismen)*
Sei R ein Ring und seien $\alpha_M \to M'$ und $\beta : N \to N'$ zwei R-Modul-Homomorphismen[2] *Dann ist auch*

$$\begin{aligned} \alpha\otimes\beta : M\otimes_R N &\to M'\otimes_R N' \\ \sum x_i \otimes y_i &\mapsto \sum \alpha(x_i)\otimes\beta(y_i) \end{aligned}$$

ein R-Modul-Homomorphismus und diese Konstruktion ist an beiden Seiten verträglich mit Verkettung von Homomorphismen.

Bemerkung 7.8 *Sei R ein Ring und M ein R-Modul. Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} R\otimes_R M &\to M \\ a\otimes x &\mapsto ax \end{aligned} \qquad \text{und} \qquad \begin{aligned} M &\to R\otimes_R M \\ x &\mapsto 1\otimes x \end{aligned}$$

sind invers zueinander. Analog gilt die Aussage für $M \otimes_R R$ und damit gilt insgesamt

$$M\otimes_R R \;\cong\; M \;\cong\; R\otimes_R M$$

[2] Insbesondere seien M, M', N, N' vier R-Moduln, wie immer fordern wir dies in einem solchen Fall implizit mit.

Beweis. Wir müssen Wohldefiniertheit (Existenz & Eindeutigkeit) (1), Linearität (2) und die Eigenschaft „invers zueinander“ zu sein (3) zeigen.

1. Offensichtlich ist die Abbildung

$$\cdot : R \times M \ni (a, x) \mapsto ax \in M$$

   bilinear, nach Definition von Moduln. Wegen der universellen Eigenschaft gibt es dann eine eindeutige Abbildung $\psi : R \otimes_R M \to M$

2. Die Linearität von $R \otimes_M \to M$ folgt aus der universellen Eigenschaft, die Abbildung in die andere Richtung ist linear nach Satz 7.4.

3. Wegen der Linearität der Abbildungen genügt es nach Satz 7.4, die Behauptung auf Elementartensoren zu zeigen, das heißt auf Elementen der Form $x \times y$. Es gelten

$$x \mapsto 1 \otimes x \mapsto 1 \cdot x \mapsto x \qquad \text{und} \qquad a \otimes x \mapsto ax \mapsto 1 \otimes ax = a \otimes x$$

□

Definition und Bemerkung 7.9 *(Bimodul)*
Seien A, B Ringe und M ein A-Modul, P ein B-Modul und N ein (A, B)-Bimodul, das heißt N ist sowohl ein A als auch ein B-Modul und äußeren Multiplikationen $(a, x) \mapsto ax$ und $(x, b) \mapsto xb$ sind verträglich, also $(ax)b = a(xb)$. Dann sind $M \otimes_A N$ und $N \otimes_B P$ je (A, B)-Bimoduln und es gilt

$$(M \otimes_A N) \otimes_B P \cong M \otimes_A (N \otimes_B P)$$

als (A, B)-Bimoduln, das heißt der zugrunde liegende Isomorphismus ist sowohl ein A-, als auch ein B-Modul-Homomorphismus.

Beweis. Seien $a \in A$, $b \in B$, $m \in M$ und $n \in N$, dann gilt

$$\big(a(m \otimes n)\big)b = (am \otimes n)b = a(m \otimes nb) = a\big((m \otimes n)b\big)$$

damit ist $M \otimes_A N$ ein (A, B)-Bimodul. Genauer ist $M \otimes_A N$ als Tensorprodukt von A-Moduln ein A Modul und vermöge der Verknüpfung

$$(m \otimes n)b := m \otimes (nb) \qquad \text{für } m \in M,\ n \in N \text{ und } b \in B$$

auch ein B-Modul, das heißt wir haben eine Abbildung $(M \otimes_A N) \times B \to M \otimes_A N$, die die Modul-Axiome erfüllt. Analog folgt, dass $N \otimes_B$ ein (A, B)-Bimodul ist. □

Anmerkung Betrachtet man statt einer bilinearen Abbildung auf $M \times N$ eine multilineare Abbildung auf $M_1 \times \ldots \times M_n$, so erhält man ein mehrfaches Tensorprodukt $M_1 \otimes_R \ldots \otimes_R M_n$. Für $n = 3$ gilt dann ebenfalls

$$(M \otimes_R N) \otimes_R P \cong M \otimes_R N \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P)$$

Bemerkung 7.10 *(Tensorprodukt und direkte Summen)*
Sei R ein Ring und seien M_i für $i \in I$ sowie N Moduln über R. dann gibt es einen Isomorphismus

$$\begin{array}{rcl} \Big(\bigoplus_{i\in I} M_I\Big) \otimes_R N & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \bigoplus_{i\in I} (M_i \otimes_R N) \\ (m_i)_{i\in I} \otimes n & \overset{\Phi}{\mapsto} & (m_i \otimes n)_{i\in I} \\ (\ldots, 0, m_i, 0, \ldots) \otimes n & \overset{\Psi}{\leftarrow\!\shortmid} & (\ldots, 0, m_i \otimes n, 0, \ldots) \end{array}$$

In Worten heißt das, dass das Tensorprodukt mit beliebigen direkten Summen vertauscht.

/!\ Achtung Im Allgemeinen vertauscht das Tensorprodukt nicht mit dem direkten Produkt.

Beweis. Wegen der Universellen Eigenschaft des Tensorproduktes genügt es für die Existenz und Eindeutigkeit von Φ zu zeigen, dass Φ bilinear in $\bigoplus M_i$ und N ist, dies ist aus der Definition der Abbildung aber sofort offensichtlich.

$$\begin{tikzcd} \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \times_R N \arrow[rr] \arrow[dr, "\otimes"'] & & \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N) \\ & \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \otimes_R N \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Wegen der universellen Eigenschaft der direkten Summe von Moduln genügt es für die Existenz und Eindeutigkeit von Ψ zu zeigen, dass für alle $i \in I$ eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \iota_i : M_i \otimes_R N & \to & \Big(\bigoplus_{i\in I} M_i\Big) \otimes_R N \\ m \otimes n & \mapsto & (\ldots, 0, m, 0, \ldots) \otimes n \end{array}$$

gibt, die entsprechend verträglich ist. aber auch das ist offensichtlich erfüllt.

$$\begin{tikzcd} M_i \otimes_R N \arrow[rr] \arrow[dr, "\iota_i"'] & & \bigoplus_{i\in I}(M_i \otimes_R N) \arrow[dl, "\Psi"] \\ & \Big(\bigoplus_{i\in I} M_I\Big) \otimes_R N & \end{tikzcd}$$

Benutze nun beide universellen Eigenschaften, um zu sehen, dass die gegebenen Abbildungen Umkehrabbildungen von einander sind. □

Der Basiswechsel

Satz 7.11 *(Basiswechsel)*
Seien A, B Ringe und M ein A-Modul sowie $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, dann wird $B \otimes_A M$ zu einem A Modul via

$$\begin{array}{rcl} \cdot : B \times (B \otimes_A M) & \to & B \otimes_A M \\ (b, b' \otimes m) & \mapsto & (bb') \otimes m \end{array}$$

und $B \otimes_A M$ heißt der durch Basiswechsel von A nach B von M gegebene Modul.

Beweis. Wir müssen wieder die Wohldefiniertheit zeigen, also das die Abbildung existiert und eindeutig ist. Für die Existenz betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} B \times B \times M & \to & B \otimes_A M \\ (b, b', m) & \mapsto & (bb') \otimes m \end{array}$$

Sie ist wohldefiniert und multilimear. Wegen der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes faktorisiert Sie über eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mu : B \otimes B \otimes M & \to & B \otimes_A M \\ (b \otimes b' \otimes m) & \mapsto & (bb') \otimes m \end{array}$$

Diegesuchte Abbildung kann dann definiert werden als Verkettung des Übergangs zum Tensorprodukt

$$\varphi : B \times (B \otimes_A M) \ \to \ B \otimes_A (B \otimes_A M)$$

mit der gefundenen Abbildung μ.
Die Eindeutigkeit ist klar, und dass es sich bei $B \otimes_A M$ um einen B-Modul handeltist leicht nachzurechnen. □

Bemerkung 7.12 *Ist N ein B-Modul, so gilt*

$$\mathrm{Hom}_A(M, N) \ \cong \ \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N)$$

mit den Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_A(M, N) & \longleftrightarrow & \mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M, N) \\ f & \overset{\phi}{\mapsto} & \big[B \otimes_A M \ \ni \ b \otimes m \ \mapsto \ bf(m) \ \in \ N\big] \\ \big[M \ \ni \ m \ \mapsto \ g(1_B \otimes m) \ \in \ N\big] & \overset{\psi}{\leftarrow\!\shortmid} & g \end{array}$$

Diese sind zueinander invers, denn

$$\psi \circ \phi \ = \ id_{\mathrm{Hom}_A(M,N)} \qquad \text{denn } \ f(1_B \otimes m) \ = \ 1_B f(m) \ = \ f(m)$$

und

$$\phi \circ \psi \ = \ id_{\mathrm{Hom}_B(B \otimes_A M,N)} \qquad \text{denn } \ bg(1_B \otimes m) \ = \ g(b \otimes m)$$

Satz 7.13 *(Basiswechsel und Lokalisierung)*
Sei R ein Ring, $S \subseteq R$ ein multiplikaitives System und M ein R-Modul, dann ist

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}R \otimes M & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & S^{-1}M \\ \dfrac{x}{s} \otimes m & \mapsto & \dfrac{xm}{s} \\ \dfrac{1}{s} \otimes m & \leftarrow\!\shortmid & \dfrac{m}{s} \end{array}$$

Beweis. Auch die Existenz und Eindeutigkeit dieser Abbildung führen wir auf eine „zugrundeliegende“ Abbildung auf dem cartesischen Produkt.

Satz 7.14 *(Basiswechsel und Quotienten von Moduln nach Idealen)*
Sei R ein Ring, $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal und M ein R-Modul, dann ist

$$\begin{array}{rcl} R/_{\mathfrak{a}} \otimes M & \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} & M/_{\mathfrak{a}M} \\ \overline{1} \otimes m & \leftarrow\!\shortmid & \overline{m} \\ \overline{r} \otimes m & \mapsto & \overline{rm} \end{array}$$

Beispiel 33 *Sei R ein Ring und $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ein Primideal sowie M ein R-Modul. Wir haben im Abschnitt über die Lokalisierung und Nakayamas Lemma die Konstruktionen*

$$\kappa(\mathfrak{p}) \;=\; R_{\mathfrak{p}}/_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} \qquad \text{und} \qquad M(\mathfrak{p}) \;=\; M_{\mathfrak{p}}/_{\mathfrak{p}M_{\mathfrak{p}}}$$

kennengelernt. Wir haben die triviale Isomorphie

$$\kappa(\mathfrak{p}) \;\cong\; \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} R_{\mathfrak{p}}$$

Wir erhalten damit nun

$$\begin{array}{rcll} \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_R M & \cong & \big(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} R_{\mathfrak{p}}\big) \otimes_R M & \\ & = & \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} \big(R_{\mathfrak{p}} \otimes_R M\big) & \text{Anmerkung Seite 49 unten} \\ & \cong & \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (R \setminus \mathfrak{p})^{-1} M & \text{Satz 7.13} \\ & = & \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} & \\ & = & R_{\mathfrak{p}}/_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} & \\ & = & M_{\mathfrak{p}}/_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}M_{\mathfrak{p}}} \quad = \quad M(\mathfrak{p}) & \text{Satz 7.16} \end{array}$$

Beweis von Satz 7.14 Wir Beweisen diesen Satz wie die anderen Basiswechsel über die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes. Siehe auch Übungsablatt 7 Aufgabe 2

Das Tensorprodukt von *R*-Algebren

Satz 7.15 *(Tensorprodukt von R-Algebren)*
Sei R ein Ring und A, B zwei R-Algebren mit

$$\begin{array}{rcl} \varphi_A : R & \to & A \\ r & \mapsto & r \cdot 1_A \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \varphi_B : R & \to & B \\ r & \mapsto & r \cdot 1_B \end{array}$$

Dann ist $A \otimes_R B$ zusammen mit der Multiplokation

$$\begin{array}{rcl} \cdot : (A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) & \to & A \otimes_R B \\ (a_1 \otimes b_1 \,,\, a_2 \otimes b_2) & \mapsto & a_1 a_2 \otimes b_1 b_2 \end{array}$$

ein Ring.

Beweis. R-Algebren sind insbesondere R-Moduln. Damit existiert der R-Modul $A \otimes_R B$. Zeige zunächst, dass die Abbildung $\cdot$ wohldefiniert ist. Dazu betrachte

$$\begin{tikzcd} & (A \times B) \times (A \times B) \arrow[rr, "\varphi", "\text{multilinear}"'] \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dr, "\sigma", "\text{multilin.}"'] & & A \otimes_R B \\ (A \otimes_R B) \times (A \otimes_R B) \arrow[rr, "\otimes", "\text{bilinear}"'] & & (A \otimes_R B) \otimes_R (A \otimes_R B) \arrow[ur, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Aufgrund der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes gibt es eine Abbildung ψ mit $\varphi = \psi \circ \sigma$ und wir sehen $\cdot = \psi \circ \otimes$. Die Ringaxiome sind nun leicht nachzurechnen. $\square$

Bemerkung 7.16 *Sei R ein Ring und $A,\ B$ zwei R-Algebren wie in Satz 7.15, dann wird auch $A \otimes_R B$ zu einer R-Algebra via*

$$\begin{array}{rcl} R & \to & A \otimes_R B \\ x & \mapsto & \varphi_A(x) \otimes 1_B \end{array}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert und kanonisch, denn es gilt

$$\varphi_A(x) \otimes 1_B \ = \ x \cdot 1_A \otimes 1_B \ = \ 1_A \otimes x \cdot 1_B \ = \ 1_A \otimes \varphi_B(x)$$

Beispiel 34 *$\mathbb{C}$ ist ein Körper also insbesondere ein Integritätsbereich. Trotzdem ist*

$$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \quad \cong \quad \mathbb{C}^2$$

kein Integritätsbereich.
Für den Isomorphismus betrachte $z \otimes w \overset{\sim}{\mapsto} (z, w)$.
Zum Integritätsring betrachte

$$1(-z \otimes w) \quad = \quad 1(z \otimes -w) \quad = \quad (-1)(-z \otimes w)$$

damit gibt es $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda \neq \mu$ und $\lambda(z \otimes w) = \mu(z \otimes w)$

Bemerkung 7.17 *(Rechenregeln für das Tensorprodukt von R-Algebren)*
Sei R ein Ring und A eine R-Algebra, dann gelten

(1) $R \otimes_R A \ \cong \ A$

(2) $S^{-1}R \otimes_R A \ \cong \ S^{-1}A$

(3) $R/\mathfrak{a} \otimes_R A \ \cong \ A/\mathfrak{a}A$ *für alle $\mathfrak{a} \lhd R$*

(4) $R[X] \otimes_R A \ \cong \ A[X]$
Insbesondere gilt $R[X_1] \otimes_R R[X_2] \ \cong \ R[X_1, X_2]$

Beweis. Jede R-Algebra ist ein R-Modul, das heißt es ist vor allem zu Zeigen, dass die linke Siete immer auch eine R-Algebra ist.

zu 1) bekannt.

zu 2) Fasse $S^{-1}A := \big(\varphi_A(S)\big)^{-1}A$ als R-Algebra auf. Aufgefasst als $S^{-1}R$-Modul gilt nach Satz 7.13 über Basiswechsel und Lokalisierung bereits die zu zeigende Aussage.

zu 3) Nach Satz 7.15 gilt die Aussage für R-Moduln. Dass dies alles R-Algebren sind, ist klar.

zu 4) Der Polynomring $R[X]$ ist eine R-Algebra mit der kanonischen Inklusion $\iota : R \hookrightarrow R[X]$. Betrachte die Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} R[X] \otimes_R A & \leftrightarrows & A[X] \\ f(X) \otimes a & \overset{\varphi}{\mapsto} & a\, \varphi_A\big(f(X)\big) \\ \sum_{n=1}^{N} (X^n \otimes a_n) & \overset{\psi}{\leftarrow\!\shortmid} & \sum_{n=1}^{N} a_n\, X^n \end{array}$$

wobei

$$\varphi_A\Big(\sum_{n=1}^{N} a_n\, X^n\Big) \quad := \quad \sum_{n=1}^{N} \varphi_A(a_n)\, X^n$$

Diese Abbildungen sind invers zueinander, denn

- Sei $f(X) = \sum a_n\, X^n \in R[X]$, dann gilt

$$\begin{array}{rclcl} f(X) \otimes a & = & \Big(\sum a_n\, X^n\Big) \otimes a & \overset{\varphi}{\mapsto} & a \sum \varphi(a_n)\, X^n \;=\; \sum \big(a \cdot \varphi_A(a_n)\big)\, X^n \\ & & & & = \; a\, \varphi_A\big(f(X)\big) \\ & & & \overset{\psi}{\mapsto} & \sum \big(X^n \otimes a\, \varphi_A(a_n)\big) \\ & & & & = \; \sum \big(\, \varphi_A(a_n)\, X \otimes a\big) \\ & & & & = \; \sum \big(a_n X^n \otimes a\big) \\ & & & & = \; a\, \varphi_A\big(f(X)\big) \end{array}$$

- Sei $g(X) = \sum a_n\, X^n \in A[X]$, dann gilt

$$\begin{array}{rclcl} g(X) & = & \sum a_n\, X^n & \overset{\psi}{\mapsto} & \sum \big(X^n \otimes a_n\big) \\ & & & \overset{\varphi}{\mapsto} & \sum a_n\, \varphi_A(X^n) \;=\; \sum a_n\, X^n \;=\; g(X) \end{array}$$

$\square$

Das Tensorprodukt von R-Moduln ist durch eine universelle Eigenschaft charakterisiert. Da wir das Tensorprodukt von R-Algebren aus dem Tensorprodukt von R-Moduln geschöpft haben ist es eine natÃ¼rliche Frage, ob auch das Tensorprodukt von R-Algebren universell ist und, wenn ja, wie diese Eigenschaft aussieht.

Seien R ein Ring und $\varphi : R \to A$ und $\psi : R \to B$ zwei R-Algebren, dann ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"'] & A \otimes_R B \end{tikzcd} \qquad \text{wobei} \quad \begin{array}{rcl} f(a) & = & a \otimes 1_B \\ g(b) & = & 1_A \otimes b \end{array}$$

offensichtlich kommutativ. Es gilt der folgende

Satz 7.18 *Seien R ein Ring und $\varphi : R \to A$ und $\psi : R \to B$ zwei R-Algebren, dann existiert für jeden Ring C zusammen mit Ring-Homomorphismen $f' : A \to C$ und $g' : B \to C$ für die das offensichtliche Quadrat kommutiert, ein eindeutig bestimmter Rin-Homomorphismus $h : A \otimes_R B \to C$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & A \arrow[d, "f'"'] \arrow[ddr, "f"] & \\
B \arrow[r, "g'"] \arrow[drr, "g"'] & C \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
& & A \otimes_R B
\end{tikzcd}$$

Beweis. Wir wissen: Falls solch ein h existiert, so müssen wegen der geforderten Kommutativität $h \circ f(a) = h(a \otimes 1_B) = f'(a)$ und $h \circ g(b) = h(1_A \otimes b) = g'(b)$ gelten. Damit ergibt sich für allgemeine Elementartensoren

$$\begin{aligned} h(a \otimes b) &= h\big((a \otimes 1_B) \cdot (1_A \otimes b)\big) &= h(a \otimes 1_B) \cdot h(1_A \otimes b) \\ &= f'(a) \cdot g'(b) \end{aligned}$$

Da $A \otimes_R B$ als R-Modul von den Elementartensoren erzeugt wird und h ein R-ALgebren-Homomorphismus ist, ist h nach obiger Überlegung bereits eindeutig bestimmt.
Betrachte nun die R-bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} A \times B &\to C \\ (a, b) &\mapsto f(a) \cdot g(b) \end{aligned}$$

daher folgt die Existenz von h aus der universellen Eigenschaft von $A \otimes_R B$ als R-Modul. □

Beispiel 35 *(Der Polynomring in mehreren Veränderlichen als Tensorprodukt)*
Sei R ein Ring und seien $R[X]$ und $R[Y]$ jeweils der Polynomring über R in nur einder Veränderlichen. Dann sind $R[X]$ und $R[Y]$ via $x \mapsto Y$ in natürlicher Weise isomorph. Es gilt

$$R[X] \otimes_R R[Y] \cong R[X, Y]$$

Begründung. *Sei C eine R-Algebra dann gilt mit dem Satz über die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes für R-Algebren:*

$$\mathrm{Hom}_{R-\text{Alg.}}\big(R[X] \otimes_R R[Y], C\big) = \mathrm{Hom}_{R-\text{Alg.}}\big(R[X], C\big) \times \mathrm{Hom}_{R-\text{Alg.}}\big(R[Y], C\big)$$

nach der universellen Eigenschaft des Polynomrings ist $\mathrm{Hom}(R[X], C) = C$ und damit gilt

$$= C \times C = \mathrm{Hom}_{R-\text{Alg.}}\big(R[X], C\big) R[X, Y], C\big)$$

□

Bemerkung 7.19 *Das Tensorprodukt von R-Algebren hat die universelle Eigenschaft des Koproduktes. Das heißt sei R ein Ring und seien $A_1,\ A_2$ zwei R-Algebren. Die Abbildungen*

$$A_1 \to A_1 \otimes_R A_2 \qquad \text{und} \qquad A_2 \to A_1 \otimes_R A_2$$

sind R-Algebra-Homomorphismen. Fassen wir diese als Koprojektionen auf (vergleiche Satz 5.12) so gibt es nach dem Satz über die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes von R-Algebren einen eindeutig bestimmten R-Algebra-Homomorphismus h, so dass für alle $i = 1, 2$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & A_1 \otimes_R A_2 \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Mit dieser letzten Bemerkung haben wir eine dritte Form des Koproduktes kennen gelernt. Wir kennen nun Koprodukte von ...

Mengen: Die disjunkte Vereinigung von Mengen besitzt die universelle Eigenschaft des Koproduktes und seien A, B zwei Mengen mit leerem Schnitt, dann gilt

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}(A \sqcup B, C) & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Hom}(A, C) \times jhom(B, C) \\ \varphi & \mapsto & (\varphi_A, \varphi_B) \end{array}$$

abelsche Gruppen / Moduln: Die direkte Summe von abelschen Gruppen (also insbesondere auch von Moduln) besitzt die universelle Eigenschaft des Koproduktes (vergleiche Satz 5.12). Seien A, B, C abelsche Gruppen, dann ist

$$\mathrm{Hom}_{\text{Grp.}}(A \oplus B, C) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}_{\text{Grp.}}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{\text{Grp.}}(B, C)$$

R-Algebren: Wie wir soeben gesehen haben besitzt das Tensorprodukt von R-Algebren die universelle Eigenschaft des Koporduktes. Seien A, B, C drei R-Algebren, dann gilt

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-Alg.}}(A \otimes B, C) \quad \cong \quad \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg.}}(A, C) \times \mathrm{Hom}_{R\text{-Alg.}}(B, C)$$

In diesem Kapitel haben wir viele Konstruktionen (Koprodukte, Lokalisierung, Quotienten, ...) für R-Moduln und -Algebren kennengelernt. Im nächsten Kapitel wollen wir das Verhalten dieser Konstruktionen im Bezug auf Homomorphie („Funktorialität“) untersuchen.

Kapitel II

Funktorialität und exakte Sequenzen

8 Kategorien und Funktoren

Kategorien

Definition 8.1 *(Kategorie)*
Seine Kategorie $\mathcal{C}$ ist gegeben durch

- *Eine Klasse von Objekten* $\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$
- *Für alle* $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *eine Klasse* $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *von* $\mathcal{C}$*-Morphismen von* X *nach* Y.
- *Für jedes Objekt* $X \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *ein Element* $id_X \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$
- *Für* $X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *eine Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

  wobei $\circ$ *von der Kategorie und der Morphismuseigenschaft dieser Kategorie abhängt.*

so dass gelten

(1) *Für alle* $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *und alle* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ *gilt*

$$f \circ id_X \;=\; f \;=\; id_Y \circ f$$

(2) *Für je vier Objekte* $W, X, Y, Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *und Morphismen* $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$, $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, Z)$ *und* $h \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(z, w)$ *gilt*

$$h \circ (g \circ f) \;=\; h \circ g \circ f \;=\; (h \circ g) \circ f$$

Beispiel 36 *(Bekannte Kategorien)*
Wir haben bereits einige Kategorien kennengelernt:

(1) $\mathcal{C} = (Sets)$ *die Kategorie der Mengen:*

- *Objekte sind Mengen*
- *Morphismen sind Abbildungen von Mengen*
- *Für eine Menge X ist id_X die identische Abbildung*
- *$\circ$ ist die hintereinanderausführung von Abbildungen*

(2) $\mathcal{C} = (Groups)$ *die Kategorie der Gruppen:*

- *Objekte sind Gruppen*
- *Morphismen sind Gruppen-Homomorphismen*
- *Für eine Gruppe X ist id_X die identische Abbildung*
- *$\circ$ ist die hintereinanderausführung von Abbildungen*

(2.1) $\mathcal{C} = (abel.Groups)$ *die Kategorie der abelschen Gruppen:*

- *Objekte sind abelsche Gruppen*
- *Morphismen sind Gruppen-Homomorphismen*
- *id die identische Abbildung*
- *$\circ$ ist die hintereinanderausführung von Abbildungen*

Die Kategorie der abelschen Gruppen ist eine volle Unterkategorie der Kategorie der Gruppen.

(2.2) $\mathcal{C} = (k - VR)$ *die Kategorie der Vektorräume über einem Körper k:*

- *Objekte sind Vektorräume über k*
- *Morphismen sind k-lineare Abbildungen*
- *id die identische Abbildung*
- *$\circ$ ist die hintereinanderausführung von Abbildungen*

(2.3) $\mathcal{C} = (R - Moduln)$ *die Kategorie der R-Moduln:*

- *Objekte sind Moduln über dem Ring R*
- *Morphismen sind R-Modul-Homomorphismen*
- *id die identische Abbildung*
- *$\circ$ ist die hintereinanderausführung von Abbildungen*

(2.4) $\mathcal{C} = (R - Algebren)$ *die Kategorie der R-Algebren:*

- *Objekte sind Algebren über dem Ring R*
- *Morphismen sind R-Algebra-Homomorphismen*
- *id die identische Abbildung*
- *$\circ$ ist die hintereinanderausführung von Abbildungen*

Oder in der alternativen Sichtweise

- *Objekte sind Ring-Homomorphismen $R \to A$*
- *Morphismen sind kommutative Dreiecke*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & B \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(3) $\mathcal{C} = (Top)$ *die Kategorie der topologischen Räume:*

- *Objekte sind topologische Räume, also Mengen mit einer Topologie*
- *Morphismen sind stetige Abbildungen*
- *(...)*

(4) $\mathcal{C} = (Rings)$ *die Kategorie der Ringe:*

- *Objekte sind Ringe*
- *Morphismen sind Ring-Homomorphismen*
- *(...)*

(5) *Betrachte die einelementige Menge $\{X\}$. Konstruiere eine Kategorie $\mathcal{C}$ wie folgt*

- $\mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \;=\; \{X\}$
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \;=\; \{X\}$
- *Dann ist $id_X : \{X\} \ni X \;\mapsto\; X \in \{X\}$*

Definition und Bemerkung 8.2 *(Endo-, Iso-, Epi- und Monomorphismus)*
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$.

- *Die Elemente von*
  $$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,X) \;=:\; \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X)$$
  heißen $\mathcal{C}$-Endomorphismen auf X.

- *Ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt $\mathcal{C}$-Isomorphismus, falls es einen Morphismus $g \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$ mit $f \circ g = id_Y$ und $g \circ f = id_X$ gibt.*

- *Ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt $\mathcal{C}$-Monomorphismus, falls für alle Objekte $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und alle Morphismen $g, g' \in \mathrm{Hom}(Z,X)$ aus $f \circ g = f \circ g'$ stets $g = g'$ folgt. Betrachte das Diagramm*

  $$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

  *(Können Koinzidenz also durch „**Nach**schalten“ von f prüfen)*

- *Ein $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ heißt $\mathcal{C}$-Epimorphismus, falls für alle $Z \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ und alle Morphismen $g, g' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,Z)$ aus $g \circ f = g' \circ f$ stets $g = g'$ folgt. Betrachte das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "g'"'] & Z \end{tikzcd}$$

*(Können Koinzidenz also durch „**Vor**schalten“ von f prüfen)*

/!\ Warnung: Ob die Begriffe „Monomorphismus“ und „injektiv“, „Epimorphismus“ und „surjektiv“ sowie „Isomorphismus“ und „bijektiv“ das selbe Aussagen oder nicht hängt von der Kategorie ab, denn diese Begriffe sind im Allgemeinen nicht äquivalent.

Charakterisierung von Objekten durch universelle Eigenschaft

Beispiel 37 *(Proukte)*
Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ Objekte. Ein Objekt P zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen

$$p : P \to X \qquad \text{und} \qquad q : P \to Y$$

heißt das Produkt von X und Y in $\mathcal{C}$, falls für alle weiteren Objekte T zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen $p' : T \to X$ und $q' : T \to Y$ ein eindeutiger Morphismus $f : T \to P$ so existiert, dass

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "f"] \arrow[drr, bend left, "p'"] \arrow[ddr, bend right, "q'"'] & & \\ & P \arrow[r, "p"'] \arrow[d, "q"] & X \\ & Y & \end{tikzcd}$$

kommutiert, also $q' = q \circ f$ und $p' = p \circ f$ gelten. Das Tripel (P, p, q) ist hierdurch bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beispiel 38 *(Koproukte)*
Koprodukte definieren wir wie Produkte nur mit „umgedrehten“ Pfeilen: Seien $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $X, Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ Objekte. Ein Objekt C zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen

$$f : X \to C \qquad \text{und} \qquad q : Y \to C$$

heißt das Koprodukt von X und Y in $\mathcal{C}$, falls für alle weiteren Objekte T zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen $f' : X \to T$ und $g' : Y \to T$ ein eindeutiger Morphismus $\varphi : C \to T$ so existiert, dass

$$\begin{tikzcd} T & & \\ & P \arrow[ul, dashed, "\varphi"'] & X \arrow[l, "f"] \arrow[ull, bend right, "f'"'] \\ & Y \arrow[u, "g"'] \arrow[uul, bend left, "g'"] & \end{tikzcd}$$

kommutiert, also $g' = \varphi \circ g$ und $f' = \varphi \circ f$ gelten. Das Tripel (C, f, g) ist hierdurch bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt.

Bemerkung 8.3 *Produkt und Koprodukt sind duale Konstruktionen*

Analog zum (Ko-)Produkt von 2 *Mengen erklärt man (Ko-)Produkte für beliebige Indexmengen* I.

Die Existens von Produkten und Koprodukten muss für jede Kategorie einzeln gezeigt werden. diese Konstruktionen existieren nicht immer! Wir kennen aber bereits die Koprodukte in den folgenden Kategorien

Kategorie	***Koprodukt***	
$(Sets)$	$\sqcup$	*disjunkte Vereinigung*
$(abel.Groups)$ $(k-VR)$ $(R-Moduln)$	$\bigoplus$	*direktes Produkt*
(Top)	$\sqcup$	*disjunkte Vereinigung mit offensichtlicher Topologie*
$(Rings)$ $(R-Algebren)$	$\otimes$	*Tensorprodukt*

Beispiel 39 *(Kein (unendliches) Produkt)*
Sei K *ein Körper. Betrachte die Kategorie der endlich-dimensionalen Vektorräume über* K. *Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass für jeden endlichen Vektorraum ein* $n \in \mathbb{N}$ *so existiert, dass* $V \cong K^n$. *Weiter wissen wir, dass* $K^n \times K^m = K^{nm}$ *für* $n, m \in \mathbb{N}$ *ist, daher gibt es in dieser Kategorie offensichtlich keine unendlichen Produkte.*

Definition und Bemerkung 8.4 *(Das Koprodukt in der Kategorie der Mengen)*
Sei I *eine beliebige Menge und sind* X_i *für* $i \in I$ *gegeben, so heißt die Menge*

$$\bigsqcup_{i \in I} X_i \quad := \quad \bigcup_{i \in I} \{\, (i,x) \,|\, x \in X_i \,\}$$

die disjunkte Vereinigung der Mengen X_i.

Beachte, dass die Mengen X_i *in dieser Konstruktion nicht leeren Schnitt haben müssen, sondern „künstlich" sicher gestellt wird, dass die vereinigten Mengen leeren Schnitt haben.*

Eigenschaften:

- $\sharp \bigsqcup X_i \;=\; \sum \sharp X_i$
- *Haben die Mengen* X_i *paarweise leeren Durschnitt (also gilt* $X_i \cap X_j = \varnothing$ *fÃ¼r* $i \neq j$*), so ist die kanonische Abbildung*
$$\bigsqcup_{i \in I} \;\to\; \bigcup_{i \in I} X_i$$
bijektiv.

Beispiel 40 *Betrachte die Mengen* $X = \{0,1\}$ *und* $Y = \{0,1,2\}$, *dann ist*

$$X \sqcup Y \;=\; \big\{(1,0),\ (1,1),\ (2,0),\ (2,1),\ (2,2)\big\}$$

Definition 8.5 *(Koprodukt)*
Sei $\mathcal{C}$ *eine Kategorie und* I *eine beliebige Menge. Seien für* $i \in I$ *Objekte* $X_i \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ *gegeben.Ein Objekt* X *zusammen mit* $\mathcal{C}$*-Morphismen* $\alpha_i : X_i \to X$ *heißt Koprodukt der* X_i, *wir schreiben*

$$X \quad =: \quad \coprod_{i \in I} X_i$$

wenn die folgende universelle Eigenschaft erfüllt ist:
Für alle $Y \in \mathrm{Obj}(\mathcal{C})$ zusammen mit $f_i \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$ für $i \in I$ gibt es einen eindeutig bestimmten $\mathcal{C}$-Morphismus $f : X \to Y$ mit $f_i = f \circ \alpha_i$ für alle $i \in I$. Also so, dass das folgende Diagramm für alle $i \in I$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd} & \coprod_{i\in I} X_i \arrow[dr, dashed, "f"] & \\ X_i \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[rr, "f_i"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Anmerkung Es ist äquivalent zu fordern, dass

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\Big(\coprod_{i\in I} X_i\,,\, Y\Big) \quad\cong\quad \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X_i, Y)$$

Dabei vermitteln die α_i die natürliche Äquivalenz.

Funktoren

Definition 8.6 *(Funktor)*
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien.

(1) *Ein kovarianter Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist gegeben durch*

- *Eine Vorschrift, die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X)$ in $\mathcal{D}$ zuordnet.*
- *Eine Vorschrift, die jedem $\mathcal{C}$-Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ einen $\mathcal{D}$-Morphismus $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ zuordnet.*

so dass gelten

$$F(id_X) \;=\; id_{F(X)} \qquad \text{und} \qquad F(f \circ g) \;=\; F(f) \circ F(g)$$

sofern definiert.

(2) *Ein kontravarianter Funktor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ist gegeben durch*

- *Eine Vorschrift, die jedem Objekt X von $\mathcal{C}$ ein Objekt $F(X)$ in $\mathcal{D}$ zuordnet.*
- *Eine Vorschrift, die jedem $\mathcal{C}$-Morphismus $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ einen $\mathcal{D}$-Morphismus $F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(Y), F(X))$ zuordnet.*

so dass gelten

$$F(id_X) \;=\; id_{F(X)} \qquad \text{und} \qquad F(f \circ g) \;=\; F(g) \circ F(f)$$

sofern definiert.

/!\ Achtung Wenn in $\mathcal{C}$ die Verknüpfung $f \circ g$ nicht definiert ist, so muss $F(f) \circ F(g)$ nicht im Bild des Funktors F liegen, also nicht von einem Morphismus aus $\mathcal{C}$ herkommen.
Bei einem Kontravarianten Funktor drehen sich im Bildbereich die Pfeilrichtungen um. Alternativ zur Definition des kontravarianten Funktors findet sich auch oft die Schreibweise

$$F : \mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{D}$$

Dabei ist $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ gegeben durch

$$\mathrm{Obj}(\mathcal{C}^{\text{opp}}) := \mathrm{Obj}(\mathcal{C}) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{\text{opp}}}(X,Y) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,X)$$

Wir nennen $\mathcal{C}^{\text{opp}}$ auch die „gegenüberliegende" Kategorie.

Bemerkung 8.7 *Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ zwei Kategorien sowie F ein Funktor und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)$ ein $\mathcal{C}$-Isomorphismus, dann ist $F(f)$ ein $\mathcal{D}$-Isomorphismus.*

Beispiel 41 *(Funktoren)*

- *Ein triviales Beispiel sind „Vergiss-Funktoren" bei denen eine oder mehrere Eigenschaften einer Kategorie einfach vergessen werden:*

$$\begin{array}{rcccccc} & (R-Moduln) & \longrightarrow & (abel.Groups) & \longrightarrow & (Sets) \\ \mathrm{Obj}: & (M,+,\cdot) & \mapsto & (M,+) & \mapsto & M \\ \mathrm{Hom}: & f & \mapsto & f & \mapsto & f \end{array}$$

- *In der linearen Algebra haben wir bereits den kontravarianten Dualraum-Funktor von der Kategorie der Vektorräume über einem Körper K in sich selbst kennen gelernt:*

$$\begin{array}{rccc} & (K-VR) & \longrightarrow & (K-VR) \\ \mathrm{Obj}: & V & \mapsto & V^{\vee} \\ \mathrm{Hom}: & [f: V \to W] & \mapsto & [f^{\vee}: W^{\vee} \to V^{\vee}] \end{array}$$

- *Die Lokalisierung, wie wir sie im vergangenen Kapitel beschrieben haben, ist Funktoriell. Seien R ein Ring und $S \subseteq R$ ein multiplikatives System, dann erhalten wir einen Funktor*

$$\begin{array}{rccc} & (R-Moduln) & \longrightarrow & (S^{-1}R-Moduln) \\ \mathrm{Obj}: & M & \mapsto & S^{-1}M \\ \mathrm{Hom}: & [f: M \to N] & \mapsto & \left[S^{-1}f : S^{-1}M \ni \frac{m}{s} \mapsto \frac{f(m)}{s} \in S^{-1}N\right] \end{array}$$

- *Auch der Basiswechsel aus dem letzten Kapitel ist Funktoriell. Sei etwa $\varphi: R \to R'$ ein Ring-Homomorphismus, so erhalten wir*

$$\begin{array}{rccc} & (R-Moduln) & \longrightarrow & (R'-Moduln) \\ \mathrm{Obj}: & M & \mapsto & M \otimes_R R' \\ \mathrm{Hom}: & [f: M \to N] & \mapsto & [f \otimes id_{R'} : M \otimes_R R' \ni m \otimes x \mapsto f(m) \otimes x \in N \otimes_R R'] \end{array}$$

Bei genauem Hinsehen, stellen wir fest, dass Lokalisierung von R-Moduln ein Basiswechsel von R nach $S^{-1}R$ ist.

9 Exakte Sequenzen

Definition 9.1 *(Sequenz)*
Sei R ein Ring.

- *Eine Sequenz von R-Moduln ist eine Familie $(M_i)_{i\in I}$ von R-Moduln für ein Intervall $I \subseteq \mathbb{Z}$ zusammen mit einer Familie von R-Modul-Homomorphismen $f_i : M_{i-1} \to M_i$ für alle $i \in I$ mit $i-1 \in I$. Anschaulich gilt etwa für $I = \mathbb{Z}$*

$$\ldots \to M_{-1} \stackrel{f_0}{\to} M_0 \stackrel{f_1}{\to} M_1 \to \ldots$$

- *Eine Sequenz wie oben heißt ein Komplex, wenn für alle definierten Homomorphismen f_i und f_{i-1} gilt $f_i \circ f_{i-1} = 0$, also wenn*

$$\mathrm{Im}(f_{i-1}) \subseteq \mathrm{Ker}(f_i)$$

- *Eine Sequenz heißt exakt an der Stelle i, falls die Homomorphismen f_i und f_{i-1} definiert sind und*

$$\mathrm{Im}(f_{i-1}) = \mathrm{Ker}(f_i)$$

  gilt.

- *Eine Sequenz heißt exakt, falls sie an allen Stellen exakt ist.*

Definition 9.2 *(kurze exakte Sequenz)*
Sei R ein Ring und seien M, M', M'' drei R-Moduln. Eine exakte Sequenz

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

heißt kurze exakte Sequenz.

Anmerkung Hat die Sequenz nur auf der linken Seite den Nullmodul stehen, so heißt sie auch „links-exakt“. Analog sprechen wir von „rechts-exakten“ Sequenzen.

Beispiel 42 *(Exakte Sequenzen und Injek- bzw Surjektivität)*
Sei R ein Ring und seien M, M', M'' drei R-Moduln.

- *Die Sequenz*

$$0 \xrightarrow{0} M' \xrightarrow{f} M$$

  ist genau dann exakt, wenn Sie bei M' exakt ist. Das heißt wenn $\mathrm{Im}(0) = \mathrm{Ker}(f)$ ist. Aber $0 : 0 \mapsto 0_{M'}$ ist die Nullabbildung, also ist die Sequenz genau dann exakt, wenn f injektiv ist.

- *Die Sequenz*

$$M \xrightarrow{g} M'' \xrightarrow{0} 0$$

  ist genau dann exakt, wenn sie exakt bei M'' ist, also wenn $\mathrm{Im}(g) = \mathrm{Ker}(0)$ gilt. Da aber 0 wieder die Nullabbildung ist, ist der Kern ganz M'', also ist die Sequenz genau dann exakt, wenn g surjektiv ist.

Bemerkung 9.3 *Sei*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

eine Sequenz von R-Moduln[1]*. Diese Sequenz ist genau dann exakt, wenn*

(i) *f ist injektiv (also die Sequenz ist exakt bei M'.*

(ii) *g ist surjektiv (also die Sequenz ist exakt bei M''.*

(iii) *g induziert einen Isomorphismus*

$$M/f(M') \xrightarrow{\sim} M''$$

gelten, also genau dann, wenn

$$M'' \cong M/\mathrm{Ker}(g) = M/\mathrm{Im}(f) = M/f(M')$$

gilt und f injektiv ist.

Definition und Bemerkung 9.4 *(Der* Hom*-Funktor)*
Seien R ein Ring und M, N zwei R-Moduln, dann ist

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, \cdot\,): & (R-Moduln) & \to & (R-Moduln) \\ \mathrm{Obj}: & N & \mapsto & \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M,N) \\ \mathrm{Hom}: & [g: N \to N'] & \mapsto & \big[\mathrm{Hom}(M,N) \ni f \mapsto g \circ f \in \mathrm{Hom}(M,N')\big] \end{array}$$

Diese Konstruktion ist verträglich mit Verkettung, denn seien $N \xrightarrow{g} N' \xrightarrow{g'} N''$ R-Modul-Homomorphismen, so ist $(g' \circ g) \circ f \in \mathrm{Hom}(M, N'')$. Damit ist

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, \cdot\,)$$

ein kovarianter Funktor von der Kategorie der R-Moduln insich selbst.
Andererseits ist

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(\,\cdot\,, N): & (R-Moduln) & \to & (R-Moduln) \\ \mathrm{Obj}: & M & \mapsto & \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M,N) \\ \mathrm{Hom}: & [h: M' \to M] & \mapsto & \big[\mathrm{Hom}(M,N) \ni f \mapsto f \circ h \in \mathrm{Hom}(M',N)\big] \end{array}$$

Auch diese Konstruktion ist verträglich mit Verkettung von Funktionen und somit ist

$$\mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(\,\cdot\,, N)$$

ein kontravarianter Funktor von der Kategorie der R-Moduln insich selbst.

[1] Wenn wir eine Sequenz von R-Moduln voraussetzen, setzen wir wieder implizit voraus, dass alle Objekte R-Moduln und alle Abbildungen der Sequenz R-Modul-Homomorphismen sind.

Satz 9.5 *(Universelle Eigenschaft von exakten Sequenzen)*
Sei R ein Ring.

(1) *Eine Sequenz*

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

von R-Moduln ist genau dann exakt (das heißt exakt bei M, M''), wenn für alle R-Moduln N die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M'', N) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, N) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M', N)$$

exakt ist. Dabei sind ϕ und ψ gegeben durch

$$\phi(\alpha) = \alpha \circ g \qquad \text{und} \qquad \psi(\beta) = \beta \circ f$$

(2) *Eine Sequenz*

$$0 \longrightarrow M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$$

von R-Moduln ist genau dann exakt (das heißt exakt bei M', M), wenn für alle R-Moduln N die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(N, M') \xrightarrow{\psi'} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(N, M) \xrightarrow{\phi'} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(N, M'')$$

exakt ist. Dabei sind ϕ' und ψ' gegeben durch

$$\phi'(\beta) = g \circ \beta \qquad \text{und} \qquad \psi'(\alpha) = f \circ \alpha$$

Beweis. Die Aussage **(2)** zeigen Sie in der Übung Blatt 8 Aufgabe 6. Wir zeigen nun die andere Aussage. Sei zunächst die Sequenz

$$M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \longrightarrow 0$$

exakt, dann ist zu zeigen, dass die Sequenz nach Anwenden des $\mathrm{Hom}(\,\cdot\,, N)$-Funktors exakt im obigen Sinne ist. Surjektive Morphismen abelscher Gruppen sind Epimorphismen. Nach Voraussetzung ist g surjektiv, also insbesondere ein Epimorphismus. Daher gilt für alle $\alpha, \alpha' \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ mit $\alpha \circ g = \alpha' \circ g$ sofort $\alpha = \alpha'$. Damit ist ϕ also injektiv und die Sequenz exakt bei $\mathrm{Hom}(M'', N)$. Nach Voraussetzung ist $g \circ f = 0$ damit ist auch $\psi \circ \phi = 0$, denn $\psi \circ \phi(\alpha) = \alpha \circ g \circ f = \alpha \circ 0 = \alpha(0) = 0$. Also gilt $\mathrm{Im}(\phi) \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$. Es bleibt nun zu zeigen, dass das Bild von ϕ nicht nur eine Teilmenge, sondern bereits der gesamte Kern von ψ ist.

Dazu sei $\beta \in \mathrm{Hom}(M, N)$ beliebig. Es gilt genau dann $\beta(f(M')) = 0$, wenn $f(M')$ im Kern von β liegt. Im Fall $\beta \circ f = 0$ ist β aber auch im Kern von ψ. Nach Voraussetzung ist die Sequenz der M', M, M'' exakt, also gilt $M'' \cong M/f(M')$. Damit gibt es ein $\alpha \in \mathrm{Hom}(M'', N)$ mit

$$\beta : M'' \xrightarrow{g} {M}/{f(M')} \xrightarrow{\alpha} N$$

also $\beta = \alpha \circ g$ und damit liegt β im Bild von ϕ.

Für die andere Implikation nimm an, die Sequenz

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M'', N) \xrightarrow{\phi} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M, N) \xrightarrow{\psi} \mathrm{Hom}_{R\text{-Mod}}(M', N)$$

sei für alle R-Moduln N exakt. Die Sequenz der M', M, M'' ist genau dann

- exakt bei M'', wenn g surjektiv ist. Dazu betrachte die kanonische Projektion

  $$\pi : M'' \twoheadrightarrow {M''}\big/{\operatorname{Im}(g)} =: N$$

  Da hier genau das Bild von g herausgenommen wird, ist $\pi \circ g = 0$ selbstverständlich ist aber auch $0 \circ g = 0$. Da ϕ nach Voraussetzung injektiv ist und injektive Morphismen abelscher Gruppen Monomorphismen sind, folgt $\pi = 0$. Damit ist aber $M'' = \operatorname{Im}(g)$ und also g surjektiv.

- exakt bei M, wenn $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g)$ ist. Sei N ein R-Modul, dann gilt für $\alpha \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ nach Voraussetzung $\alpha \circ g \circ f = 0$. Insbesondere gilt also $f \circ g$ für $N = M''$ und $\alpha = id_{M''}$. Damit ist $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker}(g)$.

  Sei nun $N = M/\operatorname{Im}(f)$ und $\beta : M \twoheadrightarrow N$ die kanonische Projektion, dann ist der Kern von β gerade das Bild von f, also $\beta \circ f = 0$. Damit ist aber β insbesondere auch im Kern von ψ. Aus der Exaktheit bei $\operatorname{Hom}(M, N)$, das heißt aus $\operatorname{Ker}(\psi) = \operatorname{Im}(\phi)$, folgt somit die Existens eines $\alpha \in \operatorname{Hom}(M'', N)$ mit $\beta = \alpha \circ g$. Damit folgt insgesamt $\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(\beta) \supseteq \operatorname{Ker}(g)$. □

Satz 9.6 *(Schlangenlemma)*
Sei R ein Ring und $I = \{1, 2, 3\}$. Seien weiter für $i \in I$ R-Moduln M_i, N_i gegeben, so dass

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, "v"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, "u'"] & N_2 \arrow[r, "v'"] & N_3 \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten Zeilen ist. Dann existiert eine exakte Sequenz

$$\begin{aligned} 0 \; \to \; \operatorname{Ker} f_1 \; &\xrightarrow{\overline{u}} \; \operatorname{Ker} f_2 \; \xrightarrow{\overline{v}} \; \operatorname{Ker} f_3 \; \xrightarrow{d} \\ &\overset{d}{\dashrightarrow} \; {N_1}\big/{f_1(M_1)} \; \xrightarrow{\overline{u'}} \; {N_2}\big/{f_2(M_2)} \; \xrightarrow{\overline{v'}} \; {N_3}\big/{f_2(M_3)} \; \to \; 0 \end{aligned}$$

wobei $\overline{u}, \overline{v}, \overline{u'}$ sowie $\overline{v'}$ die von u, v, u' und v' induzierten Abbildungen sind.

Beweis. Wir wollen das Diagramm erweitern, wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Ker} f_1 \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[d, hook, "\iota_1"'] & \operatorname{Ker} f_2 \arrow[r, "\overline{v}"] \arrow[d, hook, "\iota_2"'] & \operatorname{Ker} f_3 \arrow[d, hook, "\iota_3"'] \arrow[dddll, rounded corners, "d"] & \\
0 \arrow[r] & M_1 \arrow[r, hook, "u"] \arrow[d, "f_1"'] & M_2 \arrow[r, two heads, "v"] \arrow[d, "f_2"'] & M_3 \arrow[r] \arrow[d, "f_3"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N_1 \arrow[r, hook, "u'"] \arrow[d, "\pi_1"'] & N_2 \arrow[r, two heads, "v'"] \arrow[d, "\pi_2"'] & N_3 \arrow[r] \arrow[d, "\pi_3"'] & 0 \\
 & {N_1}\big/{f_1(M_1)} \arrow[r, "\overline{u'}"] & {N_2}\big/{f_2(M_2)} \arrow[r, "\overline{v'}"] & {N_3}\big/{f_3(M_3)} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Definition von $\overline{u}, \overline{v}$: Sei $x \in \operatorname{Ker}(f_1)$, dann gilt

$$f_2\big(u(x)\big) \;=\; u'\big(f_1(x)\big) \;=\; 0$$

somit liegt $u(x)$ im Kern von f_2 und wir setzen $\overline{u}(x) := u(x) \in \operatorname{Ker} f_2$.
Analog definieren wir $\overline{v}$.

Definition von $\overline{u'}, \overline{v'}$: Betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
M_1 \arrow[r, "f_1"] & N_1 \arrow[r, hook, "u'"] \arrow[dr, "\pi_1"'] & N_2 \arrow[r, two heads, "\pi_2"] & N_2/\mathrm{Im}\, f_2 \\
& & N_1/\mathrm{Im}\, f_1 \arrow[ur, dashed, "\overline{u'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach dem Homomorphiesatz existiert $\overline{u'}$, falls $\mathrm{Im}\, f \subseteq \mathrm{Ker}(\pi_2 \circ u')$ gilt. Sei nun $x \in \mathrm{Im}\, f_1$, etwa $x = f_1(y)$ für ein $y \in M_1$. Dann gilt

$$u'(x) \;=\; u'\big(f(y)\big) \;=\; f_2\big(u(y)\big) \;\in \mathrm{Im}\, f_2$$

damit ist aber $u' \circ \pi_2(x) = 0$ und $\overline{u'}$ existiert.
Analog definieren wir $\overline{v'}$.

Definition von d: Sei $x \in \mathrm{Ker}\, f_3$. Da v surjektiv ist, gibt es dann ein $y \in M_2$ mit $v(y) = x$. Wegen der Kommutativität des Diagramms folgt dann

$$v'\big(f_2(y)\big) \;=\; f_3\big(v(y)\big) \;=\; f_3(x) \;=\; 0$$

damit ist aber $f_2(y)$ im Kern von v', also wegen der Exaktheit auch im Bild von u'. Dann gibt es aber ein $z \in N_1$ mit $f_2(y) = u'(z)$. Wir definieren:

$$d(x) \;:=\; \pi_1(z)$$

Bei dieser Definition haben wir Wahlen getroffen, wir müssen also zeigen, dass d Wohldefiniert ist. Es gilt

- z ist eindeutig bestimmt, da u' injektiv ist.
- d ist unabhängig von der Wahl von y, denn seien $y, y' \in M_2$ mit $v(y) = x = v(y')$ so ist $v(y - y') = 0$. Wegen der Exaktheit der oberen Sequenz gibt es ein $\nu \in M_1$ mit $y - y' = u(\nu)$. Seien nun $z, z' \in N_1$ zu y, y' gebildet wie oben beschrieben, dann gilt

  $$u'\big(f_1(\nu)\big) \;=\; f_2\big(u(\nu)\big) \;=\; f_2(y - y') \;=\; u'(z - z')$$

  Da u' injektiv und damit ein Monomorphismus ist, muss $f_1(\nu) = z - z'$ gelten und somit ist $z - z' \in \mathrm{Im}\, f_1$. Dann ist aber

  $$\pi_1(z - z') \;=\; 0 \;\in\; N_1/\mathrm{Im}\, f_1$$

Die Exaktheit der Sequenz zeigt man nun durch Diagrammjagd (Übung!). □

Definition 9.7 *(Cokern)*
Sei R ein Ring und sei $f : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus, dann bezeichnen wir

$$\mathrm{Coker}(f) \;:=\; N/\mathrm{Im}(f)$$

als den Cokern von f.

Folgerung 9.8 *In der Situation des Schlangenlemmas gelte zusätzlich, dass f_1, f_3 Isomorphismen seien. Dann ist auch f_2 ein Isomorphismus.*

Beweis. Nach dem Schlangenlemma gibt es eine exakte Sequenz

$$0 \to \operatorname{Ker} f_1 \to \operatorname{Ker} f_2 \to \operatorname{Ker} f_3 \to \operatorname{Coker} f_1 \to \operatorname{Coker} f_2 \to \operatorname{Coker} f_3 \to 0$$

Da f_1 und f_3 Isomorphismen sind, also insbesondere Injektiv, gilt $\operatorname{Ker} f_1 = \operatorname{Ker} f_3 = 0$ und damit erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Ker} f_2 \longrightarrow 0$$

also muss auch $\operatorname{Ker} f_2 = 0$ gelten. Andererseits sind f_1, f_3 auch surjektiv und damit gilt $\operatorname{Coker} f_1 = \operatorname{Coker} f_3 = 0$ und wir erhalten eine weitere exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow \operatorname{Coker} f_2 \longrightarrow 0$$

Also ist f_2 ebenfalls ein Isomorphismus. □

10 Exakte Funktoren

Definition 10.1 *(additive und exakte Funktoren)*
Seien R, R' Ringe, und bezeichne $(R - Mod), (R' - Mod)$ die Kategorien der R- bzw. R'-Module. Sei weiter

$$F : (R - Mod) \longrightarrow (R' - Mod)$$

ein Funktor. F heißt

additiv, *falls F kovariant für alle R-Moduln M, N die Abbildung*

$$\varphi : \operatorname{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{R'}(F(M), F(N))$$

ein Homomorphismus von abelschen Gruppen ist.

Im kontravarianten Fall fordere analog, dass

$$\varphi : \operatorname{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{R'}(F(N), F(M))$$

ein Homomorphismus abelscher Gruppen ist.

links-exakt, *falls F additiv ist und für jede exakte Sequenz $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ von R-Moduln die Sequenz*

$$\begin{cases} 0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) & \text{falls } F \text{ kovariant} \\ 0 \to F(M_3) \to F(M_2) \to F(M_1) & \text{falls } F \text{ kontravariant} \end{cases}$$

exakt ist.

rechts-exakt, *falls F additiv ist und für jede exakte Sequenz $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ von R-Moduln die Sequenz*

$$\begin{cases} F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0 & \text{falls } F \text{ kovariant} \\ F(M_3) \to F(M_2) \to F(M_1) \to 0 & \text{falls } F \text{ kontravariant} \end{cases}$$

exakt ist.

exakt, *falls F rechts und links-exakt ist.*

Bemerkung 10.2 *Seien R, R' Ringe und $F : (R - Mod) \to (R' - Mod)$ ein Funktor. dann gelten:*

(1) *Ist F additiv, so ist $F(0) = 0$.*
Begründung *Nach Voraussetzung ist*

$$F : \mathrm{End}_R(0) \to \mathrm{End}_{R'}(F(0))$$

ein Gruppen-Homomorphismus und im Zielbereich gilt

$$0 \;=\; F(0) \;=\; F(id_0) \;=\; id_{F(0)}$$

(2) *Sei F links-exakt und $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3$ eine exakte Sequenz. Dann ist auch*

$$\left\{\begin{array}{lll} 0 \to F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) & \text{falls } F \text{ kovariant} \\ 0 \to F(M_3) \to F(M_2) \to F(M_1) & \text{falls } F \text{ kontravariant} \end{array}\right\}$$

exakt. Dies ist eine stärkere Behauptung als in der Definition, denn die Ursprüngliche Sequenz hat keine Nullabbildung auf der rechten Seite.
Begründung *Wir betrachten nur den kovarianten Fall. Der kontravariante Fall erschließt sich entweder analog oder mit der $(R - Mod)^{\mathrm{opp}}$-Konstruktion aus dem kovarianten Fall. Sei $N := \mathrm{Im}(M_2 \to M_3) \subseteq M_3$ dann ersetze M_3 durch N und erhalte eine*Begründung *kurze exakte Sequenz. Nach Voraussetzung ist F links-Exakt und somit folgt, dass*

$$0 \;\to\; F(M_1) \;\to\; F(M_2) \;\to\; F(N)$$

exakt ist. Nach Konstruktion ist

$$0 \;\to\; N \;\hookrightarrow\; M_3 \;\twoheadrightarrow\; {}^{M_3}\!/_{N} \;\to\; 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Erneut folgt nun aus der links-exaktheit von F, dass die Sequenz $0 \to F(N) \to F(M_3) \to F\big(M_3/N\big)$ exakt ist. Insbesondere ist also $F(N) \hookrightarrow F(M_3)$ injektiv, somit gilt

$$\mathrm{Ker}\,\big(F(M_2) \to F(N)\big) \quad = \quad \mathrm{Ker}\,\big(F(M_2) \to F(N) \hookrightarrow F(M_3)\big)$$

(3) *Sei F rechts-exakt und $M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ eine exakte Sequenz. Dann ist auch*

$$\left\{\begin{array}{lll} F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) \to 0 & \text{falls } F \text{ kovariant} \\ F(M_3) \to F(M_2) \to F(M_1) \to 0 & \text{falls } F \text{ kontravariant} \end{array}\right\}$$

exakt. Auch dies ist eine stärkere Behauptung als in der Definition, denn die Ursprüngliche Sequenz hat keine Nullabbildung auf der linken Seite.
Begründung *Ähnlich wie zu **(2)**. Betrachte hier jedoch zunächst die Sequenz*

$$0 \;\to\; \mathrm{Im}(M_1 \to M_2) \;\to\; M_2 \;\to\; M_3 \;\to 0$$

Teile dann in M_1 den Modul $N := \mathrm{Ker}(M_1 \to M_2)$ heraus um die resultierende Sequenz entsprechend nach links „zu verlängern".

(4) *Sei F exakt und $M_1 \to M_2 \to M_3$ eine exakte Sequenz. Dann ist auch*

$$\left\{\begin{array}{ll} F(M_1) \to F(M_2) \to F(M_3) & \text{falls } F \text{ kovariant} \\ F(M_3) \to F(M_2) \to F(M_1) & \text{falls } F \text{ kontravariant} \end{array}\right\}$$

exakt. Insbesondere sehen wir so, dass exakte Funktoren die Exaktheit an jeder beliebigen exakten Stelle einer Sequenz erhalten.

I. Der *Hom*-Funktor ist linksexakt

In diesem Unterabschnitt werden wir zeigen, dass der Hom-Funktor immer links-exakt ist. Er ist im Allgemeinen aber nicht rechts-exakt (Siehe Beispiel weiter unten).

Satz 10.3 *Seien R ein Ring und N ein R-Modul. Dann sind für jeden R-Modul M die Mengen* $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ *und* $\mathrm{Hom}_R(M,N)$ *ebenfalls R-Moduln. Es gelten*

(1) *Der Funktor*

$$M \quad \mapsto \quad \mathrm{Hom}_R(M,N)$$

ist ein links-exakter kontravarianter Funktor.

(2) *Der Funktor*

$$M \quad \mapsto \quad \mathrm{Hom}_R(N,M)$$

ist ein links-exakter kovarianter Funktor.

Beweis. *Wir haben beide Teile bereits gesehen. Beide Aussagen folgen aus der universellen Eigenschaft von exakten Sequenzen 9.5. Aussage* **(1)** *aus dem ersten Teil des Satzes und Aussage* **(2)** *aus dem zweiten.* □

Beispiel 43 *(*Hom*-Funktor und rechts-Exaktheit)*
Betrachte den $\mathbb{Z}$-Modul $N := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ zusammen mit der natürlichen Projektion

$$\pi : \mathbb{Z} \quad \twoheadrightarrow \quad {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\,\mathbb{Z}}$$

Dann ist

$$\{0\} \quad = \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\mathbb{Z}) \quad \xrightarrow{\varphi} \quad \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,N) \quad = \quad \{0, id_N\}$$

mit $\varphi(\alpha) = \pi \circ \alpha$ nicht surjektiv. Insbesondere ist der Funktor $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(N,\,\cdot\,)$ *nicht rechts-exakt, denn sonst wäre φ surjektiv nach Anwenden des Funktors auf die kurze exakte Sequenz*

$$0 \;\to\; \mathrm{Ker}\,\pi \;\to\; \mathbb{Z} \;\to\; {}^{\mathbb{Z}}\!/_{2\,\mathbb{Z}} \;\to\; 0$$

II. Das Tensorprodukt ist rechts-exakt

In diesem Unterabschnitt werden wir zeigen, dass ddas Tensorprodukt ein rechts-exakter Funktor ist. Im Allgemeinen ist das Tensorprodukt aber nicht links-exakt (Siehe Beispiel weiter unten).

Satz 10.4 *Seien R ein Ring und N ein R-Modul, dann ist für alle R-Moduln M das Tensorprodukt $M \otimes_R N$ ebenfalls wieder ein R-Modul. Es gilt: Der Funktor*

$$\begin{aligned} \otimes : (R-Mod) \quad &\to \quad (R-Mod) \\ M \quad &\mapsto \quad M \otimes_R N \end{aligned}$$

ist rechts-exakt.

Beweis. Diese Aussage lässt sich entweder direkt nachrechnen, oder aus der Definitin des Tensorproduktes schöpfen wie folgt: Für R-Moduln M, N, P gilt

$$\operatorname{Hom}_R(M \otimes_R N, P) \;=\; \operatorname{Bil}_R(M \times N, P) \;\cong\; \operatorname{Hom}\big(M, \operatorname{Hom}(N,P)\big)$$

Die erste Gleichheit kennen wir bereits, die Isomorphie folgt aus der Zuordnung

$$\beta \;\mapsto\; \big[m \;\mapsto\; \big(n \mapsto \beta(m,n)\big)\big]$$

für eine R-Bilinearform β. Diese Gleichheiten sind Funktoriell in allen drei Komponenten, also verträglich mit Homomorphismen $M \to M'$, $N \to N'$ und/oder $P \to P'$.
Seien nun N ein R-Modul und $0 \to M_1 \to M_2 \to M_3 \to 0$ eine kurze exakte Sequenz von R-Moduln. Für jeden R-Modul P ist der Funktor

$$M \;\mapsto\; \operatorname{Hom}\big(M, \operatorname{Hom}(N,P)\big)$$

links-exakt und kontravariant. Wenden wir diesen Funktor also auf die exakte Sequenz von oben an, so erhalten wir eine exakte Sequenz

$$0 \;\to\; \operatorname{Hom}\big(M_3, \operatorname{Hom}(N,P)\big) \;\to\; \operatorname{Hom}\big(M_2, \operatorname{Hom}(N,P)\big) \;\to\; \operatorname{Hom}\big(M_1, \operatorname{Hom}(N,P)\big)$$

Mit der gefundenen Gleichheit überträgt sich dies zu einer exakten Sequenz

$$0 \;\to\; \operatorname{Hom}\big(M_3 \otimes_R N, P\big) \;\to\; \operatorname{Hom}\big(M_2 \otimes_R N, P\big) \;\to\; \operatorname{Hom}\big(M_1 \otimes_R N, P\big)$$

Ziehen wir das Ganze nun anhand des $\operatorname{Hom}(\,\cdot\,, P)$-Funktors zurück erhalten wir eine exakte Sequenz

$$M_1 \otimes_R N \;\to\; M_2 \otimes_R N \;\to\; M_3 \otimes_R N \;\to\; 0$$

wie gewünscht. □

Beispiel 44 *(Tensor und links-Exaktheit)*
Betrachte erneut den $\mathbb{Z}$-Modul $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, die Abbildung $\varphi : \mathbb{Z} \ni x \mapsto 2x \in \mathbb{Z}$ sowie die kurze exakte Sequenz

$$0 \;\to\; \mathbb{Z} \;\xrightarrow{\varphi}\; \mathbb{Z} \;\twoheadrightarrow\; \mathbb{Z}/_{\operatorname{Im}\varphi} \;\to\; 0$$

Durch tensorieren erhalte

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} & \xrightarrow{\varphi \otimes id} & \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \\ xy & \mapsto & x \otimes y & \mapsto & 2x \otimes y = x \otimes 2y = x \otimes 0 = 0 \end{array}$$

eine nicht injektive Abbildung, also liefert das Tensorprodukt im Allgemeinen keinen links-exakten Funktor.

Wie oben gezeigt ist das Tensorprodukt nicht für alle Moduln auch links-exakt. Die Fälle, in denen es das aber doch ist, sind so interessant, dass wir den Moduln, für die das Tensorprodukt einen links-exakten Funktor liefert, einen eigenen Namen geben wollen

Definition 10.5 *(Flach)*
Sei R ein Ring. Ein R-Modul N heißt flach, wenn der Funktor

$$\begin{array}{rcl} \otimes : (R - Mod) & \to & (R - Mod) \\ M & \mapsto & M \otimes_R N \end{array}$$

für alle R-Moduln M links-exakt (und damit exakt) ist.

Anmerkung Mit dem oben gezeigten ist es äquivalent zu fordern, dass für alle injektiven R-Modul-Homomorphismen $f : M \hookrightarrow M'$ die Tensorierung mit der Identität auf N

$$f \otimes id_N : M \otimes_R N \quad \hookrightarrow \quad M' \otimes_R N$$

wieder ein injektiver R-Modul-Homomorphismus ist.

Satz 10.6 *Sei R ein Ring, dann ist jeder freie R-Modul flach.*
Insbesondere im Fall, dass $R = K$ ein Körper ist, ist jeder K-Vektorraum flach über K.

Beweis. Sei N ein freier Modul, dann gibt es eine Menge I und einen Isomorphismus

$$N \quad \cong \quad R^{(I)} \quad = \quad \bigoplus_{i \in I} R$$

Für alle R-Moduln M gilt

$$\begin{array}{ccccccc} M \otimes_R N & \cong & M \otimes_R \bigoplus_{i\in I} R & \xrightarrow{\sim} & \bigoplus_{i\in I} (M \otimes_R R) & \cong & \bigoplus_{i \in I} M \\ & & m \otimes (a_i)_{i\in I} & \mapsto & (a_i\, m)_{i\in I} & & \end{array}$$

Bezeichne $e_i := (\dots, 0, 1, 0, \dots) \in R^{(I)}$ und sei $\varphi : M_1 \hookrightarrow M_2$ ein injektiver R-Modul-Homomorphismus, dann ist

$$\begin{array}{ccccccc} m \otimes e_i & \in & M_1 \otimes_R N & \longrightarrow & M_2 \otimes_R N & \ni & \varphi(m) \otimes e_i \\ \uparrow & & \| & & \| & & \uparrow \\ (\dots, 0, m, 0, \dots) & \in & \bigoplus_{i\in I} M_1 & \longrightarrow & \bigoplus_{i \in I} M_2 & \ni & (\dots, 0, \varphi(m), 0, \dots) \\ & & (m_i)_{i\in I} & \mapsto & \big(\varphi(m_i)\big)_{i\in I} & & \end{array}$$

wieder injektiv. □

Hinweis *Der EXKURS zur geometrischen Betrachung von Flachheit fehlt.*

III. Lokalisierung ist exakt

Satz 10.7 *Seien R ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge, dann ist der Funktor*

$$\begin{array}{ccc} (R - Mod) & \to & (S^{-1}R - Mod) \\ M & \mapsto & S^{-1}M \end{array}$$

exakt.

Beweis. Im Abschnitt über Basiswechsel (Satz 7.13) haben wir gezeigt, dass wir die Lokalisierung von Moduln als einen speziellen Basiswechsel

$$\begin{array}{ccc} S^{-1}M & \xrightarrow{\sim} & S^{-1}R \otimes_R M \\ \dfrac{m}{s} & \mapsto & \dfrac{1}{s} \otimes m \\ \dfrac{am}{s} & \leftarrow\!\shortmid & \dfrac{a}{s} \otimes m \end{array}$$

betrachten können. Diese Konstruktion ist verträglich mit Morphismen $M \to M'$. Das heißt die beiden Funktoren $M \mapsto S^{-1}M$ und $M \mapsto S^{-1}R \otimes_R M$ sind „isomorph". Im vorangegangenen Unterabschnitt haben wir gezeigt, dass das Tensorprodukt einen rechts-exakten Funktor liefert, damit ist insbesondere die Lokalisierung rechts-exakt.

Für die links-Exaktheit genügt es nun zu zeigen, dass für jeden injektiven R-Modul-Homomorphismus $\varphi : M \hookrightarrow M'$ der lokalisierte Morphismus $S^{-1}\varphi : S^{-1}M \to S^{-1}(M')$ ebenfalls wieder injektiv ist. Dazu seien $m \in M$ und $s \in S$ mit $\frac{\varphi(m)}{s} = \frac{0}{1}$. Dann gibt es ein $t \in S$ mit $t\,\varphi(m) = 0$. Da φ ein R-Modul-Homomorphismus ist, gilt dann $\varphi(tm) = t\,\varphi(m) = 0$ und damit folgt $tm = 0$, denn φ ist injektiv. Dann gilt aber bereits $\frac{m}{s} = \frac{0}{1}$ in $S^{-1}M$. □

Folgerung 10.8 *Sei R ein Ring und S eine multiplikative Teilmenge, dann ist $S^{-1}R$ ein flacher R-Modul.*

Beweis. Nach dem vorangegangenen Satz ist Lokalisierung ein exakter Funktor. Betrachten wir die Lokalisierung als Basiswechsel, so erhalten wir einen exakten-kovarianten Funktor

$$M \mapsto S^{-1}R \otimes M$$

für alle R-Moduln M. □

Folgerung 10.9 *Seien R ein Ring, M ein R-Modul sowie $N \subseteq M$ ein R-Untermodul von M. Sei weiter S ein multiplikatives System, dann gibt es einen eindeutigen Isomorphismus*

$$S^{-1}M \big/ S^{-1}N \xleftrightarrow{\sim} S^{-1}\left(M/N\right)$$

Beweis. Aus der kurzen exakten Sequenz $0 \to N \to M \to M/N \to 0$ erhalte durch anweden des exakten Lokalisierungs-Funktors eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to S^{-1}N \to S^{-1}M \to S^{-1}\left(M/N\right) \to 0$$

Das heißt insbesondere ist also $S^{-1}N = \mathrm{Ker}(S^{-1}M \to S^{-1}(M/N))$. Nach dem Homomorphiesatz erhalte das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} S^{-1}M \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, two heads] & & S^{-1}\left(M/N\right) \\ & S^{-1}M / S^{-1}N \arrow[ur, "\cong"'] & \end{tikzcd}$$

□

Satz 10.10 *Sei R ein Ring. Es gelten*

(1) *Sei M ein R-Modul, dann sind äquivalent:*

- **(i)** $M = 0$
- **(ii)** $M_\mathfrak{p} = 0$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$
- **(iii)** $M_\mathfrak{m} = 0$ *für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, R$

(2) *Sei $f : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus, dann sind äquivalent:*

- **(i)** $f = 0$
- **(ii)** $f_\mathfrak{p} = 0$ *für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$ *wobei* $f_\mathfrak{p} : M_\mathfrak{p} \to N_\mathfrak{p}$
- **(iii)** $f_\mathfrak{m} = 0$ *für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, R$ *wobei* $f_\mathfrak{m} : M_\mathfrak{m} \to N_\mathfrak{m}$

(3) *Sei $M_1 \to M_2 \to M_3$ eine Sequenz von R-Moduln, dann sind äquivalent:*

- **(i)** $M_1 \to M_2 \to M_3$ *ist exakt*
- **(ii)** $M_{1,\mathfrak{p}} \to M_{2,\mathfrak{p}} \to M_{3,\mathfrak{p}}$ *ist exakt für alle* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}\, R$
- **(iii)** $M_{1,\mathfrak{m}} \to M_{2,\mathfrak{m}} \to M_{3,\mathfrak{m}}$ *ist exakt für alle* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, R$

Beweis. Teil **(1)** haben wir bereits im Abschnitt über die Lokalisierung von Moduln (Satz 6.7) gesehen. Zur zweiten Aussage betrachte die folgende Charakterisierung: Es ist

$$f = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f) = 0$$

Betrachte die exakte Sequenz

$$M \twoheadrightarrow \mathrm{Im}(f) \hookrightarrow N$$

Nach dem vorangegangenen Satz ist lokalisieren ein exakter Funktor, damit sind „(i)⇒(ii)“ und „(ii)⇒(iii)“ sofort klar. Für den Schritt „(iii)⇒(i)“ genügt es nun zu zeigen, dass $\mathrm{Im}(f) = 0$ ist, wenn alle Lokalisierungen von f nach Maximalidealen von R die Nullabbildung sind. Aber nach **(1)** gilt bereits

$$\mathrm{Im}(f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Im}(f)_\mathfrak{m} = 0 \quad \text{für alle } \mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}\, R$$

Auch in der dritten Aussage sind „(i)⇒(ii)“ und „(ii)⇒(iii)“ sofort klar, da Lokalisierung exakt ist. Für den Schritt „(iii)⇒(i)“ schreibe

$$M_1 \xrightarrow{f} M_2 \xrightarrow{g} M_3$$

Diese Sequenz ist genau dann exakt, wenn Sie bei M_2 exakt ist, also wenn $\operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g$ gilt. Im ersten Schritt zeigen wir, dass $\operatorname{Im}(f) \subseteq \operatorname{Ker} g$ gilt. Dies ist genau dann der Fall, wenn $g \circ f = 0$ ist. Nach Teil **(2)** ist das genau dann der Fall, wenn $g_{\mathfrak{m}} \circ f_{\mathfrak{m}} = (g \circ f)_{\mathfrak{m}} = 0$ für alle Maximalideale $m \in \operatorname{Spm} R$ ist. Weil aber nach Voraussetzung die Sequenz

$$M_{1,\mathfrak{m}} \xrightarrow{f_{\mathfrak{m}}} M_{2,\mathfrak{m}} \xrightarrow{g_{\mathfrak{m}}} M_{3,\mathfrak{m}}$$

exakt ist für alle Maximalideale $\mathfrak{m}$ ist diese Bedingung gerade erfüllt. Im zweiten Schritt benutzen wir das bereits gezeigte, um die andere Inklusion zu zeigen. Denn weil $\operatorname{Im} f \subseteq \operatorname{Ker} g$ gilt, gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f = \operatorname{Ker} g \quad &\Longleftrightarrow \quad {}^{\operatorname{Ker} g}\!/\!_{\operatorname{Im} f} = 0 \\ &\overset{(1)}{\Longleftrightarrow} \quad \left({}^{\operatorname{Ker} g}\!/\!_{\operatorname{Im} f}\right)_{\mathfrak{m}} \overset{(*)}{=} 0 \end{aligned}$$

Es genügt also die Gleichheit unter $(*)$ zu zeigen. Dazu betrachte

- Sei $N \subseteq M$ ein Untermodul und F ein exakter kovariantern Funktor, dann bleibt die kanonische kurze exakte Sequenz

  $$0 \longrightarrow N \longrightarrow M \longrightarrow {}^{M}\!/\!_{N} \longrightarrow 0$$

  unter Anwendung von F exakt. Mit dem Homomorphiesatz erhalten wir also ein kommutatives Diagramm

  $$\begin{tikzcd} F(M) \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, "F(\pi)"'] & & F\left({}^{M}\!/\!_{N}\right) \\ & {}^{F(M)}\!/\!_{F(N)} \arrow[ur, "\cong", "\exists!"'] & \end{tikzcd}$$

  Vergleiche dazu auch den Beweis der vorangegangenen Folgerung. Wenden wir dies auf unseren Fall an erhalten wir

  $${}^{(\operatorname{Ker} g)_{\mathfrak{m}}}\!/\!_{(\operatorname{Im} f)_{\mathfrak{m}}} \cong \left({}^{\operatorname{Ker} g}\!/\!_{\operatorname{Im} f}\right)_{\mathfrak{m}}$$

- Sei $\varphi : M \to N$ ein R-Modul-Homomorphismus und F ein exakter kovarianter Funktor, dann ist

  $$\operatorname{Ker} F(\varphi) = F\big(\operatorname{Ker} \varphi\big) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Im} F(\varphi) = F\big(\operatorname{Im} \varphi\big)$$

  Denn $0 \to \operatorname{Ker} \varphi \hookrightarrow M \twoheadrightarrow \operatorname{Im} \varphi \to 0$ ist eine kurze exakte Sequenz. Nach Anwenden Von F ist die neue Sequenz ebenfalls exakt, insbesondere gilt also

  $$\begin{aligned} F\big(\operatorname{Ker} \varphi\big) &= \operatorname{Ker}\Big(F(M) \twoheadrightarrow F\big(\operatorname{Im} \varphi\big)\Big) = \operatorname{Ker}\Big(F(M) \twoheadrightarrow F\big(\operatorname{Im} \varphi \hookrightarrow F(N)\big)\Big) \\ &= \operatorname{Ker} F(\varphi) \end{aligned}$$

  Der Nachweis für das Bild verläuft analog. Angewand auf unseren Fall erhalten wir damit

  $${}^{(\operatorname{Ker} g)_{\mathfrak{m}}}\!/\!_{(\operatorname{Im} f)_{\mathfrak{m}}} \cong {}^{\operatorname{Ker} g_{\mathfrak{m}}}\!/\!_{\operatorname{Im} f_{\mathfrak{m}}}$$

- Da für alle $m \in \operatorname{Spm} R$ die lokalisierte Sequenz exakt ist, gilt insgesamt also für alle Maxhimalideale $\mathfrak{m}$

  $$\left({}^{\operatorname{Ker} g}\!/\!_{\operatorname{Im} f}\right)_{\mathfrak{m}} \cong {}^{(\operatorname{Ker} g)_{\mathfrak{m}}}\!/\!_{(\operatorname{Im} f)_{\mathfrak{m}}} \cong {}^{\operatorname{Ker} g_{\mathfrak{m}}}\!/\!_{\operatorname{Im} f_{\mathfrak{m}}} = 0$$

$\square$

Der Letzte Satz gibt uns Anlass eine Sprechweise einzuführen. Wir haben im letzten Satz drei Eigenschaften gesehen, die wir auf den Lokalisierungen nach Maximalen- oder Primidealen testen können. Wir sprechen in einem solchen Fall von „lokalen“ Eigenschaften. In der Regel sind viele komplizierte Eigenschaften auf den Lokalisierungen nach Maximalidealen einfacher zu verstehen, weil lokale Ringe eine viel simplere Struktur haben.

Unser Ziel ist es nun auf einfeachere Ringe zurückgreifen zu können. In der Tat gibt es viele Eigenschaften die im obigen Sinne lokal sind. Eine davon ist die der Flachheit eines Moduls. Diese Aussage leitet sich aus dem letzten Satz ab wie folgt:

Folgerung 10.11 *Seien R ein Ring und M ein R-Modul, dann sind Äquivalent*

(i) M *ist flach*

(ii) $M_{\mathfrak{p}}$ *ist flach für alle* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$

(iii) $M_{\mathfrak{m}}$ *ist flach für alle* $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$

Beweis. per Ringschluss

„(i)⇒(ii)“: Sei $\varphi : M_1 \hookrightarrow M_2$ ein injektiver $R_{\mathfrak{p}}$-Modul-Homomorphismus. Es ist nun also zu zeigen, dass der $R_{\mathfrak{p}}$-Modul-Homomorphismus $M_1 \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \to M_2 \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls injektiv ist. Fasse dazu M_1 als R-Modul via $R \ni a \mapsto \frac{a}{1} \in R_{\mathfrak{p}}$ auf.

Behauptung Es gibt einen natürlichen Isomorphismus $M_1 \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \cong M_1 \otimes_R M$.

Begründung Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} M_1 \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} & \overset{\sim}{\longleftrightarrow} & M_1 \otimes_R M \\ x \otimes \dfrac{y}{s} = \dfrac{x}{s} \otimes \dfrac{y}{1} & \mapsto & \dfrac{x}{s} \otimes y \\ x \otimes \dfrac{y}{1} & \leftarrow\!\shortmid & x \otimes y \end{array}$$

diese ist Verträglich mit Homomorphismen $f : M_1 \to M_2$, denn das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} M_1 \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} & \overset{f \otimes id_{M_{\mathfrak{p}}}}{\longrightarrow} & M_2 \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \\ \| \wr & & \| \wr \\ M_1 \otimes_R M & \overset{f \otimes id_M}{\longrightarrow} & M_2 \otimes_R M \end{array}$$

kommutiert. Nach Voraussetzung ist M flach, also ist $\varphi \otimes id_M : M_1 \otimes_R M \hookrightarrow M_2 \otimes_R M$ injektiv. Wegen der Kommutativität des Diagramms somit auch $\varphi \otimes id_{M_{\mathfrak{p}}}$.

„(ii)⇒(iii)“: Dieser Schritt ist klar, da alle Maximalideale insbesondere Primideale sind.

„(iii)⇒(i)“: Sei $\varphi : M_1 \hookrightarrow M_2$ ein injektiver R-Modul-Homomorphismus. Diesesmal ist zu zeigen, dass $\varphi \otimes id_M : M_1 \otimes_R M \to M_2 \otimes_R M$ injektiv ist. Übersetzen wir dies in die Sprache der exakten Sequenzen, so ist $\varphi \otimes id_M$ genau dann injektiv, wenn

$$0 \to M_1 \otimes_R M \overset{\varphi \otimes id_M}{\longrightarrow} M_2 \otimes_R M$$

exakt ist. Nach Voraussetzung ist $0 \to M_1 \overset{\varphi}{\longrightarrow} M_2$ exakt. Mit dem Vorangegangenen Satz genügt es nun zu zeigen, dass für alle Maximalideale $\mathfrak{m}$ von R die Sequenz

$$0 \to (M_1 \otimes_R M)_{\mathfrak{m}} \longrightarrow (M_2 \otimes_R M)_{\mathfrak{m}}$$

exakt ist. Es gilt

$$(M_1 \otimes_R M)_{\mathfrak{m}} \;\cong\; (M_1 \otimes_R M) \otimes_R R_{\mathfrak{p}} \;=\; (M_1 \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} (M \otimes_R R_{\mathfrak{p}}) \;\cong\; M_{1,\mathfrak{m}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{m}}$$

Da die Lokalisierung ein exakter Funktor ist, ist auch die Sequenz $0 \to M_{1,\mathfrak{m}} \to M_{2,\mathfrak{m}}$ exakt für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$. Da $M_{\mathfrak{m}}$ nach Voraussetzung flach über $R_{\mathfrak{m}}$ für alle $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R$ ist, folgt die Behauptung. $\square$

Kapitel III

Ganze und endliche Ring-Homomorphismen

11 Definitionen und einfache Eigenschaften

Definition 11.1 *(ganz, ganzer Ringhomomorphismus)*
Sei $\varphi : A \to B$ ein (nicht notwendig injektiver) Ring-Homomorphismus.

(1) *Ein Element $b \in B$ heißt ganz über A bezüglich φ, falls es ein nicht konstantes normiertes Polynom $f \in A[X]$, etwa $f = X^n + a_{i-1}X^{n-1} + \ldots + a_0$, mit*

$$f(b) \quad = \quad b^n + \sum_{i=0}^{n-1} \varphi(a_i) b^i \quad = \quad 0_B$$

gibt.

(2) *Der Homomorphismus φ heißt ganz, wenn für alle $b \in B$ gilt, dass b ganz über A bezüglich φ ist.*

Anmerkung Ist $R = K$ ein Körper, so genügt in **(1)** die Forderung $f \neq 0$, da wir dann Normiertheit mittels durchdividieren mit dem höchsten Koeffizienten immer erreichen können.

In einem leichten Misbrauch der Notation schreiben wir oft einfach $a \in B$ anstelle von $\varphi(a) \in B$.

Beispiel 45 *(Ganzheit)*

- *Ist $\varphi : K \to L$ ein Homomorphismus von Körpern, und ist $x \in L$ so gilt: x ist genau dann ganz über K, wenn x algebraisch über K ist, also wenn es ein $f \in K[X] \setminus K$ mit $f(x) = 0$ gibt.*
- *Betrachte $\varphi : \mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$. Sei $x \in \mathbb{Q}$, dann gilt: x ist genau dann ganz über $\mathbb{Z}$, wenn x bereits in $\mathbb{Z}$ liegt.*

  Begründung *Angenommen $x \in \mathbb{Z}$, dann ist x Nullstelle von $X - x$, also ganz über $\mathbb{Z}$ (Diese Richtung gilt offensichtlich in allen Ringen). Sei nun $x \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von einem normierten Polynom $f \in \mathbb{Z}[X]$, so ist $x \in \mathbb{Z}$ nach dem Lemma von Gauß.*
- *Betrachte $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$. In diesem Fall ist das primitive Element der Körpererweiterung $\sqrt{2}$ ganz über $\mathbb{Z}$, denn $\sqrt{2}$ ist Nullstelle von $X^2 - 2$.*

Definition 11.2 *(Endlicher Ringhomomorphismus)*
Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. φ heißt endlich, falls B als A-Modul endlich erzeugt ist. Dabei fasse B via $(a, b) \mapsto \varphi(a) \cdot b$ als einen A-Modul auf.

Erinnerung B heißt als A-Modul endlich erzeugt, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ und einen surjektiven A-Modul-Homomorphismus $A^n \twoheadrightarrow B$ gibt.
Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, dann ist B als A-Algebra endlich erzeugt, falls es endlich viele Elemente $b_1, \dots, b_n \in B$ so gibt, dass für alle A-Unteralgebren $C \subseteq B$ mit $b_1, \dots, b_n \in C$ das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\varphi"'] & B \\ & C \arrow[u, hook, "A\text{-Unteralgebra}"'] \end{tikzcd}$$

Äquivalent können wir fordern, dass es einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\psi : A[X_1, \dots, X_n] \ni X_i \mapsto b_i \in B$$

gibt, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A[X_1, \dots, X_n] \arrow[rr, two heads, "\psi"] & & B \\ & A \arrow[ul] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Satz 11.3 *(Cramersche Regel)*
Sei R ein Ring und $M \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(R)$ eine Matrix mit einträgen in R. Bezeichne $\tilde{M}$ die Komplementärmatrix, das heißt

$$\tilde{M} \;=\; (\tilde{m}_{i,j}) \;:=\; (-1)^{i+j} \cdot \det M^{(i,j)}$$

dabei bezeichne $M^{(i,j)}$ den Minor von M, welcher durch streichern der j-ten Zeile und i-ten Spalte von M entsteht. Bezeichne E_n die $(n \times n)$-Einheitsmatrix. Dann gilt

$$M\tilde{M} \;=\; \tilde{M}M \;=\; \det(M) \cdot E_n$$

Beweis. In der Linearen Algebra haben wir diesen Satz für den Fall, dass R ein Körper ist, bewiesen. Betrachte nun den Ringhomomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}[X_{1,1}, X_{1,2}, \dots, X_{n,n}] & \xrightarrow{\varphi} & R \\ X_{i,j} & \mapsto & m_{i,j} \end{array}$$

und bezeichne $\underline{X} := (X_{i,j})_{i,j} \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{Z}[X_{1,1}, \dots, X_{n,n}])$. Dann gelten

- $\varphi(\det \underline{X}) \;=\; \det M$
- $\varphi(\underline{X}) \;=\; (\varphi(X_{i,j}))_{i,j} \;=\; M$
- $\varphi(\tilde{\underline{X}}) = \tilde{M}$

Falls $\underline{X}\tilde{\underline{X}} = \tilde{\underline{X}}\underline{X} = \det \underline{X} \cdot E_n$ gilt, so folgt die Behauptung des Satzes.
Der Polynomring über einem Integritätsbereich ist selbst wieder ein Integritätsring. Wir können also insbesondere den Quotientenkörper $K := \mathrm{Frac}(\mathbb{Z}[X_{1,1}, \ldots, X_{n,n}])$ bilden. Weil dieser den Grundring vollständig enthält und die Matrizen $\underline{X}$ und $\tilde{\underline{X}}$ Einträge im Polynomring haben, folgt bereits die Behauptung. $\square$

Satz 11.4 *(Satz von Cayley-Hamilton) [Version für kommutative Ringe]*
Seien R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul, $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal sowie $f \in \mathrm{End}_R(M)$ ein R-Modul-Endomorphismus auf M mit

$$f(M) \ \subseteq \ \mathfrak{a} M \ \subseteq \ M$$

Dann gibt es ein normiertes Polynom

$$\chi \ = \ X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_0 \ \in R[X]$$

derart, dass alle a_i in $\mathfrak{a}$ liegen und gilt

$$\chi(f) \ = \ f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \ldots + a_0 \ = \ 0 \quad \in \mathrm{End}_R(M)$$

Beweis. Seien $x_1, \ldots, x_n \in M$ erzeuger von M über R. Da die Bilder von f wieder in M liegen, finden wir insbesondere für die Bilder des Erzeugendensystems eine Lineardarstellung, etwa

$$f(x_j) \ = \ \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} x_j$$

Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} \big(\underbrace{\delta_{i,j} f \, - \, a_{i,j}}_{=:\, m_{i,j}}\big)(x_i) \ = \ 0 \qquad \text{wobei } \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

und die $m_{i,j}$ liegen im kommutativen Unterring $R[f]$ des nicht kommutativen Rings $\mathrm{End}_R(M)$ mit

$$R[f] \ := \ \mathrm{Im}\big(R[X] \ni X \mapsto f \in \mathrm{End}_R(M)\big) \ = \ \left\{ \sum_{i=0}^{N} a_i f^{l_i} \,\middle|\, a_i \in R \right\}$$

Wir erhalten also eine $(n \times n)$-Matrix $M := (m_{i,j})$ mit Einträgen in $R[f]$. Bezeichne $\tilde{M}$ die Komplementärmatrix, dann folgt aus der Cramerschen Regel

$$M\tilde{M} \ = \ \tilde{M}M \ = \ \det(M) \cdot E_n$$

und damit gilt

$$\begin{pmatrix} \det(M)(x_1) \\ \vdots \\ \det(M)(x_n) \end{pmatrix} \ = \ \det(M) \cdot E_n \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ = \ \tilde{M} \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} m_{1,j} x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} m_{n,j} x_j \end{pmatrix} \ = \ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist also $\det(M)(x_i) = 0$ für alle i und somit $\det M = 0$. Indem wir die Determinante $\det M$ ausschreiben erhalten wir das gewünschte Polynom. $\square$

Folgerung 11.5 *(Lemma von Nakayama)*
Sei R ein Ring, M ein endlich erzeugter R-Modul und $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \operatorname{jac}(R)$.
Ist $\mathfrak{a} M = M$ so folgt $M = 0$.

Beweis. Wir haben das Lemma und seine Folgerungen bereits im gleichnamigen Abschnitt besprochen und insbesondere in Lemma 6.1 bewiesen. Wir wollen hier einen alternen Beweise mit den soeben erarbeiteten Mitteln bereitstellen:

Setze im Satz von Cayley-Hamilton 11.4 den Endomorphismus $f = id_M$, dann wegen $\mathfrak{a} M = M$ nach Voraussetzung auch $f(M) = M \subseteq \mathfrak{a} M$ erfüllt. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gibt es dann ein normiertes Polynom $\chi \in R[X]$ dessen Koeffizienten, etwa a_i, mit Ausnahme des Leitkoeffizienten sämtlich in $\mathfrak{a}$ liegen und dass $\chi(f) = 0$ erfüllt. Es gilt also

$$0 \;=\; \chi(f) \;=\; f^n + a_{n-1} f^{n-1} + \ldots + a_0 \;\overset{f=id}{=}\; \underbrace{(1 + a_{n-1} + \ldots + a_0)}_{x \in R} \cdot id_M$$

Mit anderen Worten heißt das, es gilt $xm = 0$ für alle $m \in M$. Weiterhin ist

$$a \;:=\; a_{n-1} + \ldots + a_0 \;\in\; \mathfrak{a} \;\subseteq\; \operatorname{jac}(R)$$

Nach Lemma 4.2 ist

$$\operatorname{jac}(R) \;=\; \left\{ x \in R \,\middle|\, \forall y \in R : 1 - xy \in R^\times \right\}$$

also gilt insbesondere $x = 1 + a = 1 - a(-1) \in R^\times$ und somit finden wir ein $y \in R$ mit $yx = 1$. Damit folgt nun aber

$$m \;=\; 1 \cdot m \;=\; y \cdot x \cdot m \;=\; y \cdot 0 \;=\; 0$$

für alle $m \in M$. Also insgesamt $M = 0$. $\square^2$

Lemma 11.6 *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $b \in B$. Dann sind äquivalent:*

(a) *b ist ganz über A bezüglich φ*

(b) *Die von b erzeugte Unteralgebra $A[b] = \operatorname{Im} \psi$ wobei*

$$\psi : A[X] \ni X \;\mapsto\; b \in B$$

ist als A-Modul endlich erzeugt. Das heißt insbesondere ist $A \xrightarrow{\varphi} A[b]$ ein endlicher Ringhomomorphismus und $\operatorname{Im} \varphi \subseteq A[b]$.

(c) *Es gibt einen Unterring $C \subseteq B$, der als A-Modul endlich erzeugt ist, mit $\varphi(A) \subseteq C$ und $b \in C$.*

Beweis. per Ringschluss

„(a)⇒(b)“: Sei $f \in A[X]$ ein normiertes Polynom mit $f(b) = 0$, etwa

$$f \;=\; X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i X^i$$

Dann wird $A[b]$ als A-Modul von den Elementen $1, b, \ldots, b^{n-1}$ erzeugt, denn

$$b^n \;=\; -\sum_{i=0}^{n-1} \varphi(a_i)\, b^i$$

und damit ist $A[b]$ als A-Modul endlich erzeugt.

„(b)⇒(c)“: Dieser Fall ist klar, denn setze $C = A[b]$ um die Existenz zu zeigen.

„(c)⇒(a)“: Ohne Einschränkung ist $b \notin A$, denn sonst ist x eine Nullstelle von $X - x \in A[X]$ und ohnehin ganz. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : C & \to & C \\ c & \mapsto & bc \end{array}$$

Setze $\mathfrak{a} := (1) \lhd A$ dann ist f ein A-Endomorphismus mit $f(C) = bC \subseteq \mathfrak{a}\,C$ da $b \in C$ nach Voraussetzung. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton 11.4 erhalte nun ein normiertes Polynom $\chi \in A[X]$ mit $\chi(f) = 0$ etwa

$$\chi \;=\; X^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, X^i$$

Es gilt

$$b^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i\, b^i \;=\; \chi(b) \;=\; \chi\big(f(1)\big) \;=\; \chi(f)\,(1) \;=\; 0$$

und damit haben wir ein normiertes Polynom aus $A[X]$ gefunden, von dem b eine Nullstelle ist. Damit ist b ganz über A. □

Satz 11.7 *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, dann sind äqzuvalent:*

(1) *φ ist endlich, das heißt B ist als A-Modul endlich erzeugt.*

(2) *φ ist ganz und B ist als A-Algebra endlich erzeugt.*

Beweis. Wenn B als A-Algebra endlich erzeugt heißt es gibt einen surjektiven Ringhomomorphismus

$$\psi : A[X_1, \ldots, X_n] \;\ni\; X_i \;\mapsto\; b_i \;\in\; B$$

insbesondere sind dann die b_i ein erzeugendensystem von B.

„(1)⇒(2)“: Wähle im vorigen Lemma Teil (c) $C = B$. Dies ist möglich, da φ nach Voraussetzung endlich und somit B als A-Modul endlich erzeugt ist. Dann sind aber alle $b \in B$ ganz über A und damit ist φ ganz.
Da B als A-Modul endlich erzeugt ist, gibt es ein A-Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_n$ in B. Damit gilt

$$\psi : A[X_1, \ldots, X_n] \;\ni\; X_i \;\mapsto\; b_i \;\in\; B$$

ist ein surjektiver Ringhomomorphismus, und B ist als A-Algebra endlich erzeugt.

„(2)⇒(1)“: Auch hierfür nutze das vorangegangene Lemma. Da φ nach Voraussetzung ganz ist, ist nach dem Lemma $A[b]$ für alle $b \in B$ endlich erzeugt als A-Modul. Insbesondere gilt das für das Erzeugendensystem $b_1, \ldots, b_n$ von B als A-Algebra. Wende nun das Lemma erneut an, und erhalte, dass $A[b_1, b_2]$ als $A[b_1]$-Modul und damit insbesondere auch als A-Modul endlich erzeugt ist. Induktiv sehen wir, dass $A[b_1, \ldots, b_n]$ als A-Modul endlich erzeugt ist. Nach Voraussetzung gibt es ein

$$\psi : A[X_1, \ldots, X_n] \;\ni\; X_i \;\mapsto\; b_i \;\in\; B$$

aber offensichtlich ist $\mathrm{Im}(\psi) = A[b_1, \ldots, b_n]$ also ist $B \cong A[b_1, \ldots, b_n]$. □

Mit anderen Worten haben wir im letzten Schritt des Beweises das folgende gesehen: In der Kette

$$A \xrightarrow{\phi_1} A[b_1] \xrightarrow{\phi_2} \dots \xrightarrow{\phi_n} A[b_1,\dots,b_n] \cong B$$

sind die ϕ_i alle ganze Ringhomomorphismen und auch dir Verkettung $\phi_n \circ \dots \circ \phi_1 = \varphi$ ist ganz. Dies gilt allgemein:

Satz 11.8 *Seien $\varphi : A \to B$ und $\psi : B \to C$ ganze Ringhomomorphismen. Dann ist auch die Verkettung $\psi \circ \varphi : A \to C$ ein ganzer Ringhomomorphismus.*

Beweis. Sei $x \in C$ gegeben. x ist nach Voraussetzung ganz über B, also gibt es ein normiertes Polynom $f = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \ldots + b_0 \in B[X]$ mit $f(x) = 0$. Da φ ganz ist, sind alle b_i ganz über A. Damit sind aber

$$A \xrightarrow{\varphi} A[b_0,\dots,b_{n-1}] \qquad \text{und} \qquad A[b_0,\dots,b_{n-1}] \xrightarrow{\psi} A[\psi(b_0),\dots,\psi(b_{n-1}),x]$$

endliche Ringhomomorphismen. Damit ist $\psi \circ \varphi$ endlich und somit nach Satz ganz. $\square$

Eine analoge Tatsache gilt auch für das Verketten endlicher Ringhomomorphismen:

Satz 11.9 *Seien $\varphi : A \to B$ und $\psi : B \to C$ endliche Ringhomomorphismen. Dann ist auch die Verkettung $\psi \circ \varphi : A \to C$ ein endlicher Ringhomomorphismus.*

Beweis. B, C sind nach Voraussetzung je endlich erzeugt, etwa $B =< b_1,\dots,b_n >_A$ als A-Modul und $C =< c_1,\dots,c_m >_B$ als B-Modul. Dann ist

$$C = < b_1c_1, b_1c_2,\dots,b_1c_m,b_2c_1,\dots,b_nc_m >_A$$

als A-Modul und somit ist C als A-Modul endlich erzeugt. $\square$

Definition und Folgerung 11.10 *(Ganzer Abschluss)*
Sei $\varphi : A \to B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann ist die Menge

$$\overline{A_B}^{\varphi} := \left\{ b \in B \,\middle|\, b \text{ ganz über } A \text{ bezüglich } \varphi \right\} \subseteq B$$

ein Unterring von B, der $\mathrm{Im}(\varphi) = \varphi(A)$ enthält.
Wir bezeichnen diese Menge als den ganzen Abschluss von A in B (bezüglich φ).

Beispiel 46 *Sei K ein Körper mit* char $K \neq 2,3$ *und betrachte den Ringhomomorphismus*

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : K[X,Y] &\to K[T] \\ X &\mapsto T^2 \\ Y &\mapsto T^3 \end{aligned}$$

dann ist $R := \mathrm{Im}\,\tilde{\varphi} = K[T^2,T^3]$ ein Unterring von $K[T]$. Insbesondere kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} K[X,Y] \arrow[rr, two heads, "\tilde{\varphi}"] \arrow[dr] & & K[T^2,T^3] \\ & K[X,Y]/(X^3-Y^2) \arrow[ur, "\cong"] & \end{tikzcd}$$

Bezeichne φ die natürliche Inklusion von $K[T^2,T^3]$ nach $K[T]$, dann ist der ganze Abschluss von $K[T^2,T^3]$ in $K[T]$ bezüglich φ ganz $K[T]$, denn T ist ganz über $K[T^2,T^3]$ als Nullstelle des normierten Polynoms $X^2 - T^2 \in K[T^2,T^3][X]$.

Satz 11.11 *Sei R ein faktorieller Ring, also ein Integritätsring in dem jedes Element eine eindeutige Zerlegung in Primelemente besitzt, und $K = \operatorname{Frac} R$ sein Quotientenkörper. Bezeichne $\varphi : R \hookrightarrow K$ die natürliche Inklusion. Es gelten:*

(1) *Der ganzen Abschluss von R in K (bezüglich φ) ist R. In Formeln: $\overline{R_K}^{\varphi} = R$*

(2) *Ist L/K eine algebraische Körpererweiterung, dann ist x für alle $x \in L$ genau dann ganz über R, wenn das Minimalpolynom $\operatorname{mipo}_{x,K}$ von x über K bereits in $R[X]$ liegt.*

Beweis. Sei $\frac{x}{s} \in K$ ein gekürzter Bruch, also $x, s \in R$ mit $s \neq 0$ und $\operatorname{ggT}(x, s) = 1$, und ganz über R, etwa

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} + \ldots + a_o \quad = \quad 0$$

mit $a_i \in R$. Multipliziere diese Gleichung mit s^n und erhalte

$$\begin{aligned} x^n + a_{n-1}\, s\, x^{n-1} + a_{n-2}\, s^2\, x^{n-2} + \ldots + a_o\, s^n &= 0 \\ \Rightarrow \quad s \cdot \big(- a_{n-1}\, x^{n-1} - a_{n-2}\, s\, x^{n-2} - \ldots - a_o\, s^{n-1} \big) &= x^n \end{aligned}$$

Also wird x^n von s geteilt. da aber der Bruch nach Voraussetzung gekürzt war, muss $s \in R^{\times}$ gelten und damit ist $\frac{x}{s} \in R$ womit wir Teil **(1)** gezeigt haben, denn die Annahme der Bruch sei gekürzt beschränkt die Allgemeinheit des Beweises nicht.

Bei der zweiten Aussage ist eine richtung trivial, denn ist das Minimalpolynom von einem $x \in L$ ein normiertes Polynom in $R[X]$, so ist x per Definition ganz über R.

Für die andere Richtung sei $x \in L$ ganz über R. Nach Definition existiert dann ein normiertes Polynom $f \in R[X]$ mit $f(x) = 0$. Da das Minimalpolynom von x das normierte Polynom mit dem kleinsten Grad in $K[X]$ ist, welches x als Nullstelle hat, wird f als Polynom in $K[X]$ vom Minimalpolynom geteilt. Nach dem Satz von Gauß ist dann $\operatorname{mipo}_{x,K} \in R[X]$. □

Definition 11.12 *(ganz abgeschlossen)*

- *Sei $\iota : A \hookrightarrow B$ eine Ringerweiterung. Dann heißt A ganz abgeschlossen in B, falls A selber bereits der ganze Abschluss von A in B ist, also falls $\overline{A_B}^{\iota} = A$ gilt.*
- *Ein Integritätsring heißt ganz abgeschlossen (oder auch normal), falls er ganz abgeschlossen in seinem Quotientenkörper ist.*

Beispiel 47 *Sei R ein Faktorieller Ring, dann haben wir im vorangegangenen Satz gesehen, dass der ganzen Abschluss von R in seinem Quotientenkörper bereits R ist, mit anderen Worten: Faktorielle Ringe sind ganz abgeschlossen.*

Wir erinnern uns an das Vorherige Beispiel: Sei K ein Körper, dann ist $K[T^2, T^3]$ nicht ganz abgeschlossen in $K[T]$, denn T ist, wie gesehen, ganz über $K[T^2, T^3]$, liegt aber nicht bereits in diesem Ring.

Folgerung 11.13 *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, dann ist der ganze Abschluss $\overline{A_B}^{\varphi}$ von A in B ganz abgeschlossen in B.*

Beweis. Ist $x \in B$ ganz über $\overline{A_B}^{\varphi}$, so ist

$$\xi : \; A \;\xrightarrow{\varphi}\; \overline{A_B}^{\varphi} \;\xrightarrow{\psi}\; \overline{A_B}^{\varphi}[x]$$

als Verkettung ganzer Ringhomomorphismen wieder ein ganzer Ringhomomorphismus. Also ist insbesondere x ganz über A und liegt damit nach Definition des ganzen Abschlusses bereits in $\overline{A_B}^{\varphi}$. □

Anmerkung ψ aus dem Beweis ist nach Lemma 11.6 endlich und daher nach Satz 11.7 ganz, wie behauptet.

Satz 11.14 *Sei $\varphi : A \to B$ ein ganzer [endlicher] Ringhomomorphismus.*

(1) *Ist $\mathfrak{b} \lhd B$ ein Ideal, so ist auch der Induzierte Ringhomomorphismus*

$$\overline{\varphi} : A/_{\varphi^{-1}(\mathfrak{b})} \longrightarrow B/_{\mathfrak{b}}$$

ganz [endlich].

(2) *Ist $S \subseteq A$ eine multiplikative Teilmenge, so ist auch der induzierte Ringhomomorphismus*

$$S^{-1}\varphi : S^{-1}A \to \varphi(S)^{-1}B$$

ganz [endlich]. Wir misbrauchen an dieser Stelle die Notation und schreiben $S^{-1}B$ anstelle von $\varphi(S)^{-1}B$.

(3) *Ist C eine A-Algebra, so ist auch hier der induzierte Ringhomomorphismus*

$$id_C \otimes \varphi : C \otimes_A A \longrightarrow C \otimes_A B$$

wieder ganz [endlich].

Beweis. Wir beweisen den Satz nur für ganze Ringhomomorphismen. Der endliche Fall lässt sich entweder analog direkt nachrechnen oder auf den ganzen Fall zurückführen.

zu (1): Sei $\overline{x} \in B/\mathfrak{b}$ und $x \in B$ ein Lift (Repräsentant). Dann ist, wei φ ganz ist, x ganz über A, etwa

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

für $a_i \in A$. Dann gilt nach Übergang in den Faktorring auch

$$\overline{x}^n + \overline{a_{n-1}}\,\overline{x}^{n-1} + \ldots + \overline{a_0} = 0$$

das heißt $\overline{x}$ ist eine Nullstelle von

$$X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \overline{a_i} X^i \in A/_{\varphi^{-1}(\mathfrak{b})}[X]$$

Da $\overline{x}$ beliebig war, sind alle $\overline{x}$ in $B/\mathfrak{b}$ ganz, und damit ist $\overline{\varphi}$ ganz.

zu (2): Sei $\frac{x}{s} \in S^{-1}B$, dann ist $x \in B$ und damit ganz über A, etwa

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

Dann gilt aber auch

$$\left(\frac{x}{s}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{s}\left(\frac{x}{s}\right)^{n-1} + \ldots + \frac{a_0}{s^n} = 0_{S^{-1}A}$$

zu (3): Die Elemente von $C \otimes_A B$ haben die Form

$$\sum_i c_i \otimes b_i \quad = \quad \sum_i (c_i \otimes 1) \cdot (1 \otimes b_i)$$

Daher genügt es zu zeigen, dass die Elementartensoren der Form $c \otimes 1$ und $1 \otimes b$ ganz über $C = C \otimes_A A$ sind.

- Elementartensoren der Form $c \otimes 1$ liegen im Bild von $id_C \otimes \varphi$ und nach Definition ist

$$\mathrm{Im}(id_C \otimes \varphi) \subseteq \overline{(C \otimes_A B)_C}^{id_C \otimes \varphi}$$

- Ist $f \in A[X]$ normiert mit $f(b) = 0$, also $b \in B$ ganz über A, so können wir f als Polynom in $C[X]$ auffassen. Es gilt dann

$$f(1 \otimes b) \quad = \quad 1 \otimes f(b) \quad = \quad 1 \otimes 0 \quad = \quad 0$$

  also ist $1 \otimes b$ ganz über C. Da nach voraussetzung alle $b \in B$ ganz über A sind, sind alle Elementartensoren der Form $1 \otimes b$ ganz. □

12 Das „going-up“ Theorem

In diesem Abschnitt wollen wir zu endlichen Ringhomomorphismen $\varphi : A \to B$ die assoziierte Abbildung

$${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \longrightarrow \operatorname{Spec} A$$

auf den Primspektren betrachten und zeigen, dass alle Fasern von ${}^a\varphi$ endlich sind und dass ${}^a\varphi$ abgeschlossen ist, das heißt (bezüglich der Topologie auf $\operatorname{Spec} B$) abgeschlossene Teilmengen werden auf (bezüglich der Toplologie auf $\operatorname{Spec} A$) abgeschlossene Teilmengen abgebildet.

Satz 12.1 *Sei $\varphi : A \hookrightarrow B$ ein injektiver und ganzer Ringhomomorphismus von Integritätsringen. Dann ist A genau dann ein Körper, wenn B ein Körper ist.*
In diesem Fall ist φ algebraisch, also B/A eine algebraische Körpererweiterung.

Beweis. Sei A ein Körper und $b \in B \setminus \{0\}$, dann ist $A \hookrightarrow A[b]$ endlich (denn φ ist ganz), also ist der injektive A-Vektorraum-Homomorphismus

$$A[b] \ni x \quad \mapsto \quad bx \in A[b]$$

auch surjektiv. Also gibt es ein $x \in A[b]$ mit $bx = 1$. Dann ist b wegen $A[b] \hookrightarrow B$ eine Einheit in B. Da wir $b \neq 0$ beliebig gewählt haben, ist B also ein Körper. Die Rückrichtung (B ein Körper) zeigen Sie in den Übungen. □

Folgerung 12.2 *Sei $\varphi : A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus und $\mathfrak{q} \lhd B$ ein Primideal. Setze $\mathfrak{p} := \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$, dann gilt:*

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} A \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{q} \in \operatorname{Spm} B$$

Beweis. Nach Satz 11.14 induziert φ einen ganzen und injektiven Ringhomomorphismus

$$A/\mathfrak{p} \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$$

Wir wissen bereits, dass $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) =^a \varphi(\mathfrak{q})$ ein Primideal von A ist. Damit sind $A/\mathfrak{p}$ und $B/\mathfrak{q}$ Integritätsringe. Es gilt also

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm}(A) \quad \Leftrightarrow \quad A/\mathfrak{p} \text{ Körper} \overset{12.2}{\Leftrightarrow} B/\mathfrak{q} \text{ Körper} \quad \Leftrightarrow \quad \mathfrak{q} \in \operatorname{Spm} B$$

$\square$

Beispiel 48 *Ist der Ringhomomorphismus nicht ganz, so stimmt die Äquivalenz im Allgemeinen nicht merhr, denn betrachte*

$$\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$$

Wir wissen, dass ein Ring R genau dann ein Körper ist, wenn (0) ein Maximalideal ist. 0 ist maximal in $\mathbb{Q}$, aber nicht in $\mathbb{Z}$.

Satz 12.3 *Sei $\varphi : A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus und seien $\mathfrak{q}, \mathfrak{q}' \in \operatorname{Spec} B$ Primideale mit $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{q}'$ sowie $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Primideal mit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}')$. Dann sind $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{q}'$ gleich.*

Beweis. Setze $S := A \setminus \mathfrak{p}$ und betrachte die Lokalisierung $A_\mathfrak{p} = S^{-1}A$. Im Sinne von $\varphi(S)^{-1}B = S^{-1}B$ schreiben wir auch $B_\mathfrak{p}$ obwohl $\mathfrak{p}$ nicht nowendig ein Primideal von B ist. Nach Satz 11.14 induziert φ dann einen ganzen Ringhomomorphismus

$$\varphi_\mathfrak{p} : A_\mathfrak{p} \ni \frac{x}{s} \mapsto \frac{\varphi(x)}{\varphi(s)} \in B_\mathfrak{p}$$

Der Ring $A_\mathfrak{p}$ ist lokal mit maximalem Ideal $\mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$. Bezeichne

$$\eta := \mathfrak{q} B_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}' B_\mathfrak{p} =: \eta'$$

Erinnerung: Wir haben eine Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S^{-1}B & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{ \mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \cap S = \varnothing \} \\ \mathfrak{P} & \mapsto & \mathfrak{P} \cap B \\ \mathfrak{q} S^{-1}B & \leftarrow & \mathfrak{q} \end{array}$$

Behauptung $\mathfrak{q}' \cap \varphi(S) = \varnothing$

Begründung. Angenommen die Behauptung wäre falsch, dann gäbe es ein $s \in S$ mit $\varphi(s) \in \mathfrak{q}'$ also $s \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}') = \mathfrak{p}$. Dies ist aber ein Widerspruch, denn die oben genannte Bijetion gilt auch in $S^{-1}A = A_\mathfrak{p}$. $\diamond$

Damit sind also η, η' Primideale in $B_\mathfrak{p}$ und es gilt nach der Bijektion $\eta \cap B = \mathfrak{q}$ und $\eta' \cap B = \mathfrak{q}'$. Ziehen wir diese Ideale anhand von $\varphi_\mathfrak{p}$ noch weiter zurück, so erhalten wir

$$\eta \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{q} A_\mathfrak{p} = \eta' \cap A_\mathfrak{p}$$

Mit der vorangegangenen Folgerung sind dann sowohl η als auch η' Maximalideale in $B_\mathfrak{p}$ und damit gilt $\eta = \eta'$ also auch $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}'$. $\square$

Theorem 12.4 *Sei $\varphi : A \hookrightarrow B$ ein ganzer und injektiver Ringhomomorphismus, dann ist die assoziierte Abbildung*

$$\begin{aligned} {}^a\varphi : \operatorname{Spec} B &\to \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

surjektiv, das heißt für jedes Primideal $\mathfrak{p} \lhd A$ gibt es ein Primideal $\mathfrak{q}$ in B mit $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Primideal, dann betrachte $A_\mathfrak{p}$ und $B_\mathfrak{p}$ wie im vorherigen Beweis. Erhalte ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook, "\varphi", "ganz"'] \arrow[d, "\alpha"'] & B \arrow[d, "\beta"] \\ A_\mathfrak{p} \arrow[r, hook, "\varphi_\mathfrak{p}", "ganz"'] & B_\mathfrak{p} \end{tikzcd}$$

Die Injektivität erhält sich, denn Lokalisierung ist ein exakter Funktor. Es ist $\mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}$ das einzige maximale Ideal im lokalen Ring $A_\mathfrak{p}$. Sei nun $\eta \in \operatorname{Spm} B$[1]. Dann ist $\eta \cap A_\mathfrak{p}$ wieder maximal in $A_\mathfrak{p}$ also $\eta \cap A_\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}$. Für $\mathfrak{q} := \beta^{-1}(\eta)$ gilt dann

$$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \;=\; \varphi^{-1}\left(\beta^{-1}(\eta)\right) \;=\; \alpha^{-1}(\mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}) \;=\; \mathfrak{p}$$

$\square$

Bemerkung 12.5 *Sei $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus, dann ist φ endlich, denn B ist als A-Modul von 1_B erzeugt. Damit ist φ auch ganz und* $\operatorname{Spec} B = V(\operatorname{Ker} \varphi) \subseteq \operatorname{Spec} A$.
Wir erhalten also eine injektive Abbildung auf den Spektren.

Theorem 12.6 *(„going-up“)*
Sei $\varphi : A \hookrightarrow B$ ein ganzer und injektiver Ringhomomorphismus. Seien

$$\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{p}_n \subset A \quad \text{und} \quad \mathfrak{q}_1 \subseteq fq_2 \subseteq \ldots \subseteq fq_m \subset B$$

zwei Ketten von Primidealen mit $m < n$ und $\mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i$ für alle $i \leq m$.
Dann gibt es Primideale $\mathfrak{q}_{m+1}, \ldots, \mathfrak{q}_n \in \operatorname{Spec} B$ mit

$$\mathfrak{q}_m \subseteq \mathfrak{q}_{m+1} \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{q}_n \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{q}_i \cap A = \mathfrak{p}_i \text{ für alle } i = 1, \ldots, n$$

In Worten: *Zu jeder Kette von Primidealen in A existiert eine Kette von Primidealen in B mit „gleichen Eigenschaften“.*

Anmerkung Wenn wir bei dem Ketten darauf achten, dass $m \geq 1$ ist, also dass es mindestens ein Primideal in B gibt, mit dem wir starten können, können wir die Voraussetzung, dass φ injektiv ist, fallen lassen.

[1]Es gibt ein Maximalideal η in B, denn da φ injektiv und $0 \notin S$ ist, ist $0 \notin \varphi(S)$ und somit ist $B_\mathfrak{p} \neq \{0\}$

Beweis. (per Induktion über $l = n - m$)
Start bei $l = 1$: Ohne Einschränkung sei $n = 2$ und $m = 1$. φ induziert einen ganzen und injektiven Ringhomomorphismus

$$\overline{\varphi} : A/\mathfrak{p}_1 \hookrightarrow B/\mathfrak{q}_1$$

Weil $\mathfrak{p}_1 \subseteq \mathfrak{p}_2$ ist, ist $\mathfrak{p}_2 / \mathfrak{p}_1$ ein Primideal von $A/\mathfrak{p}_1$. Nach dem vorangegangenen Theorem gibt es ein $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B/\mathfrak{q}_1$ mit $\mathfrak{q} \cap A/\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{p}_2 / \mathfrak{p}_1$. Setze nun

$$\mathfrak{q}_2 \quad \pi^{-1}\mathfrak{P} \qquad \text{wobei } \pi_B \twoheadrightarrow B/\mathfrak{q}_1$$

Fahre nun induktiv fort. □

Satz 12.7 *Sei $\varphi : A \to B$ ein ganzer Ringhomomorphismus, dann ist die assoziierte Abbildung ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ abgeschlossen, das heißt für alle abgeschlossenen Teilmengen $Z \subseteq \operatorname{Spec} B$ ist ${}^a\varphi(Z) \subseteq \operatorname{Spec} A$ abgeschlossen.*

Bevor wir diesen Satz zeigen, erleichtern wir uns die Beweisarbeit mit dem folgenden

Lemma 12.8 *Seien $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus und $\mathfrak{b} \lhd B$ ein Ideal, dann ist*

$$\overline{{}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)}^A \quad = \quad V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big)$$

Beweis. Erinnerung: Es ist

$$V(\mathfrak{b}) \quad := \quad \big\{\, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \,\big|\, \mathfrak{q} \supseteq \mathfrak{b} \,\big\} \quad \subseteq \quad \operatorname{Spec} B$$

Wir zeigen die beiden Inklusionen. Für „$\subseteq$" genügt es ${}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big) \subseteq V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big)$ zu zeigen, denn die rechte Menge ist abgeschlossen und der Abschluss von ${}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)$ ist als die kleinste abgeschlossene Menge definiert, die ${}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)$ enthält. Sei also $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})$, mit anderen Worten sei $\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{b}$. Da φ^{-1} inklusionserhaltend ist, folgt damit $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{b})$. Mit anderen Worten, es gilt

$${}^a\varphi(\mathfrak{q}) \quad \in \quad V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big)$$

Erinnerung: Das Radiakl von einem Ideal $\mathfrak{a} \in A$ ist

$$\sqrt{\mathfrak{a}} \quad := \quad \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p} \quad = \quad \big\{\, a \in A \,\big|\, \exists\, n \in \mathbb{N}_0 \,:\, a^n \in \mathfrak{a} \,\big\}$$

Für die Richtung „$\supseteq$" betrachte zunächst

$$\begin{aligned} V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big) \quad &= \quad V\big(\sqrt{\varphi^{-1}(\mathfrak{b})}\big) \quad = \quad V\big(\varphi^{-1}(\sqrt{\mathfrak{b}})\big) \\ &= \quad V\Big(\varphi^{-1}\Big(\bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{q}\Big)\Big) \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass

$$V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big) \quad \subseteq \quad \bigcap_{\substack{\mathfrak{a} \lhd A \\ V(\mathfrak{a}) \supseteq {}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))}} V(\mathfrak{a}) \quad =: \quad \overline{{}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)}^A$$

Sei dazu $\mathfrak{a} \lhd A$ ein Ideal mit $V(\mathfrak{a}) \supseteq {}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))$. Dann gilt $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq \mathfrak{a}$ für alle $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})$. Also gilt

$$\mathfrak{a} \;\subseteq\; \bigcap_{\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \quad\Rightarrow\quad V\Big(\bigcap_{\mathfrak{q}\in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q})\Big) \;=\; V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big) \;\subseteq\; V(\mathfrak{a})$$

□

Beweis von Satz 12.7 Nach Voraussetzung ist φ ganz. Sei $Z \subseteq \operatorname{Spec} B$ eine abgeschlossene Menge, etwa $Z = V(\mathfrak{b})$ für ein Ideal $\mathfrak{b} \in B$. Betrachte

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \arrow[r, hook, "\psi"'] & B/\mathfrak{b} \end{tikzcd} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} SpecA & \operatorname{Spec} B \arrow[l, "{}^a\varphi"'] \\ \operatorname{Spec} A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \arrow[u] & \operatorname{Spec} B/\mathfrak{b} \arrow[l, two heads, "{}^a\psi"] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Damit erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} SpecA & \operatorname{Spec} B \arrow[l, "{}^a\varphi"'] \\ V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big) \arrow[u, hook] & V(\mathfrak{b}) \arrow[u, hook] \\ \operatorname{Spec} A/\varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \arrow[u, "\cong"'] & \operatorname{Spec} B/\mathfrak{b} \arrow[l, "{}^a\psi"] \arrow[u, "\cong"] \end{tikzcd}$$

also gilt ${}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big) = V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big)$. Damit ist ${}^a\varphi(Z)$ also insbesondere Abgeschlossen, da von der Form $V(\,\cdot\,)$. □

Bemerkung 12.9 *Sei $\varphi : A \hookrightarrow B$ ein injektiver Ringhomomorphismus. Dann gilt*

$$\overline{\operatorname{Im}^a\varphi} \;=\; \overline{{}^a\varphi(\operatorname{Spec} B)} \;=\; \overline{{}^a\varphi\big(V(0)\big)} \;=\; V\big(\operatorname{Ker}\varphi\big) \;=\; V(0) \;=\; \operatorname{Spec} A$$

Ist also φ ganz und injektiv, dann ist ${}^a\varphi$ abgeschlossen und es gilt

$$\operatorname{Im}^a\varphi \;=\; \overline{\operatorname{Im}^a\varphi} \;=\; \operatorname{Spec} A$$

also ist ${}^a\varphi$ surjektiv.

Satz 12.10 *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ein Primideal und bezeichne $\kappa(\mathfrak{p}) := \operatorname{Frac} A/\mathfrak{p}$ den Restklassenkörper von A in $\mathfrak{p}$. Betrachte die assoziierten Diagramme*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[r] & \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B \end{tikzcd} \quad\rightsquigarrow\quad \begin{tikzcd} SpecA & \operatorname{Spec} B \arrow[l, "{}^a\varphi"'] \\ \operatorname{Spec} \kappa(\mathfrak{p}) \arrow[u, "f"'] & \operatorname{Spec}\big(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B\big) \arrow[l] \arrow[u, "g"] \end{tikzcd}$$

Dann gelten $\operatorname{Im} f = \mathfrak{p}$ und g induziert eine Bijektion

$$\operatorname{Spec}\big(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B\big) \;\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\; {}^a\varphi^{-1}(\mathfrak{p})$$

Beweis. Betrachte die Sequenz der natürlichen Abbildungen

$$A \xrightarrow{\tau} A_\mathfrak{p} \xrightarrow{\pi} A_\mathfrak{p}/_{\mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}} = \kappa(\mathfrak{p})$$

Wir erhalten hierzu eine assoziierte Sequenz auf den entsprechenden Spektren

$$\operatorname{Spec} A \xleftarrow{{}^a\tau} \operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \xleftarrow{{}^a\pi} \operatorname{Spec} \kappa(\mathfrak{p})$$

mit $f = \tau^{-1} \circ \pi^{-1}$. Damit gilt

$$\operatorname{Im} f = f\big((0)\big) = \tau^{-1}\big(\pi^{-1}(0)\big) = \tau^{-1}(\mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$$

Betrachte nun die Faser von ${}^a\varphi$ in $\mathfrak{p}$: Bezeichne $S := \varphi(A \setminus \mathfrak{p}) \subseteq B$ dann ist S eine multiplikative Teilmenge von B und es gilt

$$\begin{aligned}\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B &= A_\mathfrak{p}/_{\mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}} \otimes_A B \cong A_\mathfrak{p}/_{\mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}} \otimes_{A_\mathfrak{p}} A_\mathfrak{p} \otimes_A B \\ &\cong A_\mathfrak{p}/_{\mathfrak{p}\, A_\mathfrak{p}} \otimes_{A_\mathfrak{p}} S^{-1}B \cong S^{-1}B/_{\mathfrak{p}\, S^{-1}B}\end{aligned}$$

Damit erhalten wir für das Spektrum

$$\begin{aligned}\operatorname{Spec}\big(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B\big) &= \operatorname{Spec}\Big(S^{-1}B/_{\mathfrak{p}\, S^{-1}B}\Big) \\ &= \big\{\, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} S^{-1}B \,\big|\, \varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q} \,\big\} \\ &= \big\{\, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \,\big|\, \mathfrak{q} \cap S = \varnothing \wedge \varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q} \,\big\} \\ &= \big\{\, \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \,\big|\, \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p} \,\big\}\end{aligned}$$

Somit erhalten wir durch ${}^a\varphi(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ genau die von g induzierte Bijektion. $\square$

Definition 12.11 *(Artinscher Ring)*
Ein Ring R heißt artinsch, oder Artin-Ring, falls jede absteigende Kette von Idealen

$$\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \mathfrak{a}_2 \supseteq \dots$$

in R stationär wird, das heißt wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathfrak{a}_n = \mathfrak{a}_{n+m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt.

Beispiel 49 *Körper sind artinsch, da Körper nur (0) und (1) als Ideale besitzen. Ebenso sind alle endlichen Ringe artinsch.*

Unser Ring-Standartbeispiel $\mathbb{Z}$ hingegen ist zwar noethersch[2] aber nicht artinsch, betrachte zum Beispiel

$$(2) \supseteq (4) \supseteq (8) \supseteq (16) \supseteq \dots$$

Lemma 12.12 *Sei A ein Körper und $\varphi : A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus, dann ist B ein artinscher Ring.*

Beweis. Wir können B als endlichen A-Modul, also insbesondere als A-Vektorraum endlicher Dimension auffassen. Insbesondere sind unter dieser Sichtweise alle Ideale $\mathfrak{b} \lhd B$ Untervektorraüme von B. Da B endliche Dimension hat, wird jede absteigende Kette von Untervektorräumen stationär. $\square$

[2] Vergleich Algebra I (Ein Ring ist noethersch, wenn jede aufsteigende Kette von Idealen stationär wird) oder das Kapitel IV über noethersche Ringe.

Satz 12.13 *Sei B ein Artin-Ring, dann gelten*

- *Jedes Primideal von B ist ein Maximalideal von B.*
- *Es gibt nur endlich viele Maximalideale in B.*

Beweis. Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} B$ ein Primideal, dann ist der Faktorring $C := B/\mathfrak{p}$ offensichtlich wieder artinsch. Daher wird insbesondere die Kette

$$C \supseteq (x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^3) \supseteq \ldots$$

für $x \in C \setminus \{0\}$ stationär. Das heißt es gibt ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $x^n \in x^{n+1}$ etwa $x^n = yx^{n+1}$. Da C als Faktor nach einem Primideal ein Integritätsbereich und $x \neq 0$ ist, gilt

$$x^n(1-xy) = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-yx = 0 \quad \Rightarrow \quad x \in C^\times$$

Damit ist C aber ein Körper und also $\mathfrak{p}$ ein maximales Ideal.

Für den Beweis der Endlichkeit bemerke zuerst: Jede Menge $\mathcal{M} \neq \varnothing$ von Idealen in einem artinschen Ring besitzt bezüglich „$\subseteq$“ ein minimales Element. Ansonsten könnten wir zu jedem Element $\mathfrak{a}_0 \in \mathcal{M}$ ein echt kleineres $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{M}$ finden und so eine absteigende Kette von Idealen konstruieren, die nicht stationär würde. Dies kann aber nicht sein, da wir einen Artin-Ring vorausgesetzt haben.

Wir wollen diese Vorüberlegung nun zum Beweis von $\sharp \operatorname{Spm} B < \infty$ benutzen. Sei dazu

$$\mathcal{M} := \left\{ \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \wedge \mathfrak{m}_i \in \operatorname{Spm} B \right\}$$

die Menge von endlichen Schnitte von Maximalidealen. Wenn B nicht der Nullring ist, so ist $\mathcal{M}$ nicht leer. Bezeichne $\mathfrak{a} \in \mathcal{M}$ das minimale Element, dann gibt es $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n \in \operatorname{Spm} B$ mit

$$\mathfrak{a} = \bigcap_{i=1}^{n} \mathfrak{m}_i$$

und es gilt $\operatorname{Spec} B = \{\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n\}$. Denn sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} B$ ein maximales Ideal, dann muss $\mathfrak{m} \cap \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$ gelten, denn sonst wäre $\mathfrak{a}$ nicht minimal. Also gilt $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. Damit gibt es aber ein $\mathfrak{m}_i$ mit $\mathfrak{m}_i \subseteq \mathfrak{m}$. Da beides Maximalideale sind, müssen diese gleich sein. □

Theorem 12.14 *Sei $\varphi : A \to B$ ein endlicher Ringhomomorphismus, dann hat die assoziierte Abbildung endliche Fasern, das heißt für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ ist die Faser*

$${}^a\varphi^{-1}(\mathfrak{p}) = \left\{ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B \,\middle|\, {}^a\varphi(\mathfrak{q}) = \mathfrak{q} \right\}$$

eine endliche Menge.

Beweis. Nach Satz 12 genügt es zu zeigen, dass $\operatorname{Spec}\big(\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B\big)$ für alle $\mathfrak{p} \in A$ endlich ist, denn dann gibt es keine echten Inklusionen zwischen den Primidealen in $\kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$.

Andrerseits ist mit φ auch die Abbildung $\kappa(\mathfrak{p}) \to \kappa(\mathfrak{p}) \otimes_A B$ endlich. Deshalb genügt es zu zeigen, dass falls A ein Körper ist, $\operatorname{Spec} B$ eine endliche Menge ist. Mit Lemma 12.12 ist B artinsch. Nach Satz 12.13 ist das Maximalspektrum $\operatorname{Spm} B$ eine endliche Menge und $\operatorname{Spec} B = \operatorname{Spm} B$. Also ist dann auch das Primspektrum endlich. □

13 Noethers Normalisierungslemma und Hilberts Nullstellensatz

das erste Ziel in diesem Abschnitt ist zu zeigen, dass für einen Körper K und eine endlich erzeugte K-Algebra R stets ein ganzer und injektiver K-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi:\ K[X_1,\dots,X_n] \ \hookrightarrow\ R$$

für ein $n \in \mathbb{N}_0$ existiert.

Bemerkung 13.1 *Ist K ein Körper, R eine endlich erzeugte K-Algebra und*

$$\varphi:\ K[X_1,\dots,X_n] \ \hookrightarrow\ R$$

K-Algebra-Homomorphismus, dann ist φ genau dann ganz, wenn φ endlich ist. Denn R ist automatisch endlich erzeugt über $\operatorname{Im}\varphi$ und damit folgt die Äquivalenz nach Satz 11.7.

Geometrische Veranschaulichung
Sei etwa

$$R \ =\ K[Y_1,\dots,Y_m]\big/I \qquad \text{mit}\ \ I := (f_1,\dots,f_r)$$

über einem algebraisch abgeschlossenen Körper K. Die durch $\varphi : K[X_1,\dots,X_n] \hookrightarrow R$ induzierte Abbildung auf den Spektren

$$^a\varphi : \left\{ y \in K^m \,\middle|\, f_j(y) = 0 \text{ für } j = 1,\dots,r \right\} \ \twoheadrightarrow\ K^n$$

ist surjektiv und hat endliche Fasern. (Das die Spektren von dieser Form sind, müssen wir noch zeigen.)

Beispiel 50 *(Noether-Normalisierung)*

- *Sei K ein Körper und $R = K[Y_1,\dots,Y_m]/(f)$ mit einem normierten Polynom $f \in K[Y_1,\dots,Y_{m-1}][Y_m]$. Dann ist die Abbildung*

  $$K[Y_1,\dots,Y_{m-1}] \ \longrightarrow\ [Y_1,\dots,Y_m]\big/(f)$$

  ganz und injektiv.
  Begründung: *Sei A ein beliebiger Ring und $f \in A[X]$ normiert, dann existiert eine eindeutige Division mit Rest durch f. Also ist $A[X]/(f)$ ein freier A-Modul mit Basis $\{1, X, X^2, \dots, X^{\deg f - 1}\}$.*

- *Der Ringhomomorphismus*

  $$\varphi : K[X] \ \hookrightarrow\ K[X,Y]\big/XY$$

  ist nicht ganz, das heißt Y ist nicht ganz über $K[X]$, denn die assoziierte Abbildung

  $$^a\varphi : \operatorname{Spec} K[X,Y]\big/(XY) \ \to\ \operatorname{Spec} K[X]$$

  hat in (0) keine endliche Faser, und damit ist φ nicht endlich - also nach obiger Bemerkug auch nicht ganz.

- *Der Ringhomomorphismus*

  $$\varphi : K[X] \ \hookrightarrow\ K[X,Y]\big/XY-1 \ \cong\ K[X,X^{-1}]$$

  ist nicht ganz, denn die assoziierte Abbildung

  $$^a\varphi : \operatorname{Spec} K[X,X^{-1}] \ \hookrightarrow\ \operatorname{Spec} K[X]$$

  ist weder surjektiv noch abgeschlossen.

Theorem 13.2 *(Noethers Normalisierungslemma)*
Sei K ein Körper und $R \neq 0$ eine endlich erzeugte K-Algebra. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$ und einen endlichen und injektiven K-Algebra-Homomorphismus

$$\varphi : K[X_1, \ldots, X_n] \quad \hookrightarrow \quad R$$

Beweis. Seien $y_1, \ldots, y_m \in R$ erzeuger von R als K-Algebra, dann ist der K-Algebra-Homomorphismus

$$\psi : K[Y_1, \ldots, Y_m] \quad \ni \quad Y_i \quad \mapsto \quad y_i \quad \in \quad R$$

surjektiv. Ist ψ auch injektiv, so sind wir mit $\varphi = \psi$ und $n = m$ fertig.

Andernfalls führe eine Induktion nach m durch. Der Induktionsanfang für $m = 1$ ist dabei trivial, denn da ψ nich injektiv ist, ist $n = m - 1 = 0$ und offensichtlich ist $K \hookrightarrow R$ endlich und somit auch ganz.

Nimm nun an, das Normalisierungslemma gelte für alle durch $m - 1$ Elemente erzeugte K-Algebren. Es genügt nun zu zeigen, dass es eine K-Unteralgebra $S \subseteq R$ so gibt, dass gelten

(i) S ist als K-Algebra durch $m - 1$ Elemente erzeugt

(ii) Der Homomorphismus $S \hookrightarrow R$ ist ganz und injektiv.

Um solch ein S zu finden wähle ein $f \in \operatorname{Ker} \psi$ mit $f \neq 0$. Schreibe

$$f(Y_1, \ldots, Y_m) \quad = \sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} a_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} \cdot Y_1^{\nu_1} \cdots Y_m^{\nu_m} \quad \text{und setze} \quad c \; := \; \max\{\nu_i | a_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} \neq 0\}$$

Damit definiere $r_i := (c + 1)^i$ für $i = 1, \ldots, m$. Betrachte die folgende Gleichung im Polynomring $K[Y_1, Z_2, \ldots, Z_m]$

$$\begin{aligned} & f(Y_1, Z_2 + Y_1^{r_2}, Z_3 + Y_1^{r_3}, \ldots, Z_m + Y_1^{r_m}) \\ & \quad = \sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} a_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} \cdot Y_1^{\nu_1} \cdot (Z_2 + Y_1^{r_2})^{\nu_2} \cdots (Z_m + Y_1^{r_m})^{\nu_m} \\ & \quad = \underbrace{\sum_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} a_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} \cdot Y_1^{\nu_1 + r_2\nu_2 + \ldots + r_m\nu_m}}_{=:h} \; + \; g(Y_1, Z_2, \ldots, Z_m) \end{aligned}$$

wobei

$$\deg(g) \quad < \quad \max\left\{ \nu_1 + r_2\nu_2 + \ldots + r_m\nu_m \,\middle|\, a_{(\nu_1, \ldots, \nu_m)} \neq 0 \right\} \quad = \quad \deg(h)$$

Insbesondere ist der höchste Koeffizient von $f(Y_1, Z_2 + Y_1^{r_2}, Z_3 + Y_1^{r_3}, \ldots, Z_m + Y_1^{r_m})$ in Y_1 eine Einheit in K (also $\neq 0$). Setze nun $z_i := y_i - y_1^{r_i}$ für $i = 2, \ldots, m$ und $S := K[z_2, \ldots, z_m]$. Dann ist **(i)** offensichtlich erfüllt, aber auch **(ii)** ist erfüllt, denn es gilt

$$R \quad = \quad K[y_1, y_2 \ldots, y_m] \quad = \quad K[y_1, z_2, \ldots, z_m]$$

und y_1 ist ganz über S, denn $f(Y_1, z_2 + Y_1^{r_2}, z_3 + Y_1^{r_3}, \ldots, z_m + Y_1^{r_m})$ ist Ganzheitsgleichung für y_1.
$\square$

Definition 13.3 *(Jacobsonscher Ring)*
Ein Ring R heißt jacobsonsch, wenn alle Primideale Schnitt der Maximalideale sind, die sie enthalten. In Formeln

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{p} \;=\; \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m} \\ \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} R}} \mathfrak{m}$$

Theorem 13.4 *(Hilberts Nullstellensatz)*
Sei K ein Körper und A eine endlich erzeugte K-Algebra, dann gelten

(1) *A ist jacobsonsch.*

(2) *Für alle Maximalideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ ist $K \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die zweite Aussage. Sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ und betrachte die kanonischen Abbildungen

$$K[X_1, \ldots, X_m] \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} A \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} A/\mathfrak{m}$$

Damit ist $A/\mathfrak{m}$ als K-Algebra endlich erzeugt. Nach Noethers Normalisierungslemma 13.2 gibt es einen injektiven und ganzen (bzw. endlichen) K-Algebra-Homomorphismus

$$K \;\hookrightarrow\; K[T_1, \ldots, T_n] \overset{\varphi}{\hookrightarrow} A/\mathfrak{m}$$

Da $\mathfrak{m}$ ein Maximalideal ist, ist $A/\mathfrak{m}$ ein Körper, und wegen der Kette der injektiven Abbildungen ist dann auch $K[T_1, \ldots, T_n]$ ein Körper. Also ist $n = 0$ und wir haben eine endliche Abbildung $\varphi : K \hookrightarrow A/\mathfrak{m}$ gefunden. Dann ist aber $A/\mathfrak{m}$ als K-Vektorraum von endlicher Dimension.

Für die erste Aussage bemerke zunächst: Ist K'/K eine endliche Körpererweiterung und ist $\varphi : A \to K'$ ein K-Algebra-Homomorphismus, so ist $\operatorname{Im} \varphi$ ein Integritätsbereich, der endlich über einem Körper und folglich selbst ein Körper ist. Wegen $\operatorname{Im} \varphi \cong A/\operatorname{Ker} \varphi$ ist somit $\operatorname{Ker} \varphi$ ein Maximalideal in A.

Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ wegen

$$\operatorname{Spm} A/\mathfrak{p} \;=\; \{\ \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A \mid \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{m}\ \}$$

können wir ohne Einschränkung annehmen, dass A ein integritätsring und $\mathfrak{p} = 0$ ist. In diesem Fall genügt es $\operatorname{jac}(A) = 0$ zu zeigen. Nimm dazu an, es gäbe ein $x \in \operatorname{jac}(A) \setminus \{0\}$. Dann ist die A-Algebra $A[x^{-1}] = A_x$ nicht der Nullring und offensichtlich endlich erzeugt. Sei nun $\eta \in \operatorname{Spm} A[x^{-1}]$ ein Maximalideal, dann ist nach den schon gezeigten Teil **(2)** $A[x^{-1}]/\eta$ ein endlicher Erweiterungskörper von K. Insbesondere ist also

$$\mathfrak{m} \;:=\; \operatorname{Ker}\left(A \to A[x^{-1}] \to A[x^{-1}]/\eta\right)$$

ein maximales Ideal. Nach Konstruktion ist aber $x \notin \mathfrak{m}$ und dies wiederspricht der Annahme, dass $x \in \operatorname{jac}(A)$ und damit in allen maximalidealen von A liegt. □

Allgemein gilt: Ist A ein Ring und $S \subseteq A$ ein multiplikatives System, dann ist $A \to S^{-1}A$ ein endlicher Ringhomomorphismus. Falls A eine endlich erzeugte K-Algebra über einem Körper K ist, so gilt sogar

$$\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} S^{-1}A \qquad \Rightarrow \qquad \mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$$

Folgerung 13.5 *Seien K ein Körper und $\varphi : A \to B$ ein Homomorphismus von endlich erzeugten K-Algebren sowie $\eta \in \operatorname{Spm} B$ ein maximales Ideal. Dann ist $\varphi^{-1}(\eta)$ ein maximales Ideal von A.*

Beweis. Es gilt

$$\varphi^{-1}(\eta) \quad = \quad \operatorname{Ker}\left(A \to B \to {}^{B}\!/_{\eta}\right)$$

und dies ist mit der selben Begründung wie im vorangegangenen Beweis ein maximales Ideal. □

Folgerung 13.6 *(Hilberts Nullstellensatz für algebraisch abgeschlossene Körper)*
Sei K ein algebraisch abgeschlossenenr Körper und A eine endlich erzeugte K-Algebra, dann ist $K = A/\mathfrak{m}$ für alle Maximalideale $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$.

Beweis. Nach Hilberts Nullstellensatz ist $A/\mathfrak{m}$ eine endliche Körpererweiterung von K. Endliche Körpererweiterungen sind algebraisch. Da K algebraisch abgeschlossen ist, folgt die Behauptung. □

Folgerung 13.7 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper und $\mathfrak{m} \lhd K[T_1, \ldots, T_n]$ ein maximales Ideal, dann gibt es $t_1, \ldots, t_n \in K$, so dass*

$$\mathfrak{m} \quad = \quad \left(T_1 - t_, \ldots, T_n - t_n\right)$$

gilt.

Beweis. Betrachte den K-Algebren-Homomorphismus

$$\varphi : K[T_1, \ldots, T_n] \;\longrightarrow\; {}^{K[T_1, \ldots, T_m]}\!/_{\mathfrak{m}} \;=\; K$$

setze $t_i = \varphi(T_i)$, dann gilt

$$(T_1 - t_1, \ldots, T_n - t_n) \;\subseteq\; \mathfrak{m} \;=\; \operatorname{Ker}\varphi$$

da das Erzeugendensystem der $T_i - t_i$ offensichtlich minimal für $\mathfrak{m}$ ist, folgt die Behauptung. □

Folgerung 13.8 *Sei K ein algebraisch abgeschlossener Körper, dann gilt*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spm}\left(K[T_1, \ldots, T_m]\right) & \stackrel{\sim}{\longleftrightarrow} & K^m \\ (T_1 - t_1, \ldots, T_m - t_m) & \leftarrow\!\shortmid & (t_i)_{1 \leq i \leq m} \end{array}$$

Dies induziert für $f_1, \ldots, f_r \in K[T_1, \ldots, T_m]$ eine Bijektion

$$\left\{\, \mathfrak{m} \in \operatorname{Spec} K[T_1, \ldots, T_m] \,\middle|\, (f_1, \ldots, f_r) \subseteq \mathfrak{m} \,\right\} \;\stackrel{1:1}{\longleftrightarrow}\; \left\{\, t \in K^m \,\middle|\, f_j(t) = 0 \;\forall j \,\right\}$$

Denn sei $(t_1, \ldots, t_m)$ so ein Tupel aus der rechten Seite, dann ist

$$(f_1, \ldots, f_m) \in \operatorname{Ker}(T_i \mapsto t_i) = (T_1 - t_1, \ldots, T_m - t_m)$$

□

Kapitel IV

Noethersche Ringe

14 Definitionen und einfache Eigenschaften

Definition und Bemerkung 14.1 *(Noetherscher Ring)*
Sein Ring R heißt noethersch, wenn er eine der drei folgenden äquivalenten Eigenschaften besitzt:

(i) *Jede aufsteigende Kette von Idealen in R wird stationär.*

(ii) *Jedes Ideal in R ist endlich erzeugt.*

(iii) *Jede nicht-leere Menge von Idealen aus R besitzt ein bezüglich „$\subseteq$" maximales Element.*

Beweis. Wir zeigen die Äquivalenz per Ringschluss, aber in der unüblichen Richtung.

„(i)⇒(iii)": Angenommen es gäbe eine Menge $\mathcal{M}$ von Idealen aus R, die nicht-leer ist und kein maximales Element enthält. Wähle ein $\mathfrak{a}_0 \in \mathcal{M}$ beliebig. Da $\mathfrak{a}_0$ nicht maximal ist, gibt es ein $\mathfrak{a}_1 \in \mathcal{M}$ mit $\mathfrak{a}_0 \subsetneq \mathfrak{a}_1$. Das Ideal $\mathfrak{a}_1$ ist ebenfalls nicht maximal, wir finden also ...
Insgesamt konstruieren wir auf diese Weise eine aufsteigende Kette von Idealen, die nicht stationär wird, was einen Widerspruch zu **(i)** liefert.

„(iii)⇒(ii)": Sei $\mathfrak{a} \lhd R$ ein Ideal. Setze

$$\mathcal{M} \quad := \quad \left\{ \mathfrak{b} \lhd R \;\middle|\; \mathfrak{b} \text{ ist endlich erzeugt und } \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} \right\}$$

Die so definerte Menge $\mathcal{M}$ von Idealen ist nicht leer, da sie etwa immer (0) enthält. Nach Voraussetzung gibt es dann ein maximales Element $\mathfrak{a}' \in \mathcal{M}$. Wäre $\mathfrak{a}' \neq \mathfrak{a}$ so gäbe es ein $b \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{a}'$ und wir erhalten ein weiteres Element $\mathfrak{a}' + bR \in \mathcal{M}$. Da aber $b \notin \mathfrak{a}'$ ist, wäre dieses Element echt größer als $\mathfrak{a}'$ und wir hätten einen Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{a}'$.

„(ii)⇒(i)": Sei $\mathfrak{a}_0 \subseteq \mathfrak{a}_1 \subseteq \ldots$ eine aufsteigende Kette von Idealen in R. Dann ist

$$\bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{a}_i \quad \lhd \quad R$$

nach Voraussetzung endlich erzeugt, etwa durch $b_1, \ldots, b_r \in R$. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ mit $b_1, \ldots, b_r \in \mathfrak{a}_n$, dann gilt

$$\mathfrak{a}_n \quad = \quad \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathfrak{a}_i$$

und die Kette wird stationär bei n. $\square$

Beispiel 51 *Standartbeispiele für (nicht) noethersche Ringe:*

- *Hauptidealringe sind noehtersch nach (ii), denn jedes Ideal wird von einem Element (also insbesondere endlich) erzeugt.*
- *Körper sind noethersch, denn sie besitzen nur die Ideale* (0) *und* (1).
- *Ist* R *ein noetherscher Ring und* $\mathfrak{a} \lhd R$ *ein Ideal, so ist der Faktorring* $R/\mathfrak{a}$ *noethersch nach (i), denn wir haben eine inklusionserhaltende Bijektion*

$$\left\{ \mathfrak{b} \lhd {}^{R}\!/\!_{\mathfrak{a}} \right\} \quad \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \quad \left\{ \tilde{\mathfrak{b}} \lhd R \,\middle|\, \mathfrak{a} \subseteq \tilde{\mathfrak{b}} \right\}$$

- *Wir werden später sehen, dass der Polynomring in einer Variablen über einem noetherschen Ring wieder noethersch ist. (Hilberts Basissatz)*
- *Sei* K *ein Körper, und* I *eine Menge mit* $\sharp I = \infty$, *dann ist*

$$K[\, X_i \,|\, i \in I \,]$$

nicht noethersch, denn das Ideal $(X_i | i \in I)$ *ist nicht endlich erzeugt.*

/!\ Warnung Ist R ein Ring mit Unterring $S \subseteq R$, dann ist im Allgemeinen S nicht noethersch, auch wenn R noethersch ist. Betrachte beispielsweise

$$S \;:=\; K[\, X_i \,|\, i \in \mathbb{N} \,] \;\subseteq\; \operatorname{Frac} S \;=:\; R$$

Die definition von noetherschen Ringen lässt sich auf natürliche Weise auf R-Moduln erweitern:

Definition und Bemerkung 14.2 *(Notherscher Modul)*
Sei R *ein (nicht notwendig noetherscher) Ring. Ein* R*-Modul* M *heißt noethersch, falls er eine der drei folgenden äquivalenten Eigenschaften besitzt:*

(i) *Jede aufsteigende Kette von* R*-Untermoduln in* M *wird stationär.*

(ii) *Jeder* R*-Untermodul von* M *ist endlich erzeugt.*

(iii) *Jede nicht-leere Menge von* R*-Untermoduln von* M *besitzt ein bezüglich „$\subseteq$“ maximales Element.*

Beweis. Wörtlich wie bei den Ringen, tausche nur *Ideal* gegen *Untermodul*. □

Bemerkung 14.3 *Sei* R *ein noetherscher Ring, dann ist* R *auch als* R*-Modul noethersch.*

Satz 14.4 *Sei* R *ein Ring. Es gelten*

- *Sei* $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *eine kurze exakte Sequenz von* R*-Moduln, dann ist* M *genau dann noethersch, wenn* M' *und* M'' *noethersch sind.*
- *Sei* R *noethersch und* M *ein endlich erzeugter* R*-Modul, dann ist* M *noethersch.*
- *Sei* R *noethersch und* S *ein multiplikatives System, dann ist* $S^{-1}R$ *noehtersch.*

Beweis. Die ersten beiden Punkte zeigen Sie in der Übung. Für den dritten Punkt betrachte die natürliche Abbildung

$$\tau : R \ni r \mapsto \frac{r}{1} \in S^{-1}R$$

Sei $\mathfrak{b} \lhd S^{-1}R$ ein Ideal. Setze $\mathfrak{a} := \tau^{-1}(\mathfrak{b})$. Da R nothersch ist, folgt nach (ii) der Definition, dass $\mathfrak{a}$ endlich erzeugt ist, etwa durch $a_1, \ldots, a_r \in A$. Dann ist aber $\mathfrak{b}$ von den $\tau(a_i)$ erzeugt, denn sei $\frac{a}{s} \in \mathfrak{b}$, dann ist auch $\tau(a) = s \cdot \frac{a}{s} \in \mathfrak{b}$. Damit erhalten wir für $a \in \mathfrak{a}$ eine Darstellung $a = \sum b_i a_i$ mit $b_i \in R$. Via τ erhalte also

$$\frac{a}{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i\, a_i}{s} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{s} \cdot \frac{a_i}{s}$$

also ist b endlich erzeugt in $S^{-1}R$. □

15 Hilberts Basissatz

Theorem 15.1 *(Hilberts Basissatz)*
Sei A ein noetherscher Ring, dann ist der Polynomring in einer Variablen $A[X]$ über A ebenfalls noethersch.

Beweis. Für den Beweis des Satzes nutzen wir die Eigenschaft (ii) der Definition von noethersch aus, also dass alle Ideale endlich erzeugt sind. Sei $\mathfrak{a} \lhd A[X]$ ein Ideal, dann setze

$$I := \{0\} \cup \{\, a \in A \mid a \text{ ist Leitkoeffizient von einem } f \text{ aus } \mathfrak{a} \,\}$$

Dann ist I ein Ideal in A, denn sei $a \in I$, etwa als Leitkoeffizient von

$$f = a\, X^n + a_1\, X^{n-1} + a_2\, X^{n-2} + \ldots + a_n \in \mathfrak{a}$$

Für $b \in A$ gilt dann entweder $ab = 0$ und $0 \in I$, oder $ab \neq 0$. Im letzteren Fall ist aber

$$bf = b\, a\, X^n + b\, a_1\, X^{n-1} + b\, a_2\, X^{n-2} + \ldots + b\, a_n \in \mathfrak{a}$$

also ist $ba \in I$ als Leitkoeffizient von $bf \in A[X]$. Seien $a, b \in I \setminus \{0\}$, etwa als Leitkoeffizienten von

$$f = a\, X^n + a_1\, X^{n-1} + a_2\, X^{n-2} + \ldots + a_n \qquad \text{und } f = b\, X^m + b_1\, X^{m-1} + b_2\, X^{m-2} + \ldots + b_m$$

Ohne Einschränkung sei $m \leq n$, dann ist

$$f + X^{n-m} g = (a+b)X^n + (a_1+b_1)X^{n-1} + \ldots + (a_m+b_m)X^{n-m} + a_{m+1}X^{n-m-1} + \ldots + a_n \in \mathfrak{a}$$

und somit ist $a + b \in I$ und I ist wie behauptet ein Ideal in A.

Nach Voraussetzung ist A noethersch, also ist I insbesondere endlich erzeugt. Etwa durch die Elemente $a_1, \ldots, a_n \in A \setminus \{0\}$. Wähle für $1 \leq i \leq n$ ein $f_i \in \mathfrak{a}$ mit Leitkoeffizienten a_i und setze

$$r := \max_{1 \leq i \leq m} \{\deg f_i\} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{a}' := (f_1, \ldots, f_n) \subseteq \mathfrak{a}$$

Behauptung: $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}' + \left(\mathfrak{a} \cap < 1, X, \ldots, X^{r-1} >_A \right)$
Begründung Sei $f = a\, X^m + h(X) \in \mathfrak{a}$ mit $\deg h < m$ und $a \neq 0$. Ist $\deg f = m < r$ so ist

$f \in < 1, X, \ldots, X^{r-1} >_A$. Sei nun $m \geq r$. Nach Definition von I ist $a \in I$. Da I von den $a_1, \ldots, a_n$ endlich erzeugt ist, gibt es eine Darstellung

$$a \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i \, u_i \qquad \text{mit } \; u_i \in A$$

Mit diesen u_i gilt

$$f \;-\; \sum_{i=1}^{2n} u_i \, f_i X^{m-r_i} \;\;\in\; \mathfrak{a} \qquad \text{wobei } \; r_i = \deg f_i$$

+ Der Grad dieser Polynome ist kleiner m, also folgt die Behauptung per Induktion. $\diamond$

Offensichtlich ist $< 1, X, \ldots, X^{r-1} >_A$ als A-Modul endlich erzeugt, also noethersch. Dann ist aber auch

$$\mathfrak{a} \cap \; < 1, X, \ldots, X^{r-1} >_A \;\;=\;\; < g_1, \ldots, g_m >_A$$

als A-Modul endlich erzeugt. damit ist insgesamt $\mathfrak{a}$ als A-Modul endlich ereugt. $\square$

Folgerung 15.2 *Sei A ein noetherscher Ring, dann ist der Polynomring in endlich vielen Variablen $A[X_1, \ldots, X_n]$ über A ebenfalls noethersch.*

Beweis. Nach Hilberts Basissatz ist $R = A[X_1]$ noethersch, dann ist aber auch der Polynomring $R[X_2] = A[X_1][X_2] = A[X_1, X_2]$ noethersch. Induktiv erhalte die Behauptung. $\square$

Folgerung 15.3 *Sei A ein noetherscher Ring und B eine endlich erzeugte A-Algebra, dann ist B Noethersch.*

Beweis. Für jede endlich erzeugte A-Algebra B finden wir eine Darstellung

$$B \;\;\cong\;\; A[X_1, \ldots, X_n] \big/ I \qquad \text{mit } \;\; I \lhd A[X_1, \ldots, X_n]$$

Nach dem ersten Punkt von Satz 14.4 zusammen mit der vorangegangenen Folgerung ist B noethersch. $\square$

Kapitel V

Diskrete Bewertungsringe und Dedekindringe

Eine gute Eigenschaft von $\mathbb{Z}$ ist die eindeutige Zerlegung in Primideale, mit anderen Worten: $\mathbb{Z}$ ist ein faktorieller Ring. Die Verallgemeinerung des Verhältnisses von $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ ist der ganze Abschluss $\mathcal{O}_K$ von $\mathbb{Z}$ in einem Zahlkörper K (Das ist ein endlicher erweiterungskörper von $\mathbb{Q}$). Der Ring $\mathcal{O}_K$ ist im Allgemeinen nicht faktoriell, aber stets dedekindsch. Eine wichtige Eigenschaft von Dedekindringen, ist die eindeutige Zerlegung von Idealen in Primidealfaktoren (Satz von Kummer).

Für diese Betrachtungen wollen wir in diesem Abschnitt den Grundstein legen, ein genaueres Studium der Verallgemeinerung des Konzeptes der ganzen Zahlen wird in der Algebraischen Zahlentheorie vorgenommen.

16 Diskrete Bewertungsringe

Definition 16.1 *(Diskrete Bewerung)*
Sei K ein Körper. Eine diskrete Bewerung auf K ist eine surjektive Abbildung $\nu : K^\times \twoheadrightarrow \mathbb{Z}$ mit den Eigenschaften

- $\nu(xy) \quad = \quad \nu(x) + \nu(y)$
- $\nu(x+y) \quad = \quad \min\{\nu(x), \nu(y)\}$

Der Unterring

$$R \quad := \quad \left\{\, x \in K^\times \,\middle|\, \nu(x) \geq 0 \,\right\} \cup \{0\}$$

von K heißt der Bewertungsring von (K, ν).

Definition 16.2 *(diskreter Bewertungsring)*
Sei A ein Integritätsring. A heißt diskreter Bewertungsring (kurz dBR oder engl. dvr), falls auf seinem Quotientenkörper $K = \operatorname{Frac} A$ eine diskrete Bewertung ν so existiert, dass

$$A \quad = \quad \{\, x \in K^\times \,|\, \nu(x) \geq 0 \,\} \cup \{0\}$$

Mit anderen Worten, wenn es eine Bewertung ν auf K gibt, so dass A der zu (K, ν) gehörige Bewertungsring ist.

Beispiel 52 *(diskrete Bewertungen)*

1. *Sei $K = \mathbb{Q}$ und $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Für $x \in \mathbb{Q}$ schreibe*

$$x = p^n \cdot \frac{a}{b} \qquad \text{wobei } a, b, n \in \mathbb{Z},\ b \neq 0,\ p \nmid ab$$

   und setze $\nu_p(x) := n$. Wir nennen ν_p die p-adische-Bewerung auf $\mathbb{Q}$. Der Bewertungsring von ν_p ist die Lokalisierung von $\mathbb{Z}$ nach dem Primideal (p), also $\mathbb{Z}_{(p)}$. Man kann zeigen, dass alle diskreten Bewertungen auf $\mathbb{Q}$ diese Form haben.

2. *Das Beispiel (1) lässt sich weiter verallgemeinern: Sei R ein faktorieller Ring und $K = \operatorname{Frac} R$ sein Quotientenkörper sowie $p \in R$ ein Primelement. Dann lässt sich jedes Element $x \in K^\times$ schreiben wie in (1) mit eindeut bestimmtem n. Durch $\nu(x) := n$ wird dann eine diskrete Bewertung auf K definiert.*

3. *Sei k ein Körper und $K = \operatorname{Frac} k[T] = k(T)$ der rationale Funktionenkörper über k.*
   Wie in (1) und (2) definiert dann jedes irreduzible Polynom $f \in k[T]$ eine diskrete Bewertung ν_f auf K und der Bewertungsring von ν_f ist der Ring $k[T]_{(f)}$.

4. *Seien k und K wie eben. Es gilt*

$$K \quad = \quad \operatorname{Frac} k[T] \quad = \quad \operatorname{Frac} k[T^{-1}]$$

   Wenden wir die Konstruktion vom ersten Beispeil auf das Primelement $T^{-1} \in k[T^{-1}]$ anwenden, erhalten wir eine diskrete Bewertung $\nu_{T^{-1}} = \nu_\infty$ auf K, die nicht von der Form v_f wie in (3) ist. Es gilt

$$\nu_\infty\left(\frac{f}{g}\right) \quad = \quad \deg g - \deg f \quad = \quad -\nu_\infty(g) + \nu_\infty(f)$$

   für $f, g \in k[T]$ mit $g \neq 0$. Wie erwartet ist der Bewertungsring von ν_∞

$$k[T^{-1}]_{(T^{-1})} \quad = \quad \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in k[T] \,\wedge\, g \neq 0 \,\wedge\, \deg f \leq \deg g \right\} \quad \subseteq \quad K$$

   Man kann zeigen, dass alle Bewertungen auf K die Form ν_f, für $f \in k[T]$ irreduzibel, oder ν_∞ haben.

Bemerkung 16.3 *Sei ν eine Bewertung auf einem Körper K und $c \in (0,1)_\mathbb{R}$, dann ist durch die Abbildung*

$$|\cdot|_\nu : K \quad \to \quad \mathbb{R}_{\geq 0}$$

die durch

$$|0_k|_\nu \quad := \quad 0_\mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad |x|_\nu \quad := \quad c^{\nu(x)}$$

definiert ist, ein Absolutbetrag auf K definiert, d.h. es gelten

N1 $|x|_\nu = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

N2 $|xy|_\nu = |x|_\nu \cdot |y|_\nu$

N3 $|x + y|_\nu \leq |x|_\nu + |y|_\nu$

In unserer Situation gilt sogar die stärkere Dreiecksungleichung

N3' $|x+y|_\nu \leq \max\{|x|_\nu, |y|_\nu\}$

*Absolutbeträge, die **N3'** erfüllen, nennt man auch nicht-archimedische Absolutbeträge, denn für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}$ gilt unerwartet*

$$|n| \;=\; |\underbrace{1+\ldots+1}_{n\text{-mal}}| \;\leq\; \max\{|1|, |\underbrace{1+\ldots+1}_{(n-1)\text{-mal}}|\} \;\leq\; \max\{|1|,|1|,\ldots,|1|\} \;=\; 1$$

Definition 16.4 *(uniformes Element)*
Sei K ein Körper mit einer diskreten Bewertung ν, dann heißt ein Element πinK mit $\nu(\pi) = 1$ uniform oder uniformisierendes Element.

Bemerkung 16.5 *(Charakterisierung der Bewertungsringe)*
Sei A ein diskreter Bewertungsring mit Quotientenkörper $K := \operatorname{Frac} A$ und Bewertung ν. Sei weiter $\pi \in A$ ein uniformisierendes Element, das heißt $\nu(\pi) = 1$. Für $x \in A \setminus \{0\}$ mit $\nu(x) = n \geq 0$ gilt

$$\nu(\pi^{-n}x) \;=\; \nu(\pi^{-n}) + \nu(x) \;=\; -n+n \;=\; 0$$

Offensichtlich gilt auch für $\nu\big((\pi^{-n}x)^{-1}\big) = -0 = 0$ also sind sowohl $\pi^{-n}x$ als auch $(\pi^{-n}x)^{-1}$ Elemente in A, und damit ist $\pi^{-n}x \in A^\times$ eine Einheit. Dann gibt es aber für alle $x \in A$ eine Einheit $u \in A^\times$ mit $x = \pi^{\nu(x)} \cdot u$, nämlich $u = \pi^{-\nu(x)}x$.

Sei nun $a \lhd A$ ein Ideal. Ist $\mathfrak{a} \neq (0)$, dann gilt insbesondere $\nu(x) \geq x$ für alle $x \in \mathfrak{a}\setminus\{0\}$, denn A ist ein diskreter Bewertungsring. Dann gibt es aber ein Minimum, etwa $d \in \mathbb{N}$ mit $\nu(x) \geq d$ für alle $x \in \mathfrak{a}\setminus\{0\}$. Es gilt

$$\mathfrak{a} \;=\; (\pi^d) \;=\; \big\{\, x \in \mathfrak{a}\setminus\{0\} \,\big|\, \nu(x) \geq d \,\big\}$$

Insgesamt erhalten wir für jedes nicht-null Ideal ein solches $d \in \mathbb{N}$ also sind die Ideale von A von der Form (0), (π^d) für $d \in \mathbb{N}$ und diese sind wegen $\nu(\pi^d) = d < d+1 = \nu(\pi^{d+1})$ paarweise verschieden.

Damit sind diskrete Bewertungsringe immer auch Hauptidealringe (also insbesondere noethersch) und lokal mit $\operatorname{Spm} A = \{(\pi)\}$ *und* $\operatorname{Spec} A = \{(0), (\pi)\}$.

Lemma 16.6 *Sei A ein Ring, dann sind äquivalent*

(1) *A ist ein diskreter Bewertungsring.*

(2) *A ist ein noetherscher lokaler Integritätsring, desse Maximalideal ein Hauptideal ist.*

Anmerkung Die Forderung, dass nur das maximale Ideal ein Hauptideal sein muss, ist schwächer als gleich zu fordern, dass alle Ideale in A Hauptideale sind. **Beweis.** Die Implikation **(1)⇒(2)** haben wir in der obigen Bemerkung gezeigt. Für die Gegenrichtung sei $\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm} A$ das maximale Element. Nach Voraussetzung ist dies ein Hauptideal, etwa $\mathfrak{m} = (\pi)$ mit $\pi \in A$.

Behauptung $\displaystyle\bigcap_{d\geq 0} \mathfrak{m}^d \;=\; 0$

Begründung Sei y in diesem Schnitt, etwa $y = \pi^d x_d$, dann gilt offensichtlich

$$\pi^d x_d \;=\; y \;=\; \pi^{d+1}x_{d+1} \quad\Rightarrow\quad x_d \;=\; \pi x_{d+1}$$

Insbesondere ist dann $(x_d) \subseteq (x_{d+1})$. Auf diese Weise konstruieren wir leicht eine aufsteigende Kette von Idealen in A. Nach Voraussetzung ist A noethersch, also wird diese Kette stationär. Das heißt für ein $d >> 0$ genügend groß gilt $x_{d+1} = tx_d = t\pi x_{d+1}$. Diese Gleichung können wir umstellen zu $(1 - t\pi)x_{d+1} = 0$. Da A nullteiler frei ist, muss entweder $x_{d+1} = 0$ oder $(1 - t\pi) = 0$ sein. Da aber letzteres nicht im Maximalideal liegt, muss $x_{d+1} = 0$ also $y = 0$ sein. ◇

Nach der Behauptung gibt es für alle $y \in A \setminus \{0\}$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y \in (\pi^n) \setminus (\pi^{n+1})$. Setze dieses n als Bewertung von y, also $\nu(y) = n$. Wir können y als $y = \pi^n u$ mit $u \notin (\pi)$, as heißt $u \in A^\times$ darstellen.

Es ist nun noch nachzurechnen, dass wir die so definierte Abbildung ν zu einer Bewertung auf $K = \operatorname{Frac} A$ fortsetzen können. Betrachte dazu $\nu(\frac{x}{y}) = \nu(x) - \nu(y)$. □

Theorem 16.7 *Sei R ein Integritätsring, dann sind äquivalent:*

(1) *R ist ein diskreter Bewertungsring.*

(2) *R ist ein lokaler Hauptidealring aber kein Körper.*

(3) *R ist noethersch, ganzabgeschlossen (in seinem Quotientenkörper) und besitzt genau ein von Null verschiedenes Primideal.*

Beweis. per Ringschluss

„(1)⇒(2)“: klar.

„(2)⇒(3)“: Hauptidealringe sind noethersch und lokale Hauptidealringe besitzen genau ein von Null verschiedenenes Primideal.

„(3)⇒(1)“: Nach dem vorangegangenen Lemma genügt es zu zeigen, dass R lokal und das einzige Maximalideal ein Hauptideal ist. Da Maximalideale insbesondere Primideale sind und es nach Voraussetzung nur ein von Null verschiedenens ein Primidealgibt, ist R offensichtlich lokal. Bezeichne $K = \operatorname{Frac} R$ und sei

$$\mathfrak{m}' \quad = \quad \left\{ x \in K \,\middle|\, x \cdot \mathfrak{m} \subseteq R \right\}$$

Die Menge $\mathfrak{m}'$ heißt gebrochendes Ideal und liegt a priori nicht in R, aber R liegt in $\mathfrak{m}'$. Genauer ist $\mathfrak{m}'$ wegen $R \subseteq \mathfrak{m}' \subseteq K$ ein R-Untermodul von K. Sei nun $y \in \mathfrak{m} \setminus \{0\}$, dann ist $y \cdot \mathfrak{m}' \subseteq R$ also $\mathfrak{m}' \subseteq y^{-1}R \subseteq K$. Betrachte nun den R-Modul-Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\sim} & y^{-1}R \\ x & \mapsto & y^{-1}x \end{array}$$

damit ist $y^{-1}R$ also endlich erzeugt und $\mathfrak{m}'$ ist R-Untermodul eines endlich erzeugten Moduls. Da R noethersch ist, ist dann auch $\mathfrak{m}'$ selber endlich erzeugt. Betrachte das Produkt der R-Moduln

$$\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m} \quad := \quad \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \wedge y_i \in \mathfrak{m}' \wedge x_i \in \mathfrak{m} \right\} \quad \subseteq \quad K$$

Das Produkt ist insbesondere wieder ein Ideal in R mit $\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}$. Da $\mathfrak{m}$ aber ein maximales Ideal ist, folgt somit entweder $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$ oder $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m} = R$. Zeige nun

I Falls $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m} = R$ gilt, ist $\mathfrak{m}$ ein Hauptideal.

II Ist $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m}$ und R ganzabgeschlossen, so ist $\mathfrak{m}' = R$.

III Wenn R nur ein Primideal ungleich Null besitzt, dann muss $\mathfrak{m} \neq R$ sein.

Wenn wir alles drei gezeigt haben, muss in unserem Setting **I** gelten, da **II** und **III** nicht gleichzeitig gelten können.

Zu I Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m} = R$ also ist insbesondere 1_R im Produkt. Dann finden wir eine Darstellung, etwa

$$1 \;=\; \sum_{i=1}^{n} y_i\, x_i \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N},\ x_i \in \mathfrak{m},\ y_i \in \mathfrak{m}'$$

Demnach muss ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, mit $y_i x_i \notin \mathfrak{m}$, also $y_i x_i \in R \setminus \mathfrak{m} = R^\times$. Wir finden also insbesondere $x \in \mathfrak{m}$ und $y \in \mathfrak{m}'$ mit $xy = 1$. Dann gilt für alle $z \in \mathfrak{m}$:

$$z \;=\; z \cdot 1 \;=\; zxy \;=\; (zy) \cdot x \;\in\; (x)$$

Damit ist $\mathfrak{m} = (x)$ ein Hauptideal

Zu II Nach Voraussetzung ist nun $\mathfrak{m}' \cdot \mathfrak{m} = \mathfrak{m}$. Sei $x \in \mathfrak{m}'$, dann gilt $x \cdot \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. Iterativ erhalte hieraus $x^n\, \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$, also $x^n \in \mathfrak{m}'$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze

$$\sigma_n \;:=\; <1, x, \ldots, x^n>_R \;\subseteq\; \mathfrak{m}'$$

R-Untermoduln von $\mathfrak{m}'$. Diese bilden eine aufsteigende Kette im noetherschen Modul $\mathfrak{m}'$. Die Kette der σ_n wird also stationär und wir finden ein $n \in \mathbb{N}$ mit $x^n \in \sigma_{n-1}$. Dann finden wir eine Darstellung von x^n, etwa

$$x^n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} x_i\, y_i \qquad \text{mit } x_i, y_i \text{ wie üblich}$$

Dann ist x aber Nullstelle des normierten Polynoms

$$X^n - \sum_{i=0}^{n-1} y_i X^i \quad R[X]$$

also ist x ganz über R. Nach Voraussetzung ist R aber ganz abgeschlossen, also ist $x \in R$. Insgesamt ist damit $\mathfrak{m}' \subseteq R$. Wie bereits gesehen ist $R \subseteq \mathfrak{m}'$ und somit folgt die behauptete Gleichheit.

Zu III Sei $x \in \mathfrak{m} \backslash \{0\}$ so ist die Lokalisierung von R nach x gleich dem Quotientenkörper.
Begründung $R_x \subseteq K$ ist klar. Wegen $\operatorname{Spec} R_x = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \,|\, x \notin \mathfrak{p}\}$ ist (0) das einzige Primideal von R_x und damit ein Körper. ◇

Ist nun $z \in R \setminus 0$ so gilt für geeignetes $n \in \mathbb{N}$ und $y \in R$

$$\frac{1}{z} \;=\; \frac{y}{x^n} \;\;\Leftrightarrow\;\; yz \;=\; x^n$$

Fixiere nun ein $x \in R \setminus \{0\}$ und sei $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_k)$, dann finden wir zu jedem x_i ein $y_i \in R$ und ein $n \in \mathbb{N}$ mit $y_i z = x_1^n$. Für $N > k(n-1)$ erhalten wir dann

$$\mathfrak{m}^N \;=\; (x_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot x_k^{i_k} | i_1 + \ldots + i_k \geq N) \;\subseteq\; (z)$$

Sei nun speziell $z \in \mathfrak{m} \backslash \{0\}$ und wähle N minimal, so dass $\mathfrak{m}^N \subseteq (z)$ gilt, dann gibt es ein $y \in \mathfrak{m}^{N-1}$ mit $y \notin (z)$ und $y\, \mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}^N \subseteq (z)$. Also

$$\frac{y}{z} \cdot \mathfrak{m} \subseteq R \quad\Rightarrow\quad \frac{y}{z} \in \mathfrak{m}'$$

Andererseits ist $\frac{y}{z} \in K \setminus R$ damit ist $\mathfrak{m}' \neq R$. □

17 Dedekindringe

Notation 17.1 *Sei A ein Integritätsring, dann nennen wir A einen Ring der Dimension 1 und schreiben $\dim(A) = 1$, falls A kein Körper ist und alle nicht-null Primideale von A maximal sind.*

Definition und Satz 17.2 *(Dedekindring)*
Sei A ein noetherscher Integritätsring aber kein Körper. Dann sind äquivalent

(1) *A ist ganzabgeschlossen (im Quotientenkörper $K = \operatorname{Frac} A$ und $\dim A = 1$.*

(2) *Für alle nicht-null Primideale $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \setminus \{(0)\}$ ist die Lokalisierung $A_\mathfrak{p}$ ein diskreter Bewertungsring.*

In diesem Fall nennen wir A einen Dedeking-Ring oder dedekindsch.

Beweis. Wir müssen zwei Implikationen zeigen:

„(2)⇒(1)“: Sind $\mathfrak{p}', \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ Primideale mit $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$, so gilt auch in der Lokalisierung von A nach $\mathfrak{p}$

$$\mathfrak{p}' A_\mathfrak{p} \subsetneq \mathfrak{p} A_\mathfrak{p}$$

Da A ein diskreter Bewertungsring und kein Körper ist folgt damit

$$\mathfrak{p}' = A \cap \mathfrak{p}' A_\mathfrak{p} = A \cap (0) = (0)$$

Also ist A ein Ring der Dimension 1. Sei nun $x \in K$ ganz über A, dann müssen wir zeigen, dass x bereits in A liegt. Dazu betrachte

$$A \subseteq A_\mathfrak{p} \subseteq K \qquad \text{für } \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \setminus \{(0)\}$$

Da $A_\mathfrak{p}$ nach Voraussetzung ein diskreter Bewertungsring für alle $\mathfrak{p}$ ist und nach Theorem 16.7 sind diskrete Bewertungsringe ganzabgeschlossen. Damit liegt x in allen Lokalisierungen von A nach nicht-null Primidealen. Schreibe nun $x = \frac{b}{c}$ mit $b, c \in A$ und $c \neq 0$. Setze

$$(0) \neq \mathfrak{a} := \left\{ z \in A \,\middle|\, zb \in (c) \right\}$$

insbesondere ist $c \in \mathfrak{a}$.

Behauptung Das so definierte Ideal $\mathfrak{a}$ liegt in keinem Primideal $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \setminus \{(0)\}$.
Begründung Sei $q \in \mathfrak{a}$ mit $\frac{p}{q} \in A_\mathfrak{p}$, dann gibt es $\frac{p'}{q'}$ mit $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$ und $q' \notin \mathfrak{p}$. Erhalte also $pq' = p'q \in (c)$ also $q' \in \mathfrak{a}$. Damit folgt $\mathfrak{a} \subsetneq \mathfrak{p}$. ◇

Insbesondere sind alle maximalen Ideale prim, also ist $\mathfrak{a}$ auch in keinem maximalen Ideal enthalten. Damit folgt $\mathfrak{a} = (1) = A$ und damit $1b = b \in (c)$ und so ist $x = \frac{b}{c} \in A$.

„(1)⇒(2)“: Hierfür sind drei Aussagen zu zeigen: Für alle $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A \setminus \{(0)\}$ gilt:

(i) $A_\mathfrak{p}$ hat neben dem Nullideal genau ein weiteres Primideal.

(ii) $A_\mathfrak{p}$ ist ganzabgeschlossen.

(iii) $A_\mathfrak{p}$ ist noethersch.

Der letzte Punkt ist klar, denn da A noethersch ist, ist auch $A_\mathfrak{p}$ noethersch. Der erste Punkt ist ebenfalls leicht, denn

$$\operatorname{Spec} A_\mathfrak{p} \quad = \quad \left\{ \ \mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} A \,\middle|\, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \ \right\}$$

Da nun aber A ein Ring der Dimension 1 nach Voraussetzung ist, sind alle Primideale ungleich null maximal. und damit folgt die Behauptung. Für Aussage **(ii)** betrachte ein über $A_\mathfrak{p}$ ganzes $x \in K$, etwa mit

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \qquad \text{mit } a_i \in A_\mathfrak{p}$$

Dann gibt es aber ein $s \in A \setminus \mathfrak{p}$ mit $s \cdot a_i \in A$ für alle i[1] Dann ist aber wegen

$$(sx)^n \ + \ sa_{n-1}(sx)^{n-1} \ + \ \ldots \ + \ s^n a_0$$

sx ganz über A. Da A nach Voraussetzung ganzabgeschlossen ist, ist $sx \in A$. Somit gilt auch $x = \frac{sx}{s} \in A_\mathfrak{p}$. Also ist $A_\mathfrak{p}$ ganzabgeschlossen. □

/!\ Achtung Dedekindringe sind nicht notwendig faktoriell. (Wir werden später entsprechende Beispiele sehen).

Satz 17.3 *Sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} Tr : L \times L & \to & K \\ (x, y) & \mapsto & Tr_{L/K}(xy) \end{array}$$

eine nicht ausgeartete symmetrische bilinearform und heißt die Spurform auf L/K.[2]

Beweis. Offensichtlich ist die Spurform symmetrisch, denn die Multiplikation in L ist kommutativ. Sei nun $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in L$ eine K-Basis von L, dann müssen wir zum Nachweis der Nichtausgeartetheit der Spurform

$$\det\Big(\big(Tr_{L/K}(\alpha_i\alpha_j)\big)_{i,j}\Big) \quad \neq \quad 0$$

zeigen. Seien $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ die K-Homomorphismen von L in den algebraischen Abschluss $\overline{L}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \big(Tr_{L/K}(\alpha_i\alpha_j)\big)_{i,j} \quad &= \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\alpha_i\alpha_j)\Big)_{i,j} \\ &= \quad \Big(\sum_{k=1}^{n} \sigma_k(\alpha_i) \cdot \sigma_k(\alpha_j)\Big)_{i,j} \\ &= \quad \big(\sigma_k(\alpha_i)\big)_{i,k} \cdot \big(\sigma_k(\alpha_j)\big)^T_{j,k} \end{aligned}$$

[1] Das es für jedes a_i ein s_i mit $s_i \cdot a_i \in A$ gibt ist klar. Nimm etwa den Nenner von a_i. Multipliziere diese s_i auf und erhalte einen „gemeinsamen Nenner" s. Dieser tut's.

[2] **Erinnerung** Im vergangenen Semester betrachteten wir für endliche separable Körpererweiterungen L vom Grad n über K die K-Homomorphismen

$$\operatorname{Hom}_K(L, \overline{L}) \quad = \quad \{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$$

und definierten damit die Spur von $x \in L$ über K als

$$Tr_{L/K}(x) \quad = \quad \sigma_1(x) + \ldots + \sigma_n(x)$$

Wir haben gezeigt, dass die so definierte Spur $Tr_{L/K}(x)$ mit der Spur der Matrix zu $y \mapsto yx$ übereinstimmt.

Damit erhalten wir für die Determinante

$$\det\left(\left(Tr_{L/K}(\alpha_i\alpha_j)\right)_{i,j}\right) \quad = \quad \det\left(\left(\sigma_k(\alpha_i)\right)_{i,k}\right)^2$$

Diese Betrachtung wollen wir auf eine Konkrete Basis anwenden. Nach dem Satz vom Primitiven Element gibt es ein $\alpha \in L$ mit $L = K(\alpha)$. Dann ist $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}$ eine K-Vektorraum-Basis von L. Setze $\mu_k^j := \sigma_k(\alpha)^j = \sigma_k(\alpha^j)$. Dann gilt mit dem Satz von Vandermonde

$$\det\left(\left(\sigma_k(\alpha_i)\right)_{i,k}\right) \quad = \quad \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_2^{n-1} & \cdots & \mu_n^{n-1} \end{pmatrix} \quad = \quad \prod_{i>j}(\mu_i - \mu_j) \quad \neq \quad 0$$

□

Theorem 17.4 *Ganzheitsringe von Dedekindringen sind dedekindsch.*
Sei A ein Dedekindring mit Quotientenkörper $K := \operatorname{Frac} A$ und sei L/K eine endliche separable Körpererweiterung und $\varphi : A \to L$ ein Ring-Homomorphismus. Setze B als den ganzen Abschluss von A in L:

$$B \quad := \quad \overline{A_L}^{\varphi}$$

Dann ist Bein Dedekindring und heißt der Ganzheitsring von L über K.

Beweis. Wir wollen Teil (1) der Definition von dedekindsch nachweisen. Dazu müssen wir zeigen, dass B ein noetherscher, ganzabgeschlossener Integritätsring der Dimension 1 ist. Das B ganzabgeschlossen ist, ist nach Konstruktion als ganzer Abschluss klar.

Zeige zunächst, dass B ein Ring der Dimension 1 ist. Wegen

$$B \cap K \;=\; \left\{b \in L \middle| b \text{ ganz über } A\right\} \cap K \;=\; \overline{A_L}^{\varphi} \cap \operatorname{Frac} A \;=\; A$$

ist B kein Körper. Ist nun $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec} B \setminus \{0\}$ ein Primideal von B, so ist $\mathfrak{P} \cap A$ ein Primideal von A. Da $\mathfrak{p} \neq (0)$ ist gibt es ein $b \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$. Dieses ist nach Voraussetzung ganz über A, etwa mit Minimalpolinom $b^n + a_{n-1}b^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$. Damit erhalten wir

$$(b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-2} + \ldots + a_1) \cdot b \;=\; -a_0 \;\in \mathfrak{P} \cap A$$

also ist auch $\mathfrak{P} \cap A \neq (0)$. Da A dedekindsch ist, ist dann $\mathfrak{p} \cap A$ ein maximales Ideal von A. Damit ist dann $\varphi(\mathfrak{p} \cap A) = \mathfrak{p} = \operatorname{Spm} B$ ein maximales Ideal in$B$.

Um zu beweisen, dass B noethersch ist, zeige die folgende

Behauptung *Sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in B$ eine K-Basis von L und sei*

$$d \quad := \quad \det\left(Tr_{L/K}(\alpha_i, \alpha_j)_{i,j}\right)$$

Dann gilt: $dB \subseteq A\alpha_1 + \ldots + A\alpha_n$.

Gilt diese Behauptung, so ist B noehtersch, denn

(a) Der A-Modul dB ist noethersch als Untermodul eines endlich erzeugten A-Moduls, weil A noethersch ist.

(b) Der A-Modul-Homomorphismus

$$B \ni b \mapsto db \in dB$$

ist ein Isomorphismus.

Damit ist B als A-Modul endlich erzeugt und damit noethersch.

Begründung der Behauptung Sei $b \in B$, dann gibt es eine Darstellung von b bezüglich der Basis, etwa

$$b = \sum_i \gamma_i \alpha_i \qquad \text{mit } \gamma_i \in K$$

Betrachte nun die Spur von $\alpha_j b$

$$\begin{aligned} Tr_{L/K}(b\alpha_j) &= Tr_{L/K}\Big(\alpha_j \cdot \sum_i \gamma_i \alpha_i\Big) &&= \sum_i \sum_k \sigma_k(\gamma_k \alpha_i \alpha_j) \\ &= \sum_i \gamma_i \sum_k \sigma_k(\alpha_i \alpha_j) &&= \sum_i \gamma_i \underbrace{Tr_{L/K}(\alpha_i \alpha_j)}_{=: a_{ij} \in A} \end{aligned}$$

Setze weiter $b_j := Tr_{L/K}(b\alpha_j) \in A$ mit $M := (a_{ij})_{i,j}$ und betrachte das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Durch lösen dieses linearen Gleichungssystems erhalte

$$\gamma_i = d^{-1} \cdot \big(b_1 \tilde{a_{1i}} + \ldots + b_n \tilde{a_{ni}}\big) \in d^{-1}A$$

wobei die $\tilde{a_{ij}}$ Einträge in der zu M inversen Matrix sind. Damit ist

$$db = \sum_{i=1}^{n} d\gamma_i \alpha_i \in A\alpha_1 + \ldots + A\alpha_n$$

$\square$

18 Satz von Kummer

Indesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass alle Ideale von Dedekindringen eine (bis auf Reihenfolge) eindeutige Zerlegung in Primideale besitzen.

Beispiel 53 *Der Ring $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist dedekindsch aber nichtfaktoriell, denn*

$$2 \cdot 3 \quad = \quad 6 \quad = \quad (1 + \sqrt{5-}) \cdot (1 - \sqrt{-5})$$

sind zwei Zerlegungen der 6 *in Primelement. Diese Zerlegung ist jedoch offensichttlich nicht eindeutig.*

In diesem Abschnitt bezeichne A stets einen Dedekind-Ring und $K = \operatorname{Frac} A$ seinen Quotientenkörper.

Definition 18.1 *(gebrochenes Ideal)*
Ein gebrochenes Ideal von A ist ein endlich erzeugter A-Untermodul $\mathfrak{a} \subset K$ mit $\mathfrak{a} \neq \{0\}$.

/!\ Achtung Gebrochene Ideale sind keine Ideale, sondern Moduln. Es lässt sich aber zeigen, dass gebrochene Ideale in engem Zusammenhang mit den Idealen von A stehen und diese verallgemeinern.

Beispiel 54 *Alle Ideale von A sind endlich erzeugt, da A als Dedekind-Ring insbesondere noethersch ist. Damit sind alle Ideale $\mathfrak{a} \neq (0)$ insbesondere auch gebrochene Ideale von A. Insbesondere ist $A = (1)$ ein gebrochenes Ideal.*
Ist $x \in K^\times$ so ist

$$(x) \quad := \quad Ax \quad = \quad \left\{\, ax \,\middle|\, a \in A \,\right\}$$

ein gebrochenes Ideal. Wir nennen diese Ideale gebrochene Hauptideale.

Definition 18.2 *(Produkt, Inverses und Potenzen von gebrochenen Idealen)*
Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \subseteq K$ gebrochene Ideale, dann definieren wir

- *das Produkt von $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ als*

$$\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \quad := \quad \left\langle\, ab \,\middle|\, a \in \mathfrak{a},\, b \in \mathfrak{b} \,\right\rangle_A$$

- *das Inverse von $\mathfrak{a}$ als*

$$\mathfrak{a}^{-1} \quad := \quad \left\{\, x \in K \,\middle|\, x\,\mathfrak{a} \subseteq A \,\right\}$$

- *für $n \in \mathbb{Z}_+$ die n-te Potenz von $\mathfrak{a}$ als*

$$\mathfrak{a}^n \quad := \quad \underbrace{\mathfrak{a} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}}_{n\text{-mal}}$$

- *für $n \in \mathbb{Z}_-$ die n-te Potenz von $\mathfrak{a}$ als*

$$\mathfrak{a}^n \quad := \quad \left(\mathfrak{a}^{-1}\right)^{-n} \quad = \quad \underbrace{\mathfrak{a}^{-1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{a}^{-1}}_{|n|\text{-mal}}$$

Beispiel 55 *Sei A ein diskreter Bewertungsring und $\pi \in A$ ein uniformes Element, also $\nu(\pi) = 1$. Dann sind die nicht-null Ideale von A von der Form (π^d) für $d \in \mathbb{N}_0$. Die gebrochenen Ideale von A sind von der Form (π^d) für $d \in \mathbb{Z}$. Dann gelten*

$$(\pi^d) \cdot (\pi^{d'}) \quad = \quad (\pi^{d+d'}) \qquad \text{und} \qquad (\pi^d)^{-1} \quad = \quad (\pi^{-d})$$

Und für alle $x \in K^\times$ gibt es ein $u \in A^\times$ mit $x = \pi^d u$.

Lemma 18.3 *Seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ zwei gebrochene Ideale von A.*

(1) *Sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} A$ ein von Null verschiedenes Primideal von A, dann gelten*

- **(i)** *Die Lokalisierung $\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{a}$ nach $\mathfrak{p}$ ist ein gebrochenes Ideal von $A_\mathfrak{p}$.*
- **(ii)** *Der Lokalisierungsfunktor ist verträglich mit den Konstruktionen $+, \cdot$ und $^{-1}$, also*

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p} + \mathfrak{b}_\mathfrak{p} \quad \text{und} \quad (\mathfrak{a}\cdot\mathfrak{b})_\mathfrak{p} = \mathfrak{a}_\mathfrak{p} \cdot \mathfrak{b}_\mathfrak{p} \quad \text{sowie} \quad (\mathfrak{a}^{-1})_\mathfrak{p} = (\mathfrak{a}_\mathfrak{p})^{-1}$$

(2) *Es gilt genau dann $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}$, wenn ihre Lokalisierungen nach allen von Null verschiedenen Primidealen von A übereinstimmen.*

Folgerung 18.4 *Die Menge der gebrochenen Ideale von A bildet eine Gruppe bezüglich $\cdot$. Das inverse von einem gebrochenen Ideal $\mathfrak{a}$ ist $\mathfrak{a}\ -1$ und das neutrale Element ist A*

Theorem 18.5 *(Satz von Kummer)*
Sei A ein Dedekind-Ring.

(1) *Sei $\mathfrak{a} \lhd A$ ein Ideal mit $\mathfrak{a} \neq (0)$, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spm} A$ sowie $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{N}$ mit*

$$\mathfrak{a} \quad = \quad \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{n_r}$$

Weiter sind r und die $\mathfrak{p}_i$ und n_i eindeutig bestimmt.

(2) *Sei $\mathfrak{a}$ ein gebrochenens Ideal von A, dann gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und paarweise verschiedene Primideale $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r \in \operatorname{Spm} A$ sowie $n_1, \ldots, n_r \in \mathbb{Z}$ mit*

$$\mathfrak{a} \quad = \quad \mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{n_r}$$

Weiter sind r und die $\mathfrak{p}_i$ und n_i eindeutig bestimmt.

Es sind die Existenz und die Eindeutigkeit zu zeigen.

Existenz Definiere die Hilfsmenge

$$M \quad = \quad \left\{ \mathfrak{a} \lhd A \,\middle|\, \mathfrak{a} \neq (0) \text{ und es gibt keine solche Zerlegung in Primideale für } \mathfrak{a} \right\}$$

Angenommen M wäre nicht leer, dann besitzt M ein maximales Element bezüglich der Inklusion, denn A ist noethersch. Sei etwa $\mathfrak{a}$ dieses.

- Falls $\mathfrak{a} = A$ so ist das leere Produkt die gesuchte Zerlegung und $\mathfrak{a} \notin M$.

- Falls $\mathfrak{a} \neq A$ sei $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} A$ ein Maximalideal mit $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$, dann ist

  $$\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}^{-1} \subseteq \mathfrak{p}\,\mathfrak{p}^{-1} = A$$

  wäre $\mathfrak{a} = \mathfrak{p}\,\mathfrak{a}$, so gilt in der Lokalisierung nach $\mathfrak{p}$ mit dem Lemma von Nakayama 6.1 $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 0$ und damit wäre wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ auch $\mathfrak{a} = 0$ und diesen Fall haben wir ausgeschlossen. Also gilt

  $$\mathfrak{a} \quad \subsetneq \quad \mathfrak{a}\,\mathfrak{p}^{-1} \quad \lhd \quad A$$

  Da $\mathfrak{a}$ das maximale Element von M ist, hat $\mathfrak{a}\,\mathfrak{p}^{-1}$ aber eine Zerlegung in Primideale. Damit hat dann aber auch $\mathfrak{a}$ eine solche.

Also ist M leer.

Eindeutigkeit Sei $\mathfrak{p}_1^{n_1} \cdot \ldots \cdot \mathfrak{p}_r^{n_r}$ eine Zerlegung von einem Ideal. Für $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spm} A$ gilt dann

$$(\mathfrak{p}_i^{n_i})_{\mathfrak{p}} \quad = \quad \begin{cases} (\mathfrak{p}\,A_{\mathfrak{p}})^{n_i} & \text{falls } \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i \\ A_{\mathfrak{p}} & \text{falls } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i \end{cases}$$

Da wir Gleichheit lokal testen können folgt damit die Behauptung. $\square$

Anhang A

Lizenz

Die jeweils aktuelle Version dieses Dokuments kann stets von meiner Homepage

`http://uni.johoelken.de`

bezogen werden. Für Rückfragen aller Art erreichen Sie mich unter der eMail-Adresse:

`johannes.hoelken@stud.uni-due.de`

Anhang B

Register

Literaturverzeichnis

[Bos] **Bosch**, Algebra, Verlag

[Goe] **Görtz**, Notizen zur Vorlesung Algebra II (kommutative Algebra), elektronisch verfügbar `http://www.uni-due.de/~hx0050/ss12/kommutative_algebra.pdf`

Symbolverzeichnis

A

$\mathrm{Ann}(\cdot)$	Der Annulator eines Moduls oder eines Elementes.

B

$\mathrm{Im}(f)$	Bild der Abbildung f, also $\{y \in W_f \mid \exists x \in D_f : f(x) = y\}$

D

$X \oplus Y$	Die direkte Summe von X und Y (Koprodukt in $(abel.Groups)$ und $(R - Moduln)$).
$X \sqcup Y$	Die disjunkte Vereinigung der Mengen X und Y (Koprodukt in $(Sets)$).

G

$\mathrm{ggT}(a, b)$	Der größte gemeinsame Teiler von a und b.

H

$\mathrm{Hom}(A, B)$	bezeichnet die Menge aller Morphismen von A nach B. Je nach Index können hier Modul-Homomorphismen über einem Ring R, Gruppen-Homomorphismen, etc. gemeint sein.

I

$\mathfrak{a} \lhd R$	$\mathfrak{a}$ ist ein Ideal des Rings R

J

$\mathrm{jac}(R)$	Das Jacobson-Radikal des Rings R

K

$\mathrm{Ker}(f)$	Kern der Abbildung f, also $\{x \in D_f \mid f(x) = 0\}$

M

$\mathrm{mipo}_{x,\mathbb{Q}}$	Minimalpolynom von x über $\mathbb{Q}$

N

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen $\{1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
$\mathrm{nil}(R)$	Nil-Radikal des Rings R, auch $\mathrm{rad}(R)$

O

$\mathrm{Obj}(\mathcal{C})$	Die Objekte der Kategorie $\mathcal{C}$, für $\mathcal{C} = (Sets)$ also Mengen

P

${}^a\varphi$	Die zu einem Ringhomomorphismus $\varphi : R \to S$ assoziierte Abbildung auf den Spektren in die andere Richtung ${}^a\varphi : \operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$.

R

$\mathrm{rad}(R)$	Nil-Radikal des Rings R, auch $\mathrm{nil}(R)$

S

$\mathrm{Spec}(\ )$	Das Spektrum eines Ringes (Menge der Primideale des Rings)
$\mathrm{Spm}(\ )$	Das maximale Spektrum eines Ringes (Menge der Maximalideale des Rings)

T

$A \otimes_R B$	Das Tensorprodukt von A und B über R (Koprodukt in $(R - Algebren)$)
M^T	Die transponierte Matrix von M.

Stichwortverzeichnis