Algebraische Geometrie

gehalten von Prof. Dr. U. Görtz
an der Universität Duisburg-Essen im Wintersemester 2012 / 2013

Stand: 5. Februar 2013

Aufgeschrieben von Johannes Hölken (johannes.hoelken@stud.uni-due.de)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Was ist algebraische Geometrie?

Wir können die algebraische Geometrie in eine Linie von Vorlesungen einordnen:

Vorlesung	Gegenstand der Betrachtung
Lineare Algebra	Systeme von linearen Gleichungen in mehreren Unbestimmten. Zum Beispiel $Ax = b$
Algebra	Polynomgleichungen in einer Unbestimmten. Zum Beispiel $X^2 - 2 = 0$
Algebraische Geometrie	Systeme von Polynomgleichungen in mehreren Unbestimmten. Zum Beispiel $X^2 - 2Y = 0 \wedge Y^2 + X(XY-1) = 0$

Das Ziel dieser Vorlesung ist das Verständnis von Lösungsmengen solcher Systeme unter geometrischen Gesichtspunkten. Zum Beispiel werden wir eine Lösungsmenge, die aus einzelnen (diskreten) Punkten besteht 0-dimensional, eine Lösungsmenge in Form einer Kurve aber 1-dimensional nennen wollen. Ebenso wird uns die „lokale" Struktur der Lösungsmengen interessieren. Bevor wir aber genauer über diese lokale Struktur reden können brauchen wir eine erste Definition.

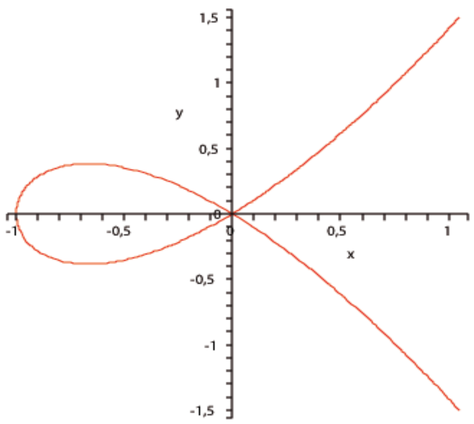
Definition 0.1 *(Verschwindungsmenge)*
Sei k ein Körper und seien $f_1, \ldots, f_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome in n Unbestimmten. Wir nennen

$$\mathrm{V}(f_1, \ldots, f_m) \;:=\; \left\{ (x_1, \ldots, x_n) \in k^n \,\middle|\, \forall i \;\, f_i(x_1, \ldots, x_n) \;=\; 0 \right\}$$

die „gemeinsame Nullstellenmenge der f_i" oder die „Verschwindungsmenge".

Beispiel 1 *(Lokale Eigenschaften)*
Für $k := \mathbb{R}$ und $f = Y^2 - X^2(X+1) \;\in k[X,Y]$ betrachte die Verschwindungsmenge

$$\mathrm{V}(f) \;=\; \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f\big((x,y)\big) = 0 \right\} \;\subset\; \mathbb{R}^2$$



Wenn wir die Lösungsmenge im $\mathbb{R}^2$ aufzeichnen, erhalten wir eine „Kurve mit Knoten im Ursprung". Der aus der reellen Analysis bekannte Satz über die implizite Funktion (genauer der Satz über die inverse Funktion) liefert, dass $\mathrm{V}(f)$ lokal (im Sinne der reellen Metrik auf $\mathbb{R}^2$) bei $(x,y) \in \mathrm{V}(f)$ aussieht wie eine Gerade, falls gilt

$$\left(\frac{\partial f}{\partial X}(x,y)\, ,\, \frac{\partial f}{\partial Y}(x,y) \right) \;\neq\; (0,0) \qquad (*)$$

In unserem Beispiel gelten

$$\frac{\partial f}{\partial X} \;=\; -3X^2 - 2X \;=\; -X\,(3X+2)$$
$$\frac{\partial f}{\partial Y} \;=\; 2Y$$

Wann ist also $(*)$ für $(x,y) \in \mathrm{V}(f)$ nicht erfüllt? Es gelten

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial X}(x,y) &= 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y) \in \left\{(0,t),\,(-\frac{2}{3},t) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}\\ \frac{\partial f}{\partial Y}(x,y) &= 0 \quad\Leftrightarrow\quad (x,y) \in \left\{(t,0) \,\middle|\, t \in \mathbb{R}\right\}\end{aligned}$$

Der Fall $(0,-\frac{2}{3})$ kann hierbei aber nicht auftreten, da dieser Punkt nicht in der Verschwindungsmenge von f liegt. Damit ist $(0,0)$ die einzige Stelle, an der die Kurve lokal nicht aussieht wie eine Gerade. Dies stimmt mit unserer geometrischen Vorstellung überein, da sich, egal wie weit wir auch „hineinzoomen“, im Ursprung immer zwei Geraden kreuzen.

Das im obigen Beispiel gefundene Prinzip haben wir aus der reellen Analysis geschöpft. Wir wollen dieses Kriterium im laufe der Vorlesung ohne analytische Hilfsmittel formulieren um dieses Prinzip zum Beispiel auch auf endliche Körper etc. anwenden zu können.

Der Satz von Bézout

Eine weitere interessante Frage wird uns der Satz von Bézout beantworten. Sei k ein nicht endlicher Körper und seien $f,g \in k[X,Y]$ zwei Polynome. **Wie kann die Anzahl der Elemente im Schnitt der beiden Verschwindungsmengen bestimmt werden**, sofern dieser Schnitt endlich ist? Also in Formeln

$$\sharp\left(\mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}(g)\right) \;=\; ?$$

Zunächst benötigen wir auch hier noch einge kurze

Definition 0.2 *(Grad von Polynomen in mehreren Veränderlichen)*
Sei k in Körper und $f \in k[T_1,\ldots,T_n]$ ein Polynom. Etwa

$$f \;=\; \sum_{i_1,\ldots,i_n \geq 0} a_{i_1,\ldots,i_n} \cdot T_1^{i_1} \cdots T_n^{i_n}$$

Wir setzen den Grad von f als

$$\deg(f) \;:=\; \max\left\{\, i_1 + \ldots + i_n \,\middle|\, i_1,\ldots,i_n \pounds eq0 \;\wedge\; a_{i_1,\ldots,i_n} \neq 0 \,\right\}$$

Beispiel 2 *(Grad von Polynomen)*
Nach obiger Definition ist der Grad von einem Polynom in mehreren Veränderlichen der höchste Grad der einzelnen Monome. Dabei ist aber zu beachten, dass das zu betrachtende Polynom auch in der entsprechenden Form vorliegt:

$$\deg\left(X^3Y^4 - X^2(Y^2 + XY^4) + XY^2\right) \;=\; \deg\left(X^3Y^4 - X^3Y^4 - X^2Y^2 + XY^2\right) \;=\; 4$$

Nun können wir einge vereinfachte Spezialfälle des Satzes von Bézout betrachten:

Beispiel 3 *Sei $g = Y$ und $f = Y - h(X)$ mit einem nicht konstanten Polynom $h \in k[X]$. Dann ist $\mathrm{V}(g)$ die X-Achse und $\mathrm{V}(f)$ ist der Funktionsgraph von h. In diesem Fall ist $\sharp\big(\mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}(g)\big)$ also nichts anderes als die Nullstellenmenge von h. Wir wissen bereits, dass dann*

$$\sharp\big(\mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}(g)\big) \;\leq\; \deg(h)$$

gelten muss. Ebenfalls wissen wir bereits, dass wir, falls k algebraisch abgeschlossen ist und wir die Nullstellen von h mit ihrer Vielfachheit zählen, anstelle von „$\leq$“ sogar „$=$“ schreiben dürfen.
Mit der oben gemachten Definition 0.2 können wir die obige Formel auch passender zur Fragestellung aufschreiben:

$$\sharp\big(\mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}(g)\big) \;\leq\; \deg(h) \;=\; \deg(g) \cdot \deg(f)$$

Beispiel 4 *Seien nun die Polynome f, g linear, also gelte $\deg(f) = \deg(g) = 1$ und seien f, g verschieden. Wir wissen, für zwei verschiedene Geraden in der reellen Ebene gilt, dass sie sich entweder in einem Punkt schneiden, oder parallel sind. Damit erhalten wir direkt*

$$\sharp\big(\mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}(g)\big) \;\leq\; 1 \;=\; \deg(g) \cdot \deg(f)$$

Nach Übergang zur projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ können wir auch in diesem Fall ein „$=$“ in der obigen Formel erreichen. Was die projektive Ebene ist, und wieso parallele Geraden in der projektiven Ebene einen Schnittpunkt haben, werden wir im Laufe dieser Vorlesung erklären.

Wie angekündig sind dies Beispiele eines allgemeinen Satzes, der da lautet

Theorem 0.3 *(Satz von Bézout)*
Sei k ein Körper mit unendlich vielen Elementen und seien $f, g \in k[X, Y]$ Polynome über k. Ist weiter der Schnitt der Verschwindungsmengen von f und g endlich, dann gilt

$$\sharp\big(\mathrm{V}(f) \cap \mathrm{V}(g)\big) \;\leq\; \deg(g) \cdot \deg(f)$$

Unter zusätzlichen Voraussetzungen (siehe Beispiel 3) und durch Erweiterung der Theorie (siehe Beispiel 4) lässt sich dieser Satz sogar mit „$=$“ beweisen.

Moderne algebraische Geometrie

In der aktuellen Forschung basieren viele Beweise auf der Verbindung von Algebra und Geometrie, deren Grundlagen wir uns in dieser Vorlesung erarbeiten wollen.

<u>Geometrie</u>		<u>Algebra</u>
Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$	$\leftrightsquigarrow$	Der Ring $k[T_1, \ldots, T_n]/(f_1 \ldots f_m)$
„geometrische Eigenschaften“		„Ring Eigenschaften“

Aus dieser Verbindung erhalten wir die Leitsätze

> *„Studiere geometrische Eigenschaften mit algebraischen Methoden“*

sowie

> *„Studiere beliebige kommutative Ringe in diesem Sinne, nicht nur Ringe der Form $K[T]/(f_1 \ldots f_m)$“*

Dadurch erhalten wir zum Einen einen machtvollen Zugang zur Geometrie und zum Anderen eine weitere Möglichkeit zahlentheoretische Fragen (unter anderem) zu untersuchen. Als Beispiel für eine solche Verbindung von Algebra und Geometrie kann der in diesem Sommer von MOCHIZUKI angekündigte Beweis der „abc-Vermutung“ gelten.

Vermutung 0.4 *(abc-Vermutung)*
Sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren nur endlich viele Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen mit

$$\begin{array}{ll} i) & a \text{ und } b \text{ sind teilerfremd} \\ ii) & a + b = c \\ iii) & c > \left(\prod\limits_{\substack{p \text{ Primzahl} \\ p \mid abc}} p \right)^{1+\varepsilon} \end{array}$$

Beispiel 5 *(abc-Vermutung)*

- *Wir betrachten das Tripel $(72, 35, 107)$. Die Primzahlen 2 und 3 teilen 72, die Primzahlen 5 und 7 teilen 35. Die Zahlen 72 und 35 sind also Teilerfremd. Die Zahl $72 + 35 = 107$ ist selbst wieder eine Primzahl. Es ist sofort einsichtig, dass für alle $\varepsilon > 0$ gilt*

$$107 < \left(107 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2\right)^{1+\varepsilon}$$

- *Wir betrachten das Tripel $(3, 125, 128)$. Die 3 ist eine Primzahl und 125 ist eine Potenz der Primzahl 5. Die Zahlen 3 und 125 sind also Teilerfremd. Die Zahl $3 + 125 = 128$ wird noch von der Primzahl 2 geteilt. Es gilt*

$$128 > 30 = 3 \cdot 5 \cdot 2$$

  Für kleines ε haben wir hiermit eines der endlich vielen Tripel gefunden. Genauer gilt

$$128 \approx 30^{1{,}42} = 30^{1+0{,}42}$$

  damit erfüllt das Tripel spätestens für $\varepsilon > 0{,}42$ die Bedingung (iii) nicht mehr.

- *Für $\varepsilon = 1$ ist kein Tripel bekannt, das alle Bedingungen der Vermutung erfüllt.*

Vorkenntnisse

Diese Vorlesung setzt große Teile der Vorlesung „Algebra II (kommutative Algebra)“ aus dem vergangenen Sommersemester 2012 voraus. Sie finden die Notizen zur Vorlesung unter [L3]. Besonders wichtig sind für uns

Kapitel 1 insbesondere Ringe, Moduln, lokalisierung und das Tensorprodukt

Kapitel 2 insbesondere die Ergebnisse über noethersche Ringe

Später benötigen wir auch das Wissen über ganze und endliche Homomorphismen aus Kapitel 3, sowie das Wissen über Funktoren aus Kapitel 2. Bereits in der heutigen Vorlesung werden wir den Hilbertschen Nullstellensatz verwenden, der in der vorgenannten Vorlesung bewiesen wurde und daher hier ohne Beweis angegeben wird.

Kapitel I

Varietäten

Im gesamten Kapitel I bezeichne k einen algebraisch abgeschlossenen Körper. Standartbeispiele sind hierfür wie immer die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ oder der algebraische Abschluss $\overline{\mathbb{Q}}$ von $\mathbb{Q}$ in den komplexen Zahlen. Sie können aber auch an einen algebraisch abgeschlossenen Körper mit positiver Charaktheristik $\overline{\mathbb{F}_p}$ denken.

1 Affine algebraische Mengen

Notation 1.1 *Da wir häufig über Polynomringe in endlich vielen Variablen und Tupel mit endlich vielen Komponenten reden werden, füren wir die folgende Kurznotation ein. Sei $(X_1, \ldots, X_n$ ein beliebiges n-Tupel, dann schreiben wir, wann immer die Anzahl der endlich vielen Einträge klar oder nicht wichtig ist, dafür auch $\underline{X}$.*

Definition 1.2 *(Verschwindungsmenge, affine algebraische Menge)*
Sei $M \subseteq k[T_1, \ldots, T_n]$ eine Teilmenge des Polynomrings in n Veränderlichen über k, dann nennen wir

$$V(M) \ := \ \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) \in k^n \,\middle|\, \forall f \in M \ : \ f(x) = 0 \right\}$$

die gemeinsame Nullstellenmenge der Elemente aus M oder die Verschwindungsmenge von M.
Teilmengen von k^n von der Form $V(M)$, mit $M \subseteq k[\underline{T}]$, nennen wir affine algebraische Mengen.
Betrachten wir einzelne Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[\underline{T}]$, dann schreiben wir verkürzt

$$V(f_1, \ldots, f_m) \ := \ V\big(\{f_1, \ldots, f_m\}\big)$$

Bemerkung 1.3 *(Eigenschaften affiner algebraischer Mengen) In der Situation von Definition 1.2 gelten*

(1) *Ist $\mathfrak{a} = (M)$ das von M in $k[\underline{T}]$ erzeugte Ideal, dann gilt*

$$V(M) \ = \ V(\mathfrak{a})$$

(2) *Ist $M' \subseteq M$ eine Teilmenge, dann gilt*

$$V(M) \ \subseteq \ V(M')$$

Die „Operation" $V()$ ist also inklusionsumkehrend.

(3) *Jede affine algebraische Menge ist Verschwindungsmenge von nur endlich vielen Polynomen.*

Beweis. *Sei $Z \subseteq k^n$ eine affine algebraische Menge, dann gibt es nach Teil (1) ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}]$ mit $Z = V(\mathfrak{a})$. Nach dem Hilbertschen Basissatz ist der Ring $k[\underline{T}]$ noetersch, also ist $\mathfrak{a}$ ein endlich erzeugtes Ideal, das heißt es gibt endlich viele Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[\underline{T}]$ mit $\mathfrak{a} = (f_1, \dots, f_m)$. Mit Teil (1) gilt dann wieder*

$$Z \;=\; V(\mathfrak{a}) \;=\; V(f_1, \dots, f_m)$$

Satz 1.4 *Die affinen algebraischen Mengen von k^n, das sind die Mengen der Form $V(M)$, mit $M \in k[\underline{T}]$, bilden die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf k^n, das heißt es gelten*

(i) *$\varnothing$ und k^n sind affine algebraische Mengen.*

(ii) *Jeder beliebige Durchschnitt von affinen algebraischen Mengen ist selbst wieder eine affine algebraische Menge.*

(iii) *Jede endliche Vereinigung affiner algebraischer Mengen ist selbst wieder eine affine algebraische Menge.*

Beweis. Um zu zeigen, dass $Z \subseteq k^n$ eine affine algebraische Menge von k^n ist, müssen wir eine Teilmenge von $M \subset k[T_1, \dots, T_n]$ finden mit $Z = V(M)$. Der Teil **(i)** macht hierbei keine Probleme, denn es gelten

$$\varnothing \;=\; V\big(k[\underline{\mathrm{T}}]\big) \;=\; V(1) \quad \text{und} \quad k^n \;=\; V(\varnothing) \;=\; V(0)$$

Für Teil **(ii)** sei I eine Menge und seien für $i \in I$ Mengen $M_i \subseteq k[\underline{\mathrm{T}}]$ gegeben, dann gilt

$$\bigcap_{i \in I} V(M_i) \;=\; \big\{\, x \in k^n \,\big|\, \forall\, i \in I\; \forall\, f \in M_i \;:\; f(x) = 0 \,\big\} \;=\; V\Big(\bigcup_{i \in I} M_i\Big)$$

Zum Nachweis des letzten Teils genügt es die Aussage für zwei Ideale von $k[\underline{\mathrm{T}}]$ zu zeigen, dann erhalten wir die gewünschte Aussage aus der vorangegangenen Bemerkung und per Induktion. Zeige also, dass für $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd k[\underline{\mathrm{T}}]$ gilt

$$V(\mathfrak{a}) \,\cup\, V(\mathfrak{b}) \;=\; V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$$

Nach dem zweiten Teil der vorangegangenen Bemerkung gelten

$$V(\mathfrak{a}) \;\subseteq\; V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \;\supseteq\; V(\mathfrak{b})$$

damit ist die erste Inklusion $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \subseteq V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ klar. Für die andere Inklusion sei $x \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$. Gilt nun $x \in V(\mathfrak{a})$, so ist nichts weiter zu zeigen. Andernfalls gibt es ein $f \in \mathfrak{a}$ mit $f(x) \neq 0$. Sei nun $g \in \mathfrak{b}$ beliebig, dann liegt $f \cdot g$ wegen der Idealeigenschaften sowohl in $\mathfrak{a}$, als auch in $\mathfrak{b}$, und damit im Durchschnitt $\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$. Nach Voraussetzung ist dann $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0$. Da dieses Produkt in einem Körper gebildet ist, und $f(x) \neq 0$ gilt, muss $g(x) = 0$ gelten. Da g aber beliebig aus $\mathfrak{b}$ gewählt war folgt insgesamt $x \in V(\mathfrak{b})$ und damit die Behauptung. □

Definition 1.5 *(Topologische und geometrische Grundbegriffe)*
*Sei X ein topologischer Raum, das heißt eine Menge X zusammen mit einer Familie von Teilmengen, die die Bedingungen **(i)**, **(ii)** und **(iii)** des vorangegangenen Satzes erfüllen. Die Elemente dieser Familie nennen wir die abgeschlossenen Teilmengen von X. Aus dieser Definition erhalten wir weitere geometrische Begriffe:*

- *Eine Teilmenge $U \subseteq X$ heißt offen, falls $X \setminus U$ abgeschlossen ist.*
- *Ist $Y \subseteq X$ eine Teilmenge, dann ist die Familie*

$$\mathcal{F}_Y \;:=\; \left\{ Z \cap Y \,\middle|\, Z \subset X \text{ abgeschlossen} \right\}$$

die Familie der abgeschlossenen Mengen einer Toplogie auf Y. Wir nenne Diese Topologie, die von X auf Y induzierte Topologoe oder auch die Teilraumtopologie.
Die offenen Mengen von Y unter der Teilraumtopologie, sind genau die Mengen $V \subseteq Y$ für die es eine offene Menge $U \subseteq X$ gibt, die $V = U \cap Y$ erfüllt.

- *Der topologische Raum X heißt zusammenhängend, falls die einzigen Teilmengen von X, die zugleich offen und abgeschlossen sind, die Mengen $\varnothing$ und X sind.*
Eine Teilmenge $Y \subseteq X$ heißt zusammenhängend, falls Y bezüglich der Teilraumtopologie zusammenhängend im obigen Sinne ist.
- *Ist $Y \in X$ so ist*

$$\overline{Y} \;:=\; \bigcap_{\substack{Z \subseteq X \text{ abges.} \\ Y \subseteq Z}} Z \;\subseteq\; X$$

die kleinste abgeschlossene Teilmenge von X, die Y enthält. Wir nennen $\overline{Y}$ den abschluss von Y in X

- *Sind sowohl X als auch Y topologische Räume und $f : X \to Y$ eine Abbildung (der zugrundeliegenden Mengen), dann heißt f stetig , falls für alle abgeschlossenen Teilmengen $Z \subseteq Y$ gilt*

$$f^{-1}(Z) \;\subseteq X \;\text{ ist abgeschlossen}$$

Äquivalent ist die Forderung, für alle offenen Teilmengen $V \subseteq Y$ gelte, dass $f^{-1}(V) \subseteq X$ ebenfalls offen ist. In Worten heißt das: Die Urbilder abgeschlossener [offener] Mengen unter stetigen Abbildungen sind abgeschlossen [offen].

Definition 1.6 *(Zariskitopologie, affiner Raum)*
Wir nennen die durch die affinen algebraischen Mengen auf k^n definierte Topologie die Zariski-Topologie, und bezeichnen den so definierten topologischen Raum auf k^n mit $\mathbb{A}^n(k)$ und reden vom affinen Raum der Dimension n über k.

Beispiel 6 *(affine Räume)*

- *Sei $x \in k^n$, dann ist $\mathfrak{m}_x := (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n) \lhd k[\underline{T}]$ ein maximales Ideal, denn der Einsetzungshomomorphismus $T_i \mapsto x_i$ faktorisiert im folgenden Sinne:*

$$\begin{tikzcd}
k[\underline{T}] \arrow[rr, "T_i \mapsto x_i"] \arrow[dr] & & k \\
& k[\underline{T}]/\mathfrak{m}_x \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Weiter ist $V(\mathfrak{m}_x) = V(T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n) = \{x\}$. Also sind alle einelementigen Teilmengen (Punkte) abgeschlossen. Es folgt sofort auch die Abgeschlossenheit aller endlicher Teilmengen von $\mathbb{A}^n(k)$.

- *Betrachte den affinen Raum der Dimension $n = 1$, also $\mathbb{A}^1(k)$. Alle Ideale von $k[T]$ sind Hauptideale, also von der Form (f) mit $f \in k[T]$. In diesem Fall sind die abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{A}^1(k)$ genau $\varnothing$, $\mathbb{A}^1(k)$ und die endlichen Teilmengen, es gibt keine weiteren.*

Theorem 1.7 *(Der Hilbertsche Nullstellensatz)*

(1) *Die maximalen Ideale in $k[T_1, \dots, T_n]$ sind genau die Ideale der Form*

$$\mathfrak{m}_x \;:=\; (T_1 - x_1, \dots, T_n - x_n) \quad \text{für } x \in k^n$$

(2) *Ist $\mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}]$ ein Ideal, so gilt*

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathfrak{a}} \;&:=\; \left\{ f \in k[\underline{T}] \,\middle|\, \exists\, n \geq 0 \,:\, f^n \in \mathfrak{a} \right\} \\ &= \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(k[\underline{T}]) \\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} \;=\; \bigcap_{\substack{\mathfrak{m} \in \operatorname{Spm}(k[\underline{T}]) \\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}}} \mathfrak{m} \;=\; \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{m}_x \end{aligned}$$

Beweis. Siehe [L3]

Affine algebraische Mengen und Radikalideale

Bisher haben wir einem Ideal $\mathfrak{a}$ des Polynomrings eine abgeschlossene Menge $V(\mathfrak{a})$ im entsprechenden affinen Raum über k zugeordnet. Jetzt wollen wir einen Weg suchen, einer Teilmenge des affinen Raums ein Ideal im Polynomring zuzuordnen.

Definition 1.8 *(Radikalideal)*
Ein Ideal $\mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}]$ heißt Radikalideal, falls $\sqrt{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ gilt.

Beispiel 7 *Primideale sind Radikalideale.*

Definition 1.9 *(Zugehöriges Ideal)*
Sei $Z \subset \mathbb{A}^n(k)$ eine Teilmenge, dann heißt

$$I(Z) \;:=\; \left\{ f \in k[\underline{T}] \,\middle|\, \forall\, z \in Z \,:\, f(z) = 0 \right\} \;\subseteq\; k[\underline{T}]$$

das zu Z gehörige Ideal in $k[\underline{T}]$

Bemerkung 1.10 *Für die Wohldefiniertheit der obigen Definition ist noch die Idealeigenschaft von $I(Z)$ zu zeigen. Diese ist aber leicht nachzurechnen, alternativ betrachte die stärkere Aussage*

$$I(Z) \;=\; \bigcap_{z \in Z} \mathfrak{m}_z$$

Denn $f(z) = 0$ genau dann, wenn $f \in \mathfrak{m}_z$ gilt.

Wir haben nun also einen Weg vom affinen Raum in den Polynomring gefunden. Nun wollen wir die Frage beantworten, wass passiert wenn wir beide Schritte hintereinander ausführen. Da diese Zuordnungen in der Regel nicht „invers“ zueinander sind, gibt es darauf zwei Antworten:

Satz 1.11 *Es gelten*

(1) *Eine endliche Menge beliebiger Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[\underline{T}]$ haben genau dann mindestens eine gemeinsame Nullstelle in k^n, das heßt die Verschwindungsmenge $V(f_1, \ldots, f_m)$ ist nicht leer, wenn $(f_1, \ldots, f_m) \neq (1) = k[\underline{T}]$ gilt, also wenn das von ihnen erzeugte Ideal nicht bereits der ganze Ring ist.*

(2) *Sei $\mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}]$ ein Ideal, dann gilt*

$$I\big(V(\mathfrak{a})\big) \;=\; \sqrt{\mathfrak{a}}$$

Beweis. Für den Nachweis der ersten Aussage nimm zunächst an, das Ideal $(f_1, \ldots, f_m)$ wäre bereits der ganze Ring, dann gibt es insbesondere eine Darstellung der 1, etwa

$$1 \;=\; \sum_{i=1}^{m} h_i\, f_i \qquad \text{mit } h_i \in k[\underline{T}]$$

hätten die f_i eine gemeinsame Nullstelle, dann gäbe es ein $x \in k^n$ mit

$$1 \;=\; 1(x) \;=\; \sum_{i=1}^{m} h_i(x)\, f_i(x) \;=\; 0$$

was offensichtlich nicht sein kann.
Gelte nun $(f_1, \ldots, f_m) \neq (1)$, dann gibt es ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(k[\underline{T}])$ das dieses Ideal enthält. Mit Teil **(1)** des Hilbertschen Nullstellensatzes 1.7 gibt es ein $x \in k^n$ mit $\mathfrak{m}_x = \mathfrak{m}$. Insbesondere gelten

$$f_i \;\in\; \mathfrak{m}_x \;\; \forall\, i = 1, \ldots, m \quad \text{also} \quad f(x) \;=\; 0 \;\forall\, i = 1, \ldots, m$$

Zu **(2)** betrachte die Gleichungen

$$I\big(V(\mathfrak{a})\big) \;=\; \bigcap_{z \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{m}_z \;=\; \bigcap_{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_z} \mathfrak{m}_z \;=\; \sqrt{\mathfrak{a}}$$

Die letzte Gleichheit erhalten wir aus dem Nullstellensatz von Hilbert 1.7. Wegen

$$\begin{aligned} z \in V(\mathfrak{a}) \;&\Rightarrow\; f(z) = 0 \;\;\forall\, f \in \mathfrak{a} \;\;\Rightarrow\;\; f \in \mathfrak{m}_z \;\;\forall\, f \in \mathfrak{a} \\ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_z \;&\Rightarrow\; V(\mathfrak{a}) \;\supseteq\; V(\mathfrak{m}_z) \;=\; \{z\} \end{aligned}$$

gilt $z \in V(\mathfrak{a}) \;\Leftrightarrow\; \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}_z$ und damit auch die mittlere Gleichung. Die erste Gleichung haben wir bereits in Bemerkung 1.10 gezeigt. □

Alternativbeweis zu (2) Die Inklusionsrichtung $\sqrt{a} \subseteq I\big(V(\mathfrak{a})\big)$ ist klar, denn wenn $x \in k^n$ die Nullstelle einer Polynompotenz ist, also $f^l(x) = 0$ gilt, dann gilt auch $f(x) = 0$. Für die Gegenrichtung schreibe $\mathfrak{a} = (f_1, \ldots, f_m)$ mit geeigneten Polynomen $f_i \in k[\underline{T}]$ und sei $g \in I\big(V(\mathfrak{a})\big)$.

Behauptung *Es gibt eine natürliche Zahl $l \in \mathbb{N}$ und Polynome $h_1, \ldots, h_m \in k[\underline{T}]$ mit*

$$g^l \;=\; \sum_{i=1}^{m} h_i\, f_i$$

Beweis. Fasse $f_1, \ldots, f_m$ und g als Elemente im Polynomring $k[\underline{T}][X] \;=\; k[T_1, \ldots, T_n, X]$ auf und definiere in diesem Ring ein Ideal durch

$$\mathfrak{b} \;:=\; \big(f_1, \ldots, f_m, 1 - Xg\big) \;\lhd\; k[\underline{T}, X]$$

Wäre $\mathfrak{b}$ nicht der ganze Ring, also gülte $\mathfrak{b} \neq (1)$, dann hätten die erzeugenden Polynome von $\mathfrak{b}$ nach Teil **(1)** eine gemeinsame Nullstelle, etwa $(t_1, \ldots, t_n, x) \in k^{n+1}$. Dann folgte aber zum Einen für alle $i = 1, \ldots, m$

$$f_i(t_1, \ldots, t_n) \;=\; 0$$

und damit wäre $(t_1, \ldots, t_n) \;\in\; V(\mathfrak{a})$ und zum Anderen wäre

$$1 \;-\; x \cdot g(t_1, \ldots, t_m) \;=\; 0$$

Also wäre insbesondere $g(t_1, \ldots, t_m) \neq 0$, also $g \notin I(V(\mathfrak{a}))$, was ein Widerspruch ist.
Wegen $\mathfrak{b} = (1)$ erhalten wir eine Darstellung der 1, etwa

$$1 \;=\; \sum_{i=1}^{m} \tilde{h}_i(\underline{T}, X)\, f_i(\underline{T}) \;+\; \tilde{h}_{m+1}(\underline{T}, X) \cdot \big(1 - X \cdot g(\underline{T})\big) \qquad \text{mit } \tilde{h}_i \in k[\underline{T}, X]$$

Setze für X nun $\frac{1}{g} \in k(\underline{T}, X)$, dann rechnen wir zwar nicht mehr im Polynomring, erhalten aber die Gleichung

$$1 \;=\; \sum_{i=1}^{m} \tilde{h}_i(\underline{T}, \frac{1}{g})\, f_i(\underline{T}) \;+\; 0 \;=\; \sum_{i=1}^{m} \frac{h_i(\underline{T})}{g^l(\underline{T})}\, f_i(\underline{T})$$

Wobei die $h_i \in k[\underline{T}]$ durch das Gleichnahmigmachen der Brüche aus den $\tilde{h}_i$ hervorgehen. Multipliziere nun beide Seiten der Gleichung mit g^l und erhalte die behauptete Formel. $\square$

Anmerkung Der vorangegangene Satz 1.11 ist eine direkte Folgerung aus dem Hilbertschen Nullstellensatz. Insbesondere der erste Teil des Satzes kann deutlich machen, warum der Satz von Hilbert „Nullstellensatz“ heißt, weil er auf die im Beweis zu **(1)** beschriebene Weise Nullstellen erzeugt. Seinerseits impliziert der zweite Teil dieses Satzes die zweite (technische) Formulierung des Hilbertschen Nullstellensatzes.

Wir wollen nun betrachten was passiert, wenn wir im affinen Raum starten, zum Polynomring übergehen und dann zum affinen Raum zurückkehren, die Operationen also genau andersherum ausführen:

Satz 1.12 *Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine Teilmenge, dann gilt*

$$V\big(I(Z)\big) \;=\; \overline{Z}$$

hierbei bezeichne $\overline{Z}$ den Abschluss von Z in $\mathbb{A}^n(k)$ nach Definition 1.5.

Beweis. Wir beweisen zunächst, dass $\overline{Z}$ in der Verschwindungsmenge des Ideals von Z liegt, und anschließend, dass diese Mengen gleich sind.
Ganz offensichtlich ist $Z \subseteq V(I(Z))$, denn $I(Z)$ enthält per Definition alle Polynome, die mindestens auf Z verschwinden. Weiter sind die Mengen der Form $V(M)$, mit $M \in k[\underline{T}]$, genau die abgeschlossenen Mengen auf $\mathbb{A}^n(k)$. Da der Abschluss von Z als die kleinste abgeschlossene Menge, die Z enthält, definiert ist, muss bereits

$$\overline{Z} \;\subseteq\; V\big(I(Z)\big)$$

gelten. Sei nun $V(\mathfrak{a}) \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge, mit $\mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}]$ und $Z \subseteq V(\mathfrak{a})$. Offensichtlich ist dann $\mathfrak{a} \subseteq I(Z)$ und wegen der Inklusionsumkehrung beim Übergang zur Verschwindungsmenge gilt

$$V(\mathfrak{a}) \;\subseteq\; V\big(I(Z)\big)$$

Also ist $V\big(I(Z)\big)$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n(k)$, die Z enthält, und damit bereits der Abschluss von Z. □

Folgerung 1.13 *Wir haben zwei zueinander inverse inklusionsumkehrende Bijektionen*

$$\begin{tikzcd} \left\{\, \mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}] \,\middle|\, \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \,\right\} \arrow[r, bend left, "V"] & \left\{\, Z \subseteq \mathbb{A}^n(k) \,\middle|\, Z \text{ abges. } \right\} \arrow[l, bend left, "I"] \end{tikzcd}$$

Beweis. Beachte, dass $I(Z)$ stets ein Radikalideal ist, dann folgt die Aussage unmittelbar aus den vorangestellten Sätzen. □

Welche der (algebraischen) Eigenschaften von (Radikal-)Idealen übertragen sich zu (geometrischen) Eigenschaften abgeschlossener Mengen und umgekehrt? Als erste Antwort auf diese Frage betrachte das folgende

Beispiel 8 *Sei* $\mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(k[\underline{T}])$ *ein Maximalideal, dann gibt es nach dem Hilbertschen Nullstellensatz ein* $x \in k^n$ *mit* $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$*. Es gelten*

$$V(\mathfrak{m}_x) \;=\; \{x\} \quad \text{und} \quad I(\{x\}) \;=\; \mathfrak{m}_x$$

Damit folgt, dass sich die Bijektionen einschränken lassen zu Bijektionen vom maximalen Spektrum des Polynomrings, auf die einelementigen Mengen (Punkte) des affinen Raums. Damit können wir den affinen Raum $\mathbb{A}^n(k)$ *mit dem maximalen Spektrum des Polynomrings* $k[\underline{T}]$ *identifizieren.*

Irreduzible topologische Räume

Motiviert durch das vorangegangene Beispiel wollen wir untersuchen, was passiert, wenn wir nur die Primideale des Polynomrings betrachten. Wir wissen schon, das Primideale Radikalideale sind. Nun wollen wir Zeigen, dass wir die Bijektionen einschränken können zu

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Spec}(k[\underline{\mathrm{T}}]) \arrow[r, bend left, "V"] & \left\{\, Z \subseteq \mathbb{A}^n(k) \,\middle|\, Z \text{ irred. } \right\} \arrow[l, bend left, "I"] \end{tikzcd}$$

Definition 1.14 *(Irreduzibler Raum)*
Ein topologischer Raum $X \neq \varnothing$ *heißt irreduzibel, falls sich* X *nicht als Vereinigung zweier abgeschlossener echter Teilmengen schreiben lässt.*
Eine Teilmenge $Z \subseteq X$ *heißt irreduzibel, falls* Z *bezüglich der Teilraumtopologie irreduzibel ist.*

Beispiel 9 *((Nicht) irreduzible Varitäten)*
Wir können das Achsenkreuz in $\mathbb{A}^2(k)$ *als Nullstellenmenge* $V(XY)$ *darstellen, aber diese Menge ist nicht irreduzibel, denn wir können sie als die Vereinigung der* X*-Achse* $V(X)$ *mit der* Y*-Achse* $V(Y)$ *schreiben und beide Mengen sind abgeschlossen aber keine für sich ist bereits das ganze Achsenkreuz. Die einzelnen Achsen sind jedoch irreduzibel, denn wir wissen bereits, dass die abgeschlossenen Teilmengen von zum Beispiel* $V(X)$ *entweder endliche Mengen von Punkten, leer oder bereits die gesamte Achse sind.*

Satz 1.15 *Sei $Z \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann gilt: Z ist genau dann irreduzibel, wenn das zugehörige Ideal $I(Z)$ ein Primideal ist.*

***Insbesondere** gelten **(1)** $\mathbb{A}^n(k)$ ist irreduzibel, denn $I(\mathbb{A}^n(k)) = (0)$ und **(2)** Die Bijektion aus Folgerung 1.13 schränkt sich ein zu einer Bijektion zwischen Primidealen und irreduziblen Teilmengen.*

Beweis. Für den Fall, dass Z leer ist, ist die Behauptung klar, denn zum Einen ist $I(\varnothing) = k[\underline{T}] = (1)$ und (1) ist kein Primideal und zum anderen ist die leere Menge nicht Irreduzibel. Für den Fall, dass Z nicht leer ist, beweisen wir die Äquivalenz der folgenden Aussagen

(i) Z ist irreduzibel.

(ii) Z ist nicht die Vereinigung zweier echter abgeschlossener Teilmengen.

(iii) Für alle Polynome $f, g \in k[\underline{T}]$ mit $Z \subseteq V(f) \cup V(g) = V(fg)$ gilt $Z \subseteq V(f)$ oder $Z \subseteq V(g)$.

(iv) Für alle Polynome $f, g \in k[\underline{T}]$ mit $fg \in I(Z)$ gilt $f \in I(Z)$ oder $g \in I(Z)$.

(v) $I(Z)$ ist ein Primideal.

Hierbei sind sogut wie alle Schlüsse leicht, lediglich der Schritt von **(iii)** nach **(ii)** bedarf einer Erklärung: Angenommen **(iii)** gelte und **(ii)** gelte nicht, dann gäbe es also zwei abgeschlossene Teilmengen $V(\mathfrak{a})$ und $V(\mathfrak{b})$ mit entsprechenden Idealen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ im Polynomring, welche die Bedingungen $Z = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})$ und $V(\mathfrak{a}), V(\mathfrak{b}) \subsetneq Z$ erfüllen. Wir können diese abgeschlossenen Mengen auch schreiben als

$$V(\mathfrak{a}) \;=\; \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f) \qquad \text{und} \qquad V(\mathfrak{b}) \;=\; \bigcap_{g \in \mathfrak{b}} V(g)$$

Nach unserer Annahme gibt es sowohl ein $f \in \mathfrak{a}$ als auch ein $g \in \mathfrak{b}$ mit $Z \nsubseteq V(f)$ beziehungsweise $Z \nsubseteq V(g)$. Andererseits gelten aber $V(\mathfrak{a}) \subseteq V(f)$ und $V(\mathfrak{b}) \subseteq V(g)$ wodurch wir wegen

$$Z \;=\; V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \;\subseteq\; V(f) \cup V(g)$$

einen Widerspruch zur Annahme erhalten. □

Satz 1.16 *Sei X ein nicht-leerer topologischer Raum, dann sind äquivalent*

(i) *X ist irreduzibel.*

(ii) *Jede nicht-leere offene Teilmenge von X liegt dicht in X.*

(iii) *Jede offene Teilmenge von X ist zusammenhängend.*

(iv) *Je zwei nicht-leere Teilmengen von X haben nicht-leeren Durchschnitt.*

Beweis. Übung!

Folgerung 1.17 *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung topologischer Räume und $Z \subseteq X$ eine irreduzible Teilmenge, dann ist auch $f(Z)$ irreduzibel.*
***Äquivalent** gilt: Ist $U \subseteq X$ eine zusammenhängende Teilmenge, dann ist auch $f(U)$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien $U, U' \subseteq f(Z)$ offen und nicht leer, dann gibt es offene Mengen $V, V' \in Y$, so dass $U = V \cap f(Z)$ und $U' = V' \cap f(z)$ gelten. Die Urbilder dieser Mengen sind ebenfalls nicht leer, denn es gelten

$$f^{-1}(V) \supseteq f^{-1}(U) \neq \varnothing \neq f^{-1}(U') \subseteq f^{-1}(V')$$

Genauer gelten sogar

$$A := Z \cap f^{-1}(V) \neq \varnothing \neq Z \cap f^{-1}(V') =: A'$$

und die Mengen A, A' sind offen bezüglich der Teilraumtopologie auf Z. Da Z nach Voraussetzung irreduzibel ist, gilt $A \cap A \neq \varnothing$ nach dem vorangegangen Satz. Durch Anwenden von f auf A und A' erhalten wir hieraus

$$U \cap U' \neq \varnothing$$

$\square$

Anmerkung Diese Folgerung liefert uns in der „zusammenhängend“ Formulierung eine gewisse Absicherung, dass zwei Punkte, die „nahe“ beeinander liegen, auch nach Anwendung einer stetigen Funktion noch relativ „nahe“ beieinander sind. Ähnlich wie es das viel stärkere ε-δ-Kriterium der reellen Analysis tut. Damit bestätigt diese Folgerung unsere geometrische Intuition.

Beispiel 10 *Wir betrachten den affinen Raum $\mathbb{A}^{n^2}(k)$ mit $n \geq 1$ und dem zugehörigen Polynomring $k[T_{ij} \,|\, i, j = 1, \ldots, n]$. Wir können diesen Raum mit den $n \times n$-Matrizen über k identifizieren und die Determinante als ein allgemeines Polynom* $\det \in k[\underline{T}]$ *auffassen.*

Beispiel. Für $n = 2$ ist $\det = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} \in k[T_{11}, T_{12}, T_{21}, T_{22}]$

Die Menge $V(\det)$ ist per Definition eine abgeschlossene Teilmenge in $\mathbb{A}^{n^2}(k)$ und das zugehörige Ideal ist $I\big(V(\det)\big) = \sqrt{(det)}$

Fakt $\det$ *ist ein irreduzibles Polynom*

Da $\det$ *irreduzibel ist, ist* $(\det)$ *ein Primideal und somit insbesondere ein Radikalideal. Weiter gilt dann mit den Bijektionen I und V, dass $V(\det)$ irreduzibel in $\mathbb{A}^{n^2}(k)$ ist.*

Alternative (geometrische) Begründung dafür, dass $V(\det)$ irreduzibel ist:

Wenn wir die Identifizierung $\mathbb{A}^{n^2}(k) = \mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$ betrachten, ist $V(\det)$ die Menge aller $n \times n$-Matrizen, deren Determinante verschwindet, also die nicht vollen Rang haben. Eine Matrix A ist aber genau dann nicht von vollem Rang, wenn ihr Bild kleinere Dimension hat als n, dass heißt wenn die Matrix als lineare Abbildung über k^{n-1} faktorisiert

$$\begin{tikzcd}
k^n \arrow[rr, "A"] \arrow[dr, "B"'] & & k^n \\
& k^{n-1} \arrow[ur, "C"'] &
\end{tikzcd}$$

Das heißt wir können die Matrix A als das Produkt der Matrizen B und C schreiben. Damit erhalten wir eine Charakterisierung von $V(\det)$ als

$$\begin{aligned} v(\det) &= \operatorname{Im}\left(\mu' : \operatorname{Mat}_{n\times(n-1)}(k) \times \operatorname{Mat}_{(n-1)\times n}(k) \to \operatorname{Mat}_{n\times n}(k)\right) \\ &= \operatorname{Im}\left(\mu : \mathbb{A}^{2n(n-1)}(k) \to \mathbb{A}^{n^2}(k)\right) \end{aligned}$$

Wobei μ' die standart Matrizenmultiplikation bezeichne und μ gegeben ist durch

$$\mu\big(\,(r_{ij}, s_{ij})\,\big) \;:=\; \left(\sum_{l=1}^{n-1} r_{il}\, s_{lj}\right)_{i,j}$$

Da der ganze affine Raum immer irreduzibel ist, ist mit Folgerung 1.17 $\operatorname{Im}(\mu)$ irreduzibel, wenn μ stetig ist. Der Beweis, dass μ tatsächlich stetig ist, folgt später.
Aus dieser Begründung können wir nun noch schließen, dass $\sqrt{(\det)}$ ein Primideal ist. Wir erhalten also ein nicht so starkes Ergebnis wie auf dem ersten Weg, haben aber mehr über die Struktur gelernt.

Lemma 1.18 *Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Dann ist Y genau dann irreduzibel, wenn der Abschluss $\overline{Y}$ von Y irreduzibel ist.*

Beweis. Wir haben in Satz1.16 gesehen, dass eine Teilmenge $Z \subseteq X$ genau dann irreduzibel ist, wenn für alle $U, U' \subseteq X$ mit $Z \cap U \neq \varnothing \neq Z \cap U'$ gilt, dass auch $Z \cap U \cap U' \neq \varnothing$ ist. Hieraus folgt bereits das Lemma, weil für jede offene Teilmenge $U \subseteq X$ gilt

$$Y \cap U \neq \varnothing \;\Leftrightarrow\; \overline{Y} \cap U \neq \varnothing$$

□

Folgerung 1.19 *Sei X ein topologischer Raum und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann haben wir zueinander inverse Bijektionen*

$$\begin{array}{ccc} \{\, Y \subseteq U \text{ abges., irred.} \,\} & \leftrightarrow & \{\, Z \subseteq X \text{ abges., irred. mit } Z \cap U \neq \varnothing \,\} \\ Y & \mapsto & \overline{Y} \\ Z \cap U & \leftarrow\!\shortmid & Z \end{array}$$

Beweis. Ist $Y \subseteq U$ irreduzibel, dann ist auch $Y \subseteq X$ irreduzibel. Mit Lemma 1.18 ist dann auch $\overline{Y}$ irreduzibel.
Ist $Z \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen mit $Z \cap U \neq \varnothing$, dann ist $Z \cap U$ abgeschlossen in U aber offen in Z. Weil Z irreduzibel ist, ist $Z \cap U$ dicht in Z nach Satz 1.16, das heißt $\overline{Z \cap U} = Z$. Insbesondere ist also $\overline{Z \cap U}$ irreduzibel und damit nach dem Lemma auch $Z \cap U$ selber.
Dass die beiden Abbildungen invers zueinander sind, ist nun trivial. □

Definition 1.20 *(Irreduzible Komponente)*
Sei X ein topologischer Raum. Eine irreduzible Komponente von X ein eine (bezüglich der Inklusion) maximale irreduzible Teilmenge von X.

Folgerung 1.21 *Irreduzible Komponenten sind stets abgeschlossen.*

Beweis. Lemma 1.18. □

Beispiel 11 *(Irreduzible Komponente)*
Behauptung *Die irreduziblen Komponenten von $V(T_1 \cdots T_n)$ sind $V(T_1), \ldots, V(T_n)$.*

Beweis. *Die Mengen $V(T_i)$ sind offensichtlich abgeschlossen und irreduzibel, da die zugehörigen Ideale $(T_i) \lhd k[\underline{T}]$ prim sind. Weiter ist*

$$V(T_1 \cdots T_n) \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} V(T_i)$$

Ist nun $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene und irreduzible Teilmenge, also von der Form $Z = V(\wp)$ mit einem Primideal $\wp \lhd k[\underline{T}]$, dann gilt wegen der Inklusionsumkehreung

$$I\big(V(T_1 \cdots T_n)\big) \;\subseteq\; I(Z) \;=\; \wp$$

Nach Übungsaufgabe 2 vom zweiten Blatt ist aber

$$I\big(V(T_1 \cdots T_n)\big) \;=\; (T_1 \cdots T_n)$$

Also gilt $T_j \in \wp$ für ein $j \in \{1, \ldots, n\}$ und damit gilt

$$(T_j) \subseteq \wp \quad \Rightarrow \quad V(T_j) \;\supseteq\; Z \;=\; V(\wp)$$

□

Quasi-kompakte und noethersche topologische Räume

Wir wollen als nächstes zeigen, dass jede abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{A}^n(k)$ nur endlich viele irreduzible Komponenten besitzt.

Definition 1.22 *(quasi-kompakt)*
Ein topologischer Raum X heißt quasi-kompakt, falls jede offene überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt.
Das heißt, ist

$$X \;=\; \bigcup_{i \in I} U_i \qquad \text{mit } U_i \subseteq X \text{ offen}$$

so gibt es eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$, so dass gilt

$$X \;=\; \bigcup_{i \in J} U_i$$

Definition 1.23 *(noetherscher topologischer Raum)*
Ein topologischer Raum X heißt noethersch, falls jede absteigende Kette von abgeschlossenen Teilmengen stationär wird, das heißt wenn es zu jeder Kette

$$X \;\supseteq\; Z_1 \;\supseteq\; Z_2 \;\supseteq\; \ldots$$

einen Index $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für alle $m, m' \geq n$ gilt $Z_m = Z_{m'} = Z_n$

Anmerkung Beachte, dass diese Definition „umgekehrt“ zur noethersch Eigenschaft von Ringen ist, wo wir verlangen, dass aufsteigende Idealketten stationär werden.

Beispiel 12 *Der Raum $\mathbb{R}$ mit der gewöhnlichen Abstandsmetrik ist nicht noethersch, denn die Kette* $\mathbb{R} \supset [-1, 1] \supset [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \supset \ldots \supset [-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}] \supset \ldots$ *wird nicht stationär.*

Bemerkung 1.24 *Ein topologischer Raum X ist genau dann noethersch, wenn jede nicht-leere Familie von abgeschlossenen Teilmengen von X ein (bezüglich der Inklusion) minimales Element besitzt.*

Beweis. Lemma von Zorn $\square$

Lemma 1.25 *Sei X ein noetherscher topologischer Raum.*

(i) *Dann ist auch jede Teilmenge von X noethersch.*

(ii) *Jede offene Teilmenge von X ist quasi-kompakt, also insbesondere ist X selbst quasi-kompakt.*

(iii) *Jede abgeschlossene Teilmenge von X hat nur endlich viele irreduzible Komponenten.*

Beweis. Den Beweis der Teilaussage **(ii)** finden Sie als Aufgabe auf dem zweiten Übungszettel. Für den Nachweis von **(i)** sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge und sei $Z_{i i \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von Y. Betrachte die Abschlüsse $\overline{Z}_i$ der Mengen Z_i in X. Nach Voraussetzung wird die Kette der $\overline{Z}_i$ in X stationär. Wegen $Z_i = \overline{Z}_i \cap Y$ muss auch die Kette der Z_i in Y stationär werden.
Für **(iii)** genügt es zu zeigen, dass X die Vereinigung von endlich vielen irreduziblen Teilmengen ist. Sei dazu

$$\mathcal{M} \ := \ \left\{ Z \subseteq Y \text{ abges.} \mid Z \text{ ist nicht Vereinigung von endlich vielen irred. Teilm.} \right\}$$

die Familie von Mengen, für die die Aussage des Satzes nicht gilt. Angenommen $\mathcal{M}$ wäre nicht leer, dann besäße $\mathcal{M}$ ein minimales Element Z. Diese Menge Z kann nicht irreduzibel sein, denn sonst wäre Z die Vereinigung einer einzigen irreduziblen und abgeschlossenen Menge, also gibt es abgeschlossene Teilmengen $Z', Z'' \subsetneq X$ mit $Z = Z' \cup Z''$. Wegen der Minimalität von Z sind Z' und Z'' nicht in $\mathcal{M}$ enthalten, also sind diese Mengen Vereingung von endlich vielen abgeschlossenen und irreduzibler Mengen. Aber damit ist auch Z Verinigung von endlich vielen solcher Mengen, also gilt $Z \notin \mathcal{M}$, was ein Widerspruch ist. Somit muss $\mathcal{M}$ leer sein. $\square$

Satz 1.26 *Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{A}^n(k)$, dann ist X noethersch.*

Beweis. Nach Lemma 1.25 genügt es nachzuweisen, dass $\mathbb{A}^n(k)$ diese Eigenschaft hat. Sei also

$$\mathbb{A}^n(k) \ \supseteq \ Z_1 \ \supseteq \ Z_2 \ \supseteq \ \ldots$$

eine Kette abgeschlossener Teilmengen, dann ist

$$(0) \ \subseteq \ I(Z_1) \ \subseteq \ I(Z_2) \ \subseteq \ \ldots$$

eine aufsteigende Kette von Radikalidealen in $k[T_1, \ldots, T_n]$. Nach dem Basissatz von Hilbert ist dieser Ring noethersch[1] und damit wird diese Idealkette stationär. Weil $Z_i = V\big(I(Z_1)\big)$ gilt, wird dann auch die Kette der Z_i in $Af^n(k)$ stationär. $\square$

[1] Beachte, dass hier die noethersch-Eigenschaft für Ringe gemeint ist

Bemerkung 1.27 *Sei $\mathfrak{a} \lhd k[T_1, \ldots, T_n]$ ein Radikalideal, dann ist $X := V(\mathfrak{a})$ ein noetherscher topologischer Raum. Sei etwa*

$$X = \bigcup_{i=1}^{r} Z_i \qquad \text{mit } Z_i \subseteq X \text{ irreduzible Komponente von } X$$

Dann sind die Z_i auch in $\mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen und irredutzibel. Wir können also Primideale $\mathfrak{p}_i \in \operatorname{Spec}(k[\underline{T}])$ finden, mit

$$V(\mathfrak{p}_i) = Z_i$$

Es folgt unmittelbar

$$V(\mathfrak{a}) = \bigcup_{i=1}^{r} V(\mathfrak{p}_i) = V\Big(\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i\Big)$$

damit erhalten wir

$$\mathfrak{a} = I(V(\mathfrak{a})) = I\Big(V\Big(\bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i\Big)\Big) = \bigcap_{i=1}^{r} \mathfrak{p}_i$$

denn Schnitte von Primidealen sind Radikalideale. Wir sehen damit insbesondere: Jedes Radikalideal im Polynomring in endlich vielen Variablen über k ist Durchschnitt von endlich vielen Primidealen. Diese Primideale sind, bis auf die Reihenfolge, eindeutig bestimmt, wenn zwischen ihnen keine Inklusionen gelten[2].

Beispiel 13 *Was sind die irreduziblen Teilmengen der affinen Ebene $\mathbb{A}^2(k)$?*

- *$\mathbb{A}^2(k)$ ist irreduzibel, denn das zugehörige Ideal (0) ist prim.*
- *Einpunktmengen $\{\, (x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in k \,\}$ sind irreduzibel, denn die zugehörigen Ideale $\mathfrak{m}_{(x_1,x_2)} = (T_1 - x_1, T_2 - x_2)$ sind maximal, also insbesondere prim.*
- *Mengen der Form $V(f)$ mit einem irreduziblen Polynom $f \in k[T_1, T_2]$ sind irreduzibel, denn die zugehörigen Ideale (f) sind prim.*

Diese Liste ist vollständig, das heißt insbesondere: Jedes Primideal in $k[T_1, T_2]$, das weder das Nullideal noch maximal ist, ist ein Hauptideal. Diese Tatsache wollen wir hier nicht beweisen.

[2] Vergleiche „Primärzerlegung in noetherschen Ringen“

2 Morphismen zwischen affinen algebraischen Mengen

In allen Bereichen der Mathematik betrachten wir zu speziellen Strukturen auch spezielle Abbildungen, welche die Besonderheiten der jeweiligen Struktur erhalten. Zum Beispiel interessieren uns zu Vektorräumen hauptsächlich die linearen Abbildungen. Auch im Falle von affinen Varietäten gibt es bestimmte strukturerhaltende Abbildungen, die wir näher untersuchen wollen:

Definition 2.1 *(Morphismus affiner algebraischer Mengen)*
Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ zwei in ihren jeweiligen Räumen abgeschlossene Teilmengen. Dann nennen wir eine Abbildung $f : X \to Y$ einen Morphismus affiner algbraischer Mengen, falls Polynome $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ existieren, so dass

$$f(x_1, \dots, x_n) \; = \; \big(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\big)$$

für alle $(x_1, \dots, x_n) \in X$ gilt.
Die Menge aller Morphismen von X nach Y bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(X, Y)$.

Bemerkung 2.2 *Ist $f : X \to Y$ ein Morphismus nach obiger Definition, so ist f stetig bezüglich der beiden Teilraumtopologien auf X und Y.*

Beweis. Seien $f_1, \dots, f_m \in k[T_1, \dots, T_n]$ die zu f gehörigen Polynome. Sei weiter $\mathfrak{a} \lhd k[T_1, \dots, T_m]$ ein Ideal mit $V(\mathfrak{a}) \subseteq Y$, dann ist $V(\mathfrak{a})$ abgeschlossen in Y. Wir wollen nun zeigen, dass $f^{-1}\big(V(\mathfrak{a})\big)$ abgeschlossen in X ist. Betrachte dazu die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : k[T_1, \dots, T_m] & \to & k[T_1, \dots, T_n] \\ T_i & \mapsto & f_i \end{array}$$

Sei nun $x \in X$, dann gilt

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}\big(V(\mathfrak{a})\big) & \Leftrightarrow & f(x) \in V(\mathfrak{a}) \\ & \Leftrightarrow & \forall\, g \in \mathfrak{a} : \;\; g\big(f_1(x), \dots, f_m(x)\big) \; = \; 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall\, g \in \mathfrak{a} : \;\; \varphi(g)(x) \; = \; 0 \\ & \Leftrightarrow & \forall\, h \in \varphi(\mathfrak{a}) : \;\; h(x) \; = \; 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in V\big(\,\varphi(\mathfrak{a})\big) \end{array}$$

Also ist $f^{-1}\big(V(\mathfrak{a})\big) \; = \; V\big(\,\varphi(\mathfrak{a})\big)$ und damit folgt die Behauptung. □

Bemerkung 2.3 *Die affinen algebraischen Mengen zusammen mit den oben definierten Morphismen bilden die Kategorie der affinen algebraischen Mengen. Das heißt es gelten:*

(1) *Ist $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge, so ist id_X ein Morphismus und die zugehörigen Polynome sind $f_i := T_i$ für $i = 1 \dots n$.*

(2) *Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ Morphismen affiner algebraischer Mengen, dann ist auch*

$$g \circ f : X \; \to \; Z$$

ein Morphismus affiner algebraischer Mengen.

Definition 2.4 *(Isomorphismus)*
Ein Morphismus affiner algebraischer Mengen $f : X \to Y$ heißt Isomorphismus, falls es einen Morphismus $g : Y \to X$ gibt, so dass

$$g \circ f = id_X \qquad \text{und} \qquad f \circ g = id_Y$$

gelten.

Anmerkung. Ist f ein Isomorphismus, so ist f bijektiv. Aber wenn f bijektiv ist, dann muss f trotzdem kein Isomorphismus sein (nämlich wenn f^{-1} kein Morphismus ist). Ein Beispiel für einen solchen Fall betrachten Sie auf dem dritten Übungsblatt.

Bemerkung 2.5 *Aus der Definition der Morphismen folgt sofort, dass sich jeder Morphismus affiner algebraischer Mengen $f : X \to Y$ zu einem Morphismus*

$$\tilde{f} : \mathbb{A}^n(k) \to \mathbb{A}^m(k)$$

fortsetzen lässt, denn die zu f gehörigen Polynome $f_1, \ldots, f_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$ sind auf dem ganzen Raum definiert.
Allerdings ist die Fortsetzung für $X \neq \mathbb{A}^n(k)$ nicht eindeutig, da sich die Polynome f_i immer um auf X verschwindende Polynome abändern lassen.

Beispiel 14 *(Standartbeispiele für Morphismen)*

- *Die Determinante von $n \times n$-Matrizen ist offensichtlich ein Morphismus:*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n^2}(k) & \to & \mathbb{A}^1(k) \\ (x_{i,j})_{i,j=1\ldots n} & \mapsto & \det\big((x_{i,j})_{i,j=1\ldots n}\big) \end{array}$$

- *Das Matrixprodukt von $m \times n$-Matrizen mit $n \times r$-Matrizen ist ebenfalls ein Morphismus*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{mn+nr}(k) & \to & \mathbb{A}^{mr}(k) \\ \big(x_{ij}, y_{jl}\big) & \mapsto & \Big(\sum_{j=1}^{n} x_{i,j} \cdot y_{j,l}\Big)_{i,l} \end{array}$$

- *Ein wichtiges aber weniger offensichtliches Beispiel ist*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^{n^2}(k) & \to & \mathbb{A}^n(k) \\ A & \mapsto & (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) \quad \text{wobei } X^n + \sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i X^i \; = \; chpol_A(X) \end{array}$$

  Es gelten $\gamma_0 = \det(A)$ und $\gamma_1 = \mathrm{Spur}(A)$. Auch die anderen γ_i sind durch Polynome gegeben (ohne Beweis). Also ist auch diese Abbildung ein Morphismus.

- *Wie ist es mit der Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(k) & \to & \mathbb{A}^1(k) \\ A & \mapsto & \det(A)^{-1} \end{array}$$

Hierbei stellen sich vor allem zwei Fragen: Ist $\mathrm{GL}_n(k)$ überhaupt eine affine Menge? *Und* ist $\det(A)^{-1}$ als ein Polynom schreibbar?
Wir können $\mathrm{GL}_n(k)$ *als eine offene Teilmenge des affinen Raums* $\mathbb{A}^{n^2}(k)$ *schreiben, denn es gilt*

$$\mathrm{GL}_n(k) \;=\; \mathbb{A}^{n^2}(k) \setminus V(\det)$$

Andererseits haben wir eine eindeutige Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(k) & \xrightarrow{1:1} & V\Big(\det\big[(T_{i,j})_{i,j=1\dots n}\big] \cdot T_{n^2+1} - 1\Big) \subseteq \mathbb{A}^{n^2+1}(k) \\ A & \mapsto & (A, \det(A)^{-1}) \end{array}$$

Wir können $\mathrm{GL}_n(k)$ *also mit einer abgeschlossenen Teilmenge in* $\mathbb{A}^{n^2+1}(k)$ *identifizieren. Von dieser Teilmenge können wir leicht einen Morphismus angeben, denn*

$$\begin{array}{rcl} f: V\Big(\det\big[(T_{i,j})_{i,j=1\dots n}\big] \cdot T_{n^2+1} - 1\Big) & \to & \mathbb{A}^1(k) \\ (A, \det(A)^{-1}) & \mapsto & \det(A)^{-1} \end{array}$$

ist ein Morphismus mit zugehörigem Polynom $f_1 := T_{n^2+1}$

Eines unserer nächsten Ziele wird es sein einen allgemeinen Ansatz zu finden, offene Teilmengen des affinen Raums $\mathbb{A}^n(k)$ in unserem Kontext zu untersuchen.

Der affine Koordinatenring einer affinen algebraischen Menge

Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge des affinen Raums, dann ist $\mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ eine k-Algebra. Hierbei sind die Addition $(+)$ und die Multiplikation $(\cdot)$ gegeben durch die Addition und Multiplikation von Abbildungen, also

$$(f+g)(x) \;=\; f(x) + g(x) \quad \text{und} \quad (f \cdot g)(x) \;=\; f(x) \cdot g(x)$$

und die Abbildung $k \to \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$ ist gegeben durch die Zuordnung

$$\lambda \;\mapsto\; \big[X \ni x \mapsto \lambda \in \mathbb{A}^1(k)\big]$$

Zu jeder k-Algebra gibt es eine Surjektion aus einem Polynomring in endlich vielen Variablen in die k-Algebra. In unserem Fall können wir eine solche Surjektion leicht angeben:

$$\begin{array}{rcl} \varphi: k[T_1, \dots, T_n] & \to & \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ T_i & \mapsto & \big[X \ni (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_i \in \mathbb{A}^1(k)\big] \end{array}$$

Für alle Polynome f erhalten wir dann die Zuordnung

$$f \;\mapsto\; \big[X \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{A}^1(k)\big]$$

Wir sehen dann leicht, dass der Kern von φ genau das zu X gehörige Ideal $I(X)$ ist, und erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[T_1, \dots, T_n] \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr] & & \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k)) \\ & k[T_1, \dots, T_n]/I(X) \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Insbesondere gilt

$$k[T_1, \dots, T_n]/I(X) \;\cong\; \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$$

Definition 2.6 *(Affiner Koordinatenring)*
Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann nennen wir die k-Algebra

$$\Gamma(X) \;:=\; {k[T_1,\ldots,T_n]}\big/{I(X)} \;\cong\; \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k))$$

den affinen Koordinatenring von X.

Bemerkung 2.7 *Offensichtlich gilt* $\Gamma(\mathbb{A}^n(k)) \;=\; k[T_1,\ldots,T_n]$.

Bemerkung 2.8 *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ eine abgeschlossene Teilmenge, dann ist $\Gamma(X)$ als k-Algebra endlich erzeugt. Weiter ist $\Gamma(X)$ ein reduzierter Ring, das heißt es gibt in $\Gamma(X)$ keine nilpotenten Elemente ungleich Null.*

Beweis. Endlich erzeugte k-Algebren sind von der Form

$$k[T_1,\ldots,T_m]\big/\mathfrak{a} \qquad \text{mit } \mathfrak{a} \lhd k[T_1,\ldots,T_m]$$

genau diese Form hat $\Gamma(X)$ per Definition. Reduziert ist $\Gamma(X)$, da $I(X)$ ein Radikalideal ist und die Behauptung ist ein Ergebnis der kommutativen Algebra. □

Wir wollen nun einige Begriffe und Ergebnisse von den affinen Mengen in die Sprache der affinen Koordinatenringe übersetzen. Zunächst betrachten wir dafür die Maximalideale. Wir erinnern uns für $x \in X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ ist

$$\mathfrak{m}_x^{alt} \;:=\; \mathfrak{m}_x \;:=\; (T_1 - x_1, \ldots, T_n - x_n)$$

das zugehörige Maximalideal in $k[\underline{T}]$. Wir wollen nun ein Maximalideal zu x im affinen Koordinatenring angeben und setzen

$$\mathfrak{m}_x^{neu} \;:=\; \left\{ f \in \mathrm{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k)) \,\middle|\, f(x) = 0 \right\} \;\lhd\; \Gamma(X)$$

Dann ist

$$\Gamma(X)\big/\mathfrak{m}_x^{neu} \;\cong\; k$$

denn die Abbildung

$$\Gamma(X) \ni f \;\mapsto\; f(x) \in k$$

ist surjektiv mit Kern $\mathfrak{m}_x^{neu}$. Also ist $\mathfrak{m}_x^{neu}$ insbesondere ein maximales Ideal.
Im Falle von $X = \mathbb{A}^n(k)$ stimmen $\mathfrak{m}_x^{neu}$ und $\mathfrak{m}_x^{alt}$ überein. Allgemeiner gilt für $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$, dass sich die Ideale $\mathfrak{m}_x^{neu}$ und $\mathfrak{m}_x^{alt}$ unter der typischen Idealkorrespondenz für Faktorringe

$$\left\{ \mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}] \,\middle|\, I(X) \subseteq \mathfrak{a} \right\} \;\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\; \left\{ \mathfrak{b} \lhd \Gamma(X) \right\}$$

entsprechen. Wir lassen daher die Notationen alt und neu wieder weg.

Als nächstes wollen wir die Zariskitopologie auf abgeschlossenen Mengen $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ betrachten. Wir können diese nun auf zwei unterschiedliche Arten einführen:

1. Ansatz Versehe X mit der Teilraumtopologie, welche von $\mathbb{A}^n(k)$ induziert wird. Das heißt die abgeschlossenen Mengen von X sind genau die Mengen der Form $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$ mit $\mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}]$.

2. Ansatz Für $\mathfrak{b} \lhd \Gamma(X)$ setze

$$V_X(\mathfrak{b}) \;:=\; \left\{ x \in X \,\middle|\, \forall f \in \mathfrak{b} \,:\; f(x) = 0 \right\}$$

hierbei fasse die $f : X \to \mathbb{A}^1(k)$ aus $\mathfrak{b}$ als Morphismen auf. Versehe X nun mit der Topologie, deren abgeschlossene Mengen genau die Mengen der Form $V_x(\mathfrak{b})$ sind.

Behauptung *Beide Ansätze liefern die selbe Topologie auf X.*

Beweis. Betrachte die natürliche Projektion

$$\pi : k[\underline{T}] \;\to\; k[\underline{T}]/I(X) \;=\; \Gamma(X)$$

Für $\mathfrak{b} \lhd \Gamma(X)$ gilt $I(X) \subseteq \pi^{-1}(\mathfrak{b})$ und damit gilt $V\big(\pi^{-1}(\mathfrak{b})\big) \;\subseteq\; V\big(I(X)\big) \;=\; X$. Es folgt

$$V_X(\mathfrak{b}) \;=\; V\big(\pi^{-1}(\mathfrak{b})\big) \cap X \;=\; V\big(\pi^{-1}(\mathfrak{b})\big)$$

Andererseits gilt $I(X) \subseteq I\big(V\,\mathfrak{a})\big) = \sqrt{\mathfrak{a}}$ für $\mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}]$ mit $V(\mathfrak{a}) \subseteq X$. Deswegen ist

$$V(\mathfrak{a}) \;=\; V(\sqrt{\mathfrak{a}}) \;=\; V_X\big(\pi(\sqrt{\mathfrak{a}})\big)$$

$\square$

Im Folgenden lassen wir, wegen der Gleicheit der Topologien, den Index X an den Verschwindungsmengen wieder weg.

Definition 2.9 *(Ausgezeichnete offene Mengen)*
Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen und $f \in \Gamma(X)$ ein Morphismus. Wir setzen

$$D(f) \;:=\; X \setminus V(f) \;=\; \left\{ x \in X \,\middle|\, f(x) \neq 0 \right\}$$

Dann ist $D(f)$ offensichtlich offen in X. Wir nennen Mengen der Form $D(f)$ die ausgezeichneten offenen Teilmengen oder standart offene Mengen von X.

Definition und Lemma 2.10 *(Basis einer Topologie)*

(1) *Endliche Durchschnitte von ausgezeichneten offenen Mengen sind ebenfalls wieder ausgezeichnete offene Mengen.*

(2) *Die ausgezeichneten offenen Teilmengen bilden eine Basis der Topologie, das heißt jede offene Teilmenge lässt sich als Vereinigung ausgezeichneter offener Mengen schreiben.*

Beweis. Für **(1)** gebnügt es den Durchschnitt von zwei solcher Mengen zu betrachten. Seien also $f, g \in \Gamma(X)$, dann gilt

$$D(f) \,\cap\, D(g) \;=\; X \setminus V(f) \cap X \setminus V(g) \;=\; X \setminus V(fg) \;=\; D(fg)$$

Für den Nachweis von **(2)** sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge, etwa

$$U \;:=\; X \setminus V(\mathfrak{a}) \qquad \text{mit } \mathfrak{a} \lhd \Gamma(X)$$

Dann ist offensichtlich

$$V(\mathfrak{a}) \;=\; \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f)$$

damit erhalten wir sofort

$$U \;=\; X \setminus V(\mathfrak{a}) \;=\; \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$$

□

Anmerkung Da die Räume $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ noethersch sind, sind sie insbesondere quasi-kompakt. Daher lässt sich jede offene Teilmenge bereits als Vereinigung von endlich vielen ausgezeichneten offenen Mengen schreiben.

Beispiel 15 *Setze $X := \mathbb{A}^2(k)$ und betrachte $U := X \setminus \{(0,0)\}$.*
Die Menge U ist offen in X, aber keine ausgezeichnete offene Menge, denn sonst gäbe es ein Polynom, das <u>nur</u> im Punkt $(0,0)$ eine einzige Nullstelle hat. Ein solches Polynom kann es aber nicht geben (klar). Jedoch gilt

$$U \;=\; D(T_1) \,\cup\, D(T_2)$$

Satz 2.11 *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ abgeschlossen, dann gilt: X ist genau dann irreduzibel, wenn $\Gamma(X)$ ein integritätsring ist.*

Beweis. Wir wissen schon, dass X genau dann irreduzibel ist, wenn das zugehörige Ideal $I(X)$ ein Primideal ist. □

Bemerkung 2.12 *Sei R eine reduzierte endlich erzeugte k-Algebra, dann gibt es einen surjektiven Homomorphismus*

$$\varphi : \; k[T_1, \ldots, T_n] \;\twoheadrightarrow\; R$$

von k-Algebren. Da R reduziert ist, ist der Kern von φ ein Radikalideal und wir erhalten somit

$$R \;\cong\; k[T_1, \ldots, T_n] / \operatorname{Ker} \varphi \;=\; \Gamma\big(V(\operatorname{Ker} \varphi)\big)$$

Funktorialität des affinen Koordinatenrings

Seien $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ zwei in ihren jeweiligen Räumen abgeschlossene Mengen und sei $f : X \to Y$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen. Dann ist

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(Y) \cong \operatorname{Hom}(Y, \mathbb{A}^1(k)) & \xrightarrow{\Gamma(f)} & \operatorname{Hom}(X, \mathbb{A}^1(k)) \cong \Gamma(X) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

ein Homomorphismus von k-Algebren. Alternativ können wir die Koordinatenringe auch als Quotienten von Polynomringen nach einem Ideal auffassen und erhalten dann $\Gamma(f)$ als

$$\begin{array}{ccccc} \Gamma(Y) = k[T_1, \ldots, T_m] / I(Y) & \xrightarrow{\Gamma(f)} & k[T_1, \ldots, T_n] / I(X) = \Gamma(X) \\ g & \mapsto & g(f_1, \ldots, f_m) \end{array}$$

wobei die $f_i \in k[T_1, \ldots, T_n]$ die f beschreibenden Polynome sind.

Damit wird Γ zu einem „kontravariantem Funktor", das heißt wir können mit Γ von affinen algebraischen Mengen zu reduzierten endlich erzeugten k-Algebren übergehen. Ebenso können wir mit Γ von Morphismen affiner algebraischer Mengen zu Homomorphismen von k-Algebren übergehen, dabei „drehen" sich jedoch die Abbildungsrichtungen um.

Satz 2.13 *Γ ist eine „Äquivalenz von Kategorien", das heißt es gelten*

i) *Γ ist volltreu, das heißt für alle affinen algebraischen Mengen X, Y ist die Abbildung*

$$\mathrm{Hom}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\Gamma(Y),\Gamma(X)\big)$$

bijektiv.

(ii) *Γ ist essentiell surjektiv, das heißt für alle endlich erzeugten reduzierten k-Algebren R gibt es eine affine algebraische Menge X mit $R \cong \Gamma(X)$*

Folgerung 2.14 *Seien X, Y affine algebraische Mengen. Weil Γ volltreu ist, gilt dann*

$$X \cong Y \qquad \Leftrightarrow \qquad \Gamma(X) \cong \Gamma(Y)$$

Beispiel 16 *$\mathbb{A}^1(k)$ und $\mathbb{A}^2(k)$ sind nicht isomorph, denn die Koordinatenringe $\Gamma\big(\mathbb{A}^1(k)\big) = k[T_1]$ und $\Gamma\big(\mathbb{A}^2(k)\big) = k[T_1,T_2]$ sind als k-Algebren nicht isomorph. Denn zum Beispiel ist $k[T_1]$ ein Hauptidealring, $k[T_1,T_2]$ aber nicht. Ebenso haben die rationalen Funktionenkörper beider Polynomringe einen unterschiedlichen Transzendenzgrad über k ...*

Beweis des Satzes. Teil **(ii)** folgt sofort aus Bemerkung 2.12. Zu Teil **(i)** seien $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ und $Y \subseteq \mathbb{A}^m(k)$ affine algebraische Mengen, dann wollen wir eine Umkehrabbildung

$$\Psi : \mathrm{Hom}\big(\Gamma(Y),\Gamma(X)\big) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X,Y)$$

angeben. Zu $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ betrachte

$$\begin{tikzcd}
k[T_1,\dots,T_m] \arrow[r, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & k[T_1,\dots,T_n] \arrow[d] \\
\Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \Gamma(X)
\end{tikzcd}$$

Es ist leicht ein $\tilde{\varphi}$ zu finden, so dass dieses Diagramm kommutiert (Allerdings ist diese Wahl nicht eindeutig). Setze nun $f_i := \psi(T_i)$ für $i = 1 \dots m$, dann sind die $f_i \in k[T_1,\dots,T_n]$ Polynome. Wir erhalten damit eine Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{A}^n(k) &\to \quad \mathbb{A}^m(k) \\ x &\mapsto \big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big) \end{aligned}$$

Ist nun $f(X) \subseteq Y$, so ist f ein Morphismus von X nach Y. Es genügt nun zu Zeigen, dass für alle $g \in I(Y)$ und alle $x \in X$ gilt $g\big(f(x)\big) = 0$, denn $Y = V(I(Y))$. Es gilt

$$\begin{aligned} g\big(f(x)\big) &= g\big(f_1(x),\dots,f_m(x)\big) = g\big(f_1,\dots,f_m\big)(x) \\ &= g\big(\tilde{\varphi}(T_1),\dots,\tilde{\varphi}(T_m)\big)(x) = \tilde{\varphi}\big(f\big)(x) = 0 \end{aligned}$$

Denn es ist $\tilde{\varphi}\big(I(Y)\big) \subseteq I(X)$ nach Konstruktion.
Der Morphismus f ist unabhängig von der Wahl von $\tilde{\varphi}$, denn sei $\tilde{\varphi}'$ eine weitere Wahl, dann gilt

$$\tilde{\varphi}(T_i) \; - \; \tilde{\varphi}'(T_i) \;\; \in I(X)$$

Wir müssen nun noch zeigen, dass die Abbildungen Γ und Ψ invers zueinander sind. Es gelten

1. **($\Psi \circ \Gamma = id$)** Sei $g : X \to Y$ gegeben durch die Polynome $g_1, \ldots, g_m \in k[T_1, \ldots, T_n]$, dann erhalten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[T_1, \ldots, T_m] \arrow[r, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & k[T_1, \ldots, T_n] \arrow[d] \\ \Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi = \Gamma(g)"] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

mit $\tilde{\varphi}(T_i) = g_i$, also $\Psi(\varphi) = \Psi(\Gamma(g)) = g$.

2. **($\Gamma \circ \Psi = id$)** Sei $\varphi : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ ein k-Algebra-Homomorphismus dann betrachte

$$\begin{tikzcd} k[T_1, \ldots, T_m] \arrow[r, dashed, "\tilde{\varphi}"] \arrow[d] & k[T_1, \ldots, T_n] \arrow[d] \\ \Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi"] & \Gamma(X) \end{tikzcd}$$

und wähle $\tilde{\varphi}$ gerade so, dass das Diagramm kommutiert. Konstruiere nun $g : X \to Y$ wie oben, dann wird g beschrieben durch die Polynome $g_i := \tilde{\varphi}(T_i) \in k[T_1, \ldots, T_n]$ und für $f \in \Gamma(Y)$ ist

$$f(g_1, \ldots, g_m) \;\; = \;\; \tilde{\varphi}(f)$$

und damit folgt $\Gamma\big(\Psi(\varphi)\big) = \Gamma(g) = \tilde{\varphi}$ was uns, wegen der Unabhängigkeit von der Wahl von $\tilde{\varphi}$, genügt. $\square$

Damit haben wir die Äquivalenz der Kategorien

$$\left(\begin{array}{c} \text{Affine algebraische Mengen} \\ \text{über } k \end{array} \right) \;\; \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \;\; \left(\begin{array}{c} \text{Endlich erzeugte reduzierte} \\ k\text{-Algebren} \end{array} \right)$$

Diese können wir in natürlicher Weise einschränken zu einer Äquivalenz von

$$\left(\begin{array}{c} \text{Irreduzible affine algebraische} \\ \text{Mengen über } k \end{array} \right) \;\; \stackrel{\sim}{\longrightarrow} \;\; \left(\begin{array}{c} \text{Integre endlich erzeugte reduzierte} \\ k\text{-Algebren} \end{array} \right)$$

Wir wollen nun noch das Verhalten der Maximalideale unter Γ betrachten und eine nützliche Beschreibung von Morphismen in Termen von k-Algebra-Homomorphismen zu erhalten. Es gilt der folgende

Satz 2.15 *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus affiner algebraischer Mengen, dann gilt für alle $x \in X$*

$$\Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \;\; = \;\; \mathfrak{m}_{f(x)}$$

Beweis. Für $g \in \Gamma(Y)$ gilt

$$\begin{aligned} g \in \mathfrak{m}_{f(x)} &\Leftrightarrow 0 = g\big(f(x)\big) = \big(g \circ f\big)(x) = \Gamma\big(f\big)(g)\,(x) \\ &\Leftrightarrow \Gamma\big(f\big)(g) \in \mathfrak{m}_x \\ &\Leftrightarrow g \in \Gamma(f)^{-1}(\mathfrak{m}_x) \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.16 *Mit der Identifizierung $X = \mathrm{Spm}\big(\Gamma(X)\big)$ und dem obigen Satz lässt sich ein Morphismus $f : X \to Y$ in Termen von $\Gamma(f) : \Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ beschreiben ohne die Einbettungen von X und Y in irgendwelche affinen Räume $\mathbb{A}^?(k)$ zu betrachten.*

3 Räume mit Funktionen

Definition 3.1 *(Raum mit Funktionen über K)*
Sei K ein (nicht notwendig algebraisch abgeschlossener) Körper. Ein Raum mit Funktionen über K ist gegeben durch

- *einen topologischen Raum X*
- *eine Familie von K-Unteralgebren*

  $$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathrm{Abb}(U, K) \qquad \text{für } U \subseteq X \text{ offen und nicht-leer}$$

  so dass gelten

  (1) *Für $U' \subseteq U \subseteq X$ offen und für alle $f \in \mathcal{O}_X(U)$ gilt $f_{|_{U'}} \in \mathcal{O}_X(U')$*

  (2) *Sind $U_i \subseteq X$ für $i \in I$ offene Teilmengen und gibt es $f_i \in \mathcal{O}_X(U_i)$ mit $f_{i|_{U_i \cap U_j}} = f_{j|_{U_i \cap U_j}}$ für alle $i, j \in I$ so gilt für die eindeutig bestimmte Abbildung*

  $$\begin{aligned} f : \bigcup_{i \in I} U_i &\to K \\ u &\mapsto \big\{ f_i(u) \quad \text{falls } u \in U_i \end{aligned}$$

  dass

  $$f \in \mathcal{O}_X\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$$

Wir nennen die zweite Bedingung auch das „Verkleben von Funktionen“. Hierfür können wir auch eine alternative aber offensichtlich äquivalente Formulierung wählen:
Sind $U_i \subseteq X$ für $i \in I$ offene Teilmengen, dann gelte für alle

$$f \in \mathrm{Abb}\left(\bigcup_{i \in I} U_i,\, K\right)$$

die folgende Äquivalenz

$$f \in \mathcal{O}_X\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right) \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, i \in I \,:\, f_{|_{U_i}} \in \mathcal{O}_x(U_i)$$

Notation 3.2 *Erfüllt das Tupel $(X, \mathcal{O}_X)$ die obenstehende Definition, so sagen wir $(X, \mathcal{O}_X)$ ist ein Raum mit Funktionen (über K) und schreiben abkürzend RF$/K$. Für eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ heißen die Elemente aus $\mathcal{O}_X(U)$ auch „Schnitte auf U“.*

Definition 3.3 *(Morphismus von Räumen mit Funktionen)*
Ein Morphismus $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von Räumen mit Funktionen ist eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ der topologischen Räume mit der Zusatzbedingung, dass für alle offenen $V \subseteq Y$ und alle $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt

$$s \circ f_{|_{f^{-1}(V)}} \in \mathcal{O}_X\left(f^{-1}(V)\right)$$

Anmerkung Mit den beiden vorangegangenen Definitionen können wir auch hier wieder von einer Kategorie reden. Wir betrachten hier die Kategorie der Räume mit Funktionen über K.

Beispiel 17 *(Räume mit Funktionen)*

1. *Sei X ein topologischer Raum. Für offene Mengen $U \subseteq X$ setze*

$$\mathcal{O}_X(U) \quad := \quad \left\{ f : U \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist stetig} \right\}$$

   dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen über $\mathbb{R}$.

2. *Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge. Für offene Mengen $U \subseteq X$ setze*

$$\mathcal{O}_X(U) \quad := \quad \left\{ f : U \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist } \infty\text{-oft differenzierbar} \right\} \quad =: \quad C^\infty(U, \mathbb{R})$$

   dann ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen über $\mathbb{R}$. In diesem Fall erhalten wir auch leicht die folgende Charakterisierung:
   Für $X \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Y \subseteq \mathbb{R}^m$ und eine Abbildung $f : X \to Y$ gilt: f ist genau dann ein Morphismus von Räumen mit Funktionen über $\mathbb{R}$, wenn $f \in C^\infty(X, Y)$ ist.

3. ***Gegenbeispiel** (verletzt Bedingung **(1)**)*
   Sei $X = \mathbb{R}$. Für offene Mengen $U \in X$ setze

$$\mathcal{O}_X(U) \quad := \quad \left\{ fU \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist stetig und } \max_{x \in U} f(x) = 5 \right\}$$

   Dann ist $X, \mathcal{O}_X)$ kein Raum mit Funktionen, denn wir können aus jeder Menge U eine Teilmenge auswählen, so dass es eine Funktion gibt, deren Maximum nun kleiner als 5 ist (Weil wir das Maximum „ausgestanzt“ haben).

4. ***Gegenbeispiel** (verletzt Bedingung **(2)**)*
   Sei $X = \mathbb{R}$. Für offene Mengen $U \in X$ setze

$$\mathcal{O}_X(U) \quad := \quad \left\{ fU \to \mathbb{R} \;\middle|\; f \text{ ist konstant} \right\}$$

   Dann ist $X, \mathcal{O}_X)$ kein Raum mit Funktionen, denn betrachte zum Beispiel die offenen Intervalle $U_1 := (0, 1)$ und $U_2 := (2, 3)$ sowie $f_1 = 0$ und $f_2 = 1$, dann ist die Funktion

$$f(x) \quad := \quad \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in U_1 \\ 1 & \text{falls } x \in U_2 \end{cases}$$

   nicht konstant und damit gilt $f \notin \mathcal{O}_X(U_1 \cup U_2)$.

Definition und Bemerkung 3.4 *(Einschränkung von Räumen mit Funktionen)*
Sei $X, \mathcal{O}_X$ ein Raum mit Funktionen über einem Körper K und sei $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge. Dann ist $(U, \mathcal{O}_{X|_U})$ mit

$$\mathcal{O}_{X|_U}(V) \;:=\; \mathcal{O}_X(V) \qquad \text{für offene Mengen } V \subseteq U$$

ebenfalls ein Raum mit Funktionen und heißt die Einschränkung von $(X, \mathcal{O}_X)$ auf U.

Der Raum mit Funktionen zu einer irreduziblen affinen algebraischen Menge

Wir betrachten nun wieder ausschließlich algebraisch abgeschlossene Körper k. Wir haben bereits im Beispiel 14 anhand von $\mathrm{GL}_n(k)$ gesehen, dass der Umgang mit offenen Mengen im Kontext der affinen algebraischen Mengen oftmals schwierig ist, zumindest aber umständlich ist. Im Kontext der Räume mit Funktionen ist der Umgang mit offenen Mengen jedoch leicht. Wir wollen nun versuchen die beiden Theorien miteinander zu verknüpfen.

Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge, dann ist der zugehörige affine Koordinatenring $\Gamma(X)$ ein Integritätsbereich. Wir wollen in diesem Abschnitt für offene Mengen $U \subseteq X$ eine Bestimmte Teilmenge

$$\mathcal{O}_X(U) \;\subseteq\; \mathrm{Quot}\big(\Gamma(X)\big)$$

des Quotientenkörpers des Koordinatenrings zusammen mit einer Injektion $\mathcal{O}_X(U) \hookrightarrow \mathrm{Abb}(U, k)$ konstruieren, so dass $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen über k wird.

Definition 3.5 *(Rationaler Funktionenkörper)*
Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge. Der Quotientenkörper

$$K(X) \;:=\; \mathrm{Quot}\big(\Gamma(X)\big)$$

des affinen Koordinatenrings $\Gamma(X)$ heißt der (Rationale-)Funktionenkörper von X.

Bemerkung 3.6 *In der Situation der vorangegangen Definition sei $h \in K(X)$. Wir scheiben*

$$h \;=\; \frac{f}{g} \qquad \text{mit } f, g \in \Gamma(X) \text{ und } g \neq 0$$

und erhalten eine Abbildung

$$\begin{array}{rcl} D(g) \;=\; \big\{\, x \in X \,\big|\, g(x) \neq 0 \,\big\} & \to & k \\ x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

Ist weiter $\frac{f}{g} \;=\; h \;=\; \frac{\tilde{f}}{\tilde{g}}$, so gilt $f\tilde{g} = \tilde{f}g$ in $\Gamma(X)$ und damit ist auch

$$\frac{f(x)}{g(x)} \;=\; \frac{\tilde{f}(x)}{\tilde{g}(x)}$$

für alle $x \in D(g\tilde{g}) = D(g) \cap D(\tilde{g})$.

Lemma 3.7 *Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge und seien $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \Gamma(X)$ Morphismen. Existiert ein $U \subseteq D(g_1g_2)$ offen und nicht-leer, mit*

$$\frac{f_1(u)}{g_1(u)} = \frac{f_2(u)}{g_2(u)} \qquad \text{für alle } u \in U$$

so gilt bereits $\frac{f_1}{g_1} = \frac{f_2}{g_2}$ in $K(X)$.

Beweis. Nach Voraussetzung stimmen die Morphismen f_1g_2 und f_2g_1 auf U überein. Das heißt jedoch nichts anderes als das $U \subseteq V(f_1g_2 - f_2g_1)$ ist. Weiter ist ebenfalls nach Voraussetzung X irreduzibel, also ist U eine offene nicht-leere Teilmenge eines irreduziblen Raums und damit dicht. Weil alle Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$ abgeschlossen sind und der Abschluss von U die kleinste abgeschlossene Menge ist, die U enthält, gilt also

$$X = \overline{U} \subseteq V(f_1g_2 - f_2g_1) \subseteq X$$

und somit stimmen f_1g_2 und f_2g_1 auf ganz X überein. Also $f_1g_2 - f_2g_1 = 0$ in $\Gamma(X)$. □

Auf unserem Weg, eine sinnvolle Teilmenge von $K(X)$ anzugeben, wollen wir nun die im affinen Kontext so wichtigen Maximalideale in den Kontext der Räume mit Funktionen übertragen. Sei also X ein irreduzibler affiner Raum, dann haben wir zu $x \in X$ das Maximalideal

$$\mathfrak{m}_x := \left\{ f \in \Gamma(X) \,\middle|\, f(x) = 0 \right\} \lhd \Gamma(X)$$

Jedes Maximalideal ist insbesondere prim, also können wir die Lokalisierung[3] des Rings $\Gamma(X)$ nach dem Primideal $\mathfrak{m}_x$ betrachten. Es ist

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \left\{ \frac{f}{g} \in K(X) \,\middle|\, g(x) \neq 0 \right\}$$

Wir sehen direkt die Gleicheit der Teilmengen von $K(X)$

$$\Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcup_{\substack{g \in \Gamma(X) \\ g(x) \neq 0}} \Gamma(X)_g$$

wobei natürlich

$$\Gamma(X)_g = \left\{ \frac{f}{g^t} \in K(X) \,\middle|\, t \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

die Lokalisierung von $\Gamma(X)$ nach dem Element g ist. Mit dieser Betrachtung über Lokalisierungen erhalten wir schnell die Idee für unsere gesuchte Definition

Definition 3.8 *(Funktionenfamilie zu X)*
Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge und $U \subseteq X$ eine nicht-leere offene Teilmenge. Wir setzen

$$\mathcal{O}_X(U) := \bigcap_{x \in U} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} \subseteq K(X)$$

[3] Vergleiche Vorlesung zur Kommutativen Algebra [L3]

Bemerkung 3.9 *In der Situation der obigen Definition fassen wir $U_X(U)$ stets als Teilmenge von $\mathrm{Abb}(U,k)$ auf. Dies vermöge der Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X(U) & \hookrightarrow & \mathrm{Abb}(U,k) \\ h & \mapsto & \left[u \mapsto \dfrac{f(u)}{g(u)}\right] \end{array}$$

wobei natürlich $h = \frac{f}{g}$ und $g(u) \neq 0$ gelten. Solche Elemente $f, g \in \Gamma(X)$ gibt es, denn $h \in \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_u}$ für alle $u \in U$ nach Konstruktion von $\mathcal{O}_X(U)$.

Die Injektivität der obigen Abbildung folgt unmittelbar aus dem Lemma 3.7.

Warnung. Im Allgemeinen müsssen wir die Elemente f, g in der obigen Abbildung in Abhängigkeit von u wählen, das heißt die Darstellung $h = \frac{f}{g}$ muss möglicherweise für jedes u neu gewählt werden.

Satz 3.10 *Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge, dann ist das Tupel $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen über k.*

Beweis. Nach der vorangegangen Bemerkung können wir $\mathcal{O}_X(U)$ als Teilmenge von $\mathrm{Abb}(U,k)$ auffassen[4]. Die Menge $\mathcal{O}_X(U)$ ist als Schnitt von Lokalisierungen offensichtlich abgeschlossen unter Addition und Multiplikation und $\Gamma(X)$ ist in jeder Lokalisierung enthalten. Damit ist $\mathcal{O}_X(U)$ eine k-Unteralgebra. Wir müssen nun die Bedingungen **(1)** und **(2)** von Definition 3.1 nachprüfen.

Zu (1) Für $U' \subseteq U$ offen ist

$$\mathcal{O}_X(U) \subseteq \mathcal{O}_X(U') \quad \text{in } K(X)$$

denn wir schneiden bei $\mathcal{O}_X(U')$ weniger Lokalisierungen als bei $\mathcal{O}_X(U)$. Diese Inklusion entspricht aber genau der Einschränkung von Abbildungen $f : U \to k$ auf $f|_{U'} : U' \to k$.

Zu (2) Seien $U_i \subseteq X$ für $i \in I$ offene Mengen. Betrachte

$$\mathcal{O}_X\Big(\bigcup_{i \in I} U_i\Big) = \bigcap_{x \in \bigcup U_i} \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x} = \bigcap_{i \in I} \mathcal{O}_X(U_i)$$

□

Satz 3.11 *Sei X eine irreduzible affine algebraische Menge und $(X, \mathcal{O}_X)$ der zugehörige Raum mit Funktionen über k. Sei weiter $f \in \Gamma(X)$. Dann gilt*

$$\mathcal{O}_X\big(D(f)\big) = \Gamma(X)_f \subseteq K(X)$$

Insbesondere sehen wir mit $f = 1$

$$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_X\big(D(1)\big) = \Gamma(X)_1 = \Gamma(X)$$

Beweis. Die Inklusion

$$\Gamma(X)_f \subseteq \mathcal{O}_X\big(D(f)\big)$$

[4] Streng genommen betrachten wir das Bild von $\mathcal{O}_X(U)$ unter der in der Bemerkung angegebenen Injektion.

gilt offensichtlich, denn wir können zu $h \in \Gamma(X)_f$ stets eine Darstellung $h = \frac{g}{f^t}$ mit $g \in \Gamma(X)$ auf $D(f)$ finden. Die andere Inklusion ist weniger offensichtlich. Für Ihren Beweis werden wir auch den Hilbertschen Nullstellensatz implizit verwenden. Sei also $g \in \mathcal{O}_X\left(D(f)\right)$ dann setze

$$\mathfrak{a} \;=\; \left\{\, h \in \Gamma(X) \,\middle|\, h \cdot g \in \Gamma(X) \,\right\} \;\lhd\; \Gamma(X)$$

Es genügt nun $f \in \sqrt{\mathfrak{a}}$ zu zeigen. Denn ist $f^t \in \mathfrak{a}$, so ist $f^t g \in \Gamma(X)$ und damit gilt dann

$$\frac{f^t\, g}{f^t} \;\in\; \Gamma(X)_f$$

Wegen $\sqrt{\mathfrak{a}} = I\big(V(\mathfrak{a})\big)$ genügt es sogar zu zeigen, dass $f(x) = 0$ ist für alle $x \in V(\mathfrak{a})$. Sei hierzu $x \in X$ mit $f(x) \neq 0$, dann ist $x \in D(f)$. Also existieren $r, s \in \Gamma(X)$ mit

$$g \;=\; \frac{r}{s} \quad \text{und} \quad s(x) \neq 0$$

Denn $g \in \Gamma(X)_{\mathfrak{m}_x}$ für alle $x \in D(f)$. Dann ist aber $s \in \mathfrak{a}$ und wir haben ein Element s in $\mathfrak{a}$, das bei x nicht verschwindet, also ist $x \notin V(\mathfrak{a})$. □

Satz 3.12 *(Verträglichkeit von Morphismen)*
Seien X, Y zwei irreduzible affine algebraische Mengen und $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ die zugehörigen Räume mit Funktionen. Sei weiter

$$f : X \;\to\; Y$$

eine Abbildung zwischen den Mengen, dann sind äquivalent

(1) *f ist ein Morphismus affiner algebraischer Mengen.*

(2) *Für alle $g \in \Gamma(Y)$ gilt $g \circ f \;\in \Gamma(X)$.*

(3) *f ist ein Morphismus von Räumen mit Funktionen über k.*

Beweis. Wir vergegenwärtigen uns die Definition eines Morphismus von affinen algebraischen Mengen 2.1 und die eines Morphismus von Räumen mit Funktion 3.3 und beweisen die Aussage dann Schrittweise.

(1) ⇒ (2) Dies ist genau die Funktorialität von Γ.

(2) ⇒ (1) Gilt **(2)**, so erhalten wir einen k-Algebra-Homomorphismus

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(Y) & \to & \Gamma(X) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

und der zugehörige Morphismus $X \to Y$ ist gerade f, denn Γ ist volltreu nach Satz 2.13.

(3) ⇒ (2) Diese Implikation ist klar, denn **(2)** ist ein Spezielfall von **(3)**.

(2) ⇒ (3) Sei $g \in \Gamma(Y)$, dann ist

$$f^{-1}\big(D(g)\big) \;=\; f^{-1}\big(\{y \in Y | g(y) \neq 0\}\big) \;=\; \left\{\, x \in X \,\middle|\, g\big(f(x)\big) \neq 0 \,\right\} \;=\; D(f \circ g)$$

Dann ist f stetig, das heißt Urbilder offener Mengen sind offen, denn die Mengen der Form $D(g)$ bilden eine Basis der Topologie nach Lemma 2.10. Setze $\varphi : \Gamma(Y) \ni g \mapsto g \circ f \in \Gamma(X)$, dann haben wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_Y\big(D(g)\big) \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_X\big(D\big(\varphi(g)\big)\big) \arrow[d, equal] \\
\Gamma(Y)_g \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \Gamma(X)_{\varphi(g)} \\
\Gamma(Y) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[u] & \Gamma(X) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

wobei $\tilde{\varphi}$ von φ induziert wird, das heißt wende φ getrennt auf Zähler und Nenner an.
Da φ durch Verkettung gegeben ist, dilt dies auch für die Abbildung $\mathcal{O}_Y\big(D(g)\big) \dashrightarrow \mathcal{O}_X\big(D(\varphi(g))\big)$ ganz oben im Diagramm. Wir haben nun für eine Basis der Topologie gezeigt, dass die Behauptung gilt. Dass dies ausreichend ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 3.13 *Seien $(X, \mathcal{O}_X)$ und $(Y, \mathcal{O}_Y)$ ein Raum mit Funktionen und sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Sei dazu die Familie der $V_i \subseteq Y$ für $i \in I$ eine Basis der Topologie auf Y, so dass für alle V_i und alle $g \in \mathcal{O}_Y(V_i)$ gilt*

$$g \circ f|_{f^{-1}(V_i)}(V_i) \;\in\; \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V_i)\big) \qquad (*)$$

Dann ist f ein Morphismus von Räumen mit Funktionen, das heißt $(*)$ gilt für <u>alle</u> offenen Teilmengen.

Beweis. Sei $V \subseteq Y$ offen, dann gibt es eine Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$V \;=\; \bigcup_{i \in J} V_i$$

Sei $g \in \mathcal{O}_Y(V)$. Dann gilt nach Voraussetzung

$$g|_{V_i} \circ f|_{f^{-1}(V_i)} \;\in\; \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V_i)\big)$$

Es gilt

$$g|_{V_i} \circ f|_{f^{-1}(V_i)} \;=\; g| \circ f|_{f^{-1}(V_i)} \;=\; \big(g \circ f|_{f^{-1}(V)}\big)|_{f^{-1}(V_i)}$$

Weil nun aber auch

$$\bigcup_{i \in J} f^{-1}(V_i) \;=\; f^{-1}(V) \quad \text{und} \quad \big(g \circ f|_{f^{-1}(V)}\big)|_{f^{-1}(V_i)} \in \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V_i)\big)$$

gelten, folgt durch „Verkleben von Funktionen“ für die gewählte Überdeckung

$$g| \circ f|_{f^{-1}(V)} \;\in\; \mathcal{O}_X\big(f^{-1}(V)\big)$$

□

Satz 3.14 *Wir haben einen Funktor*

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \text{irred. affine algebraische} \\ \text{Mengen über } k \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} \text{Raum mit Funktionen} \\ \text{über } k \end{pmatrix} \\ X & \mapsto & (X, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Dieser Funktor ist volltreu, das heißt für alle irreduziblen affinen algebraischen Mengen X, Y ist die Abbildung

$$\Psi : \operatorname{Hom}(X,Y) \ \to \ \operatorname{Hom}\big((X,\mathcal{O}_X),(Y,\mathcal{O}_Y)\big)$$

bijektiv. Wegen dieser Bijektivität von Ψ lassen wir in Zukunft auch oft den Hinweis auf $\mathcal{O}_X$ zu X weg.

Achtung. Dieser Funktor liefert <u>keine</u> Äquivalenz von Kategorien, denn längst nicht alle Räume mit Funktionen über k kommen von affinen algebraischen Mengen über k. (klar.)

4 Prävarietäten

Definition 4.1 *(Affine Varietät, Prävarietät, Morphismen)*

(1) *Eine affine Varietät über k ist ein Raum mit Funktionen über k, der als Raum mit Funktionen zu einem Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$, der zu einer affinen algebraischen Menge X gehört, isomorph ist.*

(2) *Eine Prävarietät über k ist ein Raum mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X)$ über k, so dass X zusammenhängend ist und dass es eine endliche Überdeckung*

$$X \ = \ \bigcup_{i=1}^{n} U_i \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } U_i \subseteq X \text{ offen}$$

derart gibt, dass für alle $i = 1, \ldots, n$ der Raum mit Funktionen $U_i, \mathcal{O}_{X|U_i})$ eine affine Varietät ist.

(3) *Morphismen von Prävarietäten $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ sind Morphismen der entsprechenden Räume mit Funktionen.*

Bemerkung 4.2 *Wir erhalten durch diese Definition die Kategorie der Prävarietäten über k sowie den Funktor*

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} \text{Prävarietät} \\ \text{über } k \end{pmatrix} & \to & \begin{pmatrix} \text{Raum mit Funktionen} \\ \text{über } k \end{pmatrix} \\ (X, \mathcal{O}_X) & \mapsto & (X, \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Dieser Funktor ist per Definition volltreu, den die Morphismen sind zu beiden Kategorien gleich. Wir können die uns bekannte Äquivalenz von Kategorien nun erweitern zu

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix} \text{irred. affine algebraische} \\ \text{Mengen über } k \end{pmatrix} \arrow[rr, "X \mapsto (X,\mathcal{O}_X)"] \arrow[dr, "X \mapsto \Gamma(X)"'] & & \begin{pmatrix} \text{affine Varietät} \\ \text{über } k \end{pmatrix} \arrow[dl, "(X,\mathcal{O}_x) \mapsto \mathcal{O}_X"] \\ & \begin{pmatrix} \text{integre endl. erzeugte} \\ k\text{-Algebren} \end{pmatrix} & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 4.3 *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät, dann ist der topologische Raum X irreduzibel.*

Lemma 4.4 *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ eine Prävarietät, dann ist der topologische Raum X noethersch.*

Beweis. Sei

$$X \supseteq Z_1 \supseteq Z_2 \supseteq \ldots$$

eine absteigende Kette abgeschlossener Teilmengen von X und sei

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } U_i \subseteq X \text{ offen}$$

eine endliche Überdeckung von X mit affinen Varietäten. Dann sind alle U_i noethersch und die Ketten

$$X \cap U_i \supseteq Z_1 \cap U_i \supseteq Z_2 \cap U_i \supseteq \ldots$$

werden für alle $i = 1, \ldots, n$ stationär. □

Offene Unterprävarietäten

Lemma 4.5 *Sei X eine affine Varietät und $f \in \Gamma(X)$, dann ist $\big(D(f), \mathcal{O}_{X|D(f)}\big)$ eine affine Varietät mit affinem Koordinatenring*

$$\mathcal{O}_{X|D(f)}\big(D(f)\big) = \mathcal{O}_X\big(D(f)\big) = \Gamma(X)_f$$

Beweis. Der Raum X kommt von einer affinen algebraischen Menge, etwa $X \subseteq \mathbb{A}^n(k)$ mit zugehörigem Koordinatenring

$$\Gamma(X) = k[T_1, \ldots, T_n] / I(X)$$

Setze nun $\mathfrak{a} := I(X) + (f \cdot T_{n+1} - 1) \lhd k[\underline{T}]$, dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} k[T_1, \ldots, T_n] / I(X) &\to \Gamma(X)_f \\ T_i &\mapsto \begin{cases} T_i & \text{falls } i \leq n \\ \frac{1}{f} & \text{falls } i = n+1 \end{cases} \end{aligned}$$

ein Isomorphismus. Da $\Gamma(X)_f$ insbesondere ein Integritätsring ist, ist $\mathfrak{a}$ ein Primideal. Daher können wir die Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^{n+1}(k) &\to \mathbb{A}^n(k) \\ (x_1, \ldots, x_{n+1}) &\mapsto (x_1, \ldots, x_n) \end{aligned}$$

zu einer bijektiven Abbildung

$$j : V(\mathfrak{a}) \xrightarrow{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mapsto (x_1, \ldots, x_n)} D(f) \subseteq X$$

einschränken. Als Einschränkung einer stetigen Abbildung ist auch j selbst stetig. Da j bijektiv ist, gibt es eine Umkehrfunktion. Diese ist genau dann stetig, wenn j offen ist, das heißt wenn j offene Mengen auf offene Mengen abbildet.
Tatsächlich genügt es, dies auf einer Basis der Topologie zu zeigen. Sei dazu

$$\frac{g}{f^N} \in \Gamma\big(V(\mathfrak{a})\big) = \Gamma(X)_f$$

Dann ist

$$j\Big(D\Big(\frac{g}{f^N}\Big)\Big) \;=\; j\big(D(gf)\big) \;=\; D(fg) \;\subseteq\; D(f)$$

Um zu erkennen, dass j ein Isomorphismus von Räumen mit Funktionen ist, müssen wir noch betrachten, was mit Systemen von Funktionen passiert. Um die in Definition 3.2 geforderte Eigenschaft, für alle offenen $V \subseteq Y$ und alle $s \in \mathcal{O}_Y(V)$ gilt

$$s \circ f_{|_{f^{-1}(V)}} \in \mathcal{O}_X\left(f^{-1}(V)\right)$$

zu erfüllen, genügt es nach Lemma 3.13 die Eigenschaft auf einer Basis der Topologie zu erfüllen. Für $g \in \Gamma$ gilt

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X\left(D(fg)\right) & \xrightarrow{g \mapsto s \circ g} & \mathcal{O}_{V(\mathfrak{a})}\left(D(fg)\right) \\ \| & & \| \\ \Gamma(X)_{fg} & = & \left(\Gamma(X)_f\right)_{fg} \end{array}$$

$\square$

Beispiel 18 *Fasse* $\mathbb{A}^{n^2}(k)$ *erneut als Raum der* $(n \times n)$*-Matrizen über* k *auf. Wir kennen bereits die Identifikation* $\mathrm{GL}_N(k) \;=\; D(\det)$. *Mit dem vorangegangen Lemma erhalten wir die Isomorphie*

$$\Big(\mathrm{GL}_n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n^2}(k)|\,\mathrm{GL}_n(k)}\Big) \;\cong\; (Y, \mathcal{O}_Y)$$

wobei Y *eine irreduzible affine algebraische Menge zu*

$$k[T_{i,j}, T_{n+1}] \big/ (T_{n^2+1} \cdot \det - 1) \;=\; k[T_{i,j}]_{\det}$$

ist. Damit erhalten wir im Nachhinein die Heuristik geliefert, die wir schon zuvor im Beispiel 13 angewand haben.

Beispiel 19 *(Satz von Cayley-Hmilton)*
Wie oben setzen wir auch hier

$$\mathrm{Mat}_{n\times n}(k) \;=\; \mathbb{A}^{n^2}(k)$$

wir betrachten die Menge der diagonalisierbaren Matrizen $\mathcal{D}$ *in* $\mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$ *und darin die Teilmenge*

$$\mathcal{E} \;:=\; \left\{\, A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(k) \,\middle|\, \mathit{chpol}_A \text{ hat nur einfache Nullstellen} \,\right\} \;\subseteq \mathcal{D}$$

Es gilt das folgende

Theorem. Die Menge $\mathcal{E}$ liegt offen in $\mathbb{A}^{n^2}(k)$.

Diesen Satz wollen wir in dieser Vorlesung nicht beweisen. Wenn wir diesen Satz jedoch voraussetzen erhalten wir sofort, dass $\mathcal{E}$ *und damit auch* $\mathcal{D}$ *dicht in* $\mathbb{A}^{n^2}(k)$ *sind. Und damit folgt sehr leicht*

Korollar (Satz von Cayley-Hamilton)
Für alle $A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(k)$ gilt

$$\mathit{chpol}_A(A) \;=\; 0$$

Beweis. *Es ist zu zeigen, dass die* n^2*-Einträge der Matrix* $\mathit{chpol}_A(A)$ *gleich Null sind. Diese Einträge sind aber Polynome in den Koeffizienten von* A*, also bestimmte* $f_{i,j} \in \Gamma\big(\mathbb{A}^{n^2}(k)\big)$ *für* $i, j = 1, \ldots, n$. *Wenn wir das zu zeigende in unseren Kontext übersetzen erhalten wir, dass wir die Gleichung*

$$V \;=\; V\big(\, f_{i,j} \,\big|\, i, j = 1, \ldots, n \,\big) \;=\; \mathbb{A}^{n^2}(k)$$

zeigen müssen. Nach dem Theorem genügt es $\mathcal{D} \subset V$ zu zeigen, das heißt wir müssen das Korollar für Diagonalmatrizen zeigen und das ist offensichtlich. □

Definition 4.6 *(affine offene Teilmenge)*
Ist X eine Prävarietät, dann verstehen wir unter einer affinen offenen Teilmenge von X eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit der Eigenschaft, dass $U, \mathcal{O}_{X|U})$ eine affine Varietät ist.

Satz 4.7 *Sei X eine Prävarietät und $U \subseteq X$ offen. Dann ist auch $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ eine Prävarietät (und die Inklusion $U \hookrightarrow X$ ist ein Morphismus von Prävarietäten).*

Beweis. Falls U die leere Menge ist, so ist nichts zu zeigen. Andernfalls gelten

(i) *U ist irreduzibel*, denn X ist irreduzibel und somit ist U dicht in X, das heißt also $\overline{U} = X$. Weiter gilt für alle $Z \subseteq X$ die folgende Äquivalenz:

$$Z \text{ ist irreduzibel} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{Z} \text{ ist irreduzibel}$$

(ii) *U ist endliche Vereinigung affiner offener Teilmengen*
Zum Nachweis schreibe

$$X \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} U_i \qquad \text{mit } n \in \mathbb{N} \text{ und } U_i \subseteq X \text{ offen}$$

wobei die U_i die nach Definition vorhandenen affin offenen Teilmengen sind. Für jede dieser affinen Varietäten U_i gilt dann

$$U \cap U_i \;=\; \bigcup_{j \in J} D(f_j^{(i)}) \;\subseteq U_i$$

mit einer geeigneten nicht notwendig endlichen Menge $J \subseteq \mathbb{N}$ und Morphismen $f_j^{(i)} \in \Gamma(U_i)$. Damit sehen wir

$$U \;=\; \bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j \in J} D(f_j^{(i)})$$

und alle $D(f_j^{(i)})$ sind affine Varietäten. Weil U als Teilmenge des noetherschen topologischen Raums X selbst wieder noethersch und damit quasi-kompakt ist, genügt bereits eine endliche Vereinigung dieser $D(f_j^{(i)})$ um U zu Überdecken. □

Beispiel 20 *Betrachte den topologischen Raum $X := \mathbb{A}^2(k)$ und darin die offene Menge $U := \mathbb{A}^2(k) \setminus \{(0,0))\}$, dann ist*

$$U \;=\; D(T_1) \cup D(T_2)$$

wobei $k[T_1, T_2]$ den Polynomring zu $\mathbb{A}^2(k)$ bezeichne. Also ist U eine Prävarietät. Wir werden in den Übungen sehen, dass U nicht affin ist.

Bemerkung 4.8 *Ist X eine Prävarietät, so bilden die affinen offenen Teilmengen $U \subseteq X$ eine Basis der Topologie.*

Definition und Bemerkung 4.9 *(Der rationale Funktionenkörper einer Prävarietät)*
Ist X eine irreduzible affine algebraische Menge, dann haben wir den rationalen Funktionenkörper definiert als

$$K(X) \;=\; \mathrm{Quot}(\Gamma(X))$$

dies war möglich, da bei irreduziblen affinen algebraischen Mengen der zugehörige Koordinatenring integer ist.

Sei nun X eine Prävarietät und seien $U, V \subseteq X$ affin offene nicht-leere Teilmengen, dann ist

$$\mathcal{O}_X(U) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(U \cap V) \qquad \text{als Teimengen von } K(U)$$

Wähle für den Übergang von $\mathcal{O}_X(U \cap V)$ nach $K(U)$ ein $f \in \Gamma(U)$ mit $D(f) \subseteq U \cap V$, dann erhalte die Inklusionskette

$$\mathcal{O}_X(U) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(U \cap V) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(D(f)) \;\subseteq\; \Gamma(U)_f \;\subseteq\; K(U)$$

Da wir dieses Argument genau so auch für $\mathcal{O}_X(V)$ betrachten können gilt

$$\mathrm{Quot}\big(\mathcal{O}_X(U)\big) \;=\; \mathrm{Quot}\big(\mathcal{O}_X(U \cap V)\big) \;=\; \mathrm{Quot}\big(\mathcal{O}_X(V)\big)$$

Wir wählen also eine affin offene Teilmenge $U \in X$ und nennen

$$K(X) \;:=\; \mathrm{Quot}\big(\mathcal{O}_X(U)\big) \;=\; K(U)$$

den rationalen Funktionenkörper der Prävarietät X.

Anmerkung. Die Zuordnung von X zu seinem rationalen Funktionenkörper $K(X)$ ist, selbst im affinen Fall, nicht funktoriell. Denn die Abbildung $\Gamma(Y) \to \Gamma(X)$ die wir für affine algebraische Mengen X, Y zur Abbildung $X \to Y$ aus der oben genannten Zuordnung gewinnen ist nicht injektiv.

Satz 4.10 *Sei X eine Prävarietät.*

- *Ist $U \subseteq X$ offen und nicht leer, so gilt*

$$\mathcal{O}_X(U) \;\subseteq\; K(X)$$

- *Sind $U' \subseteq U \subseteq X$ offen und nicht leer, so ist*

$$\mathcal{O}_X(U) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(U') \;\subseteq\; K(X)$$

- *Für alle $U, V \subseteq X$ offen und nicht leer gilt*

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) \;=\; \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V)$$

Beweis. Alle offenen und nicht-leeren Teilmengen in X sind irreduzibel. Sind $U' \subseteq U \subseteq X$ offen und nicht leer, so ist die Einschränkung

$$\mathcal{O}_X(U) \;\to\; \mathcal{O}_X(U')$$

injektiv. Durch verkleinern von U und U' kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass U affin und $U' = D(g)$ mit $g \in \Gamma(U)$ ist. Dann ist die betrachtete Einschränkung gleich der Abbildung

$$\Gamma(U) \;\to\; \Gamma(U)_g$$

Sei nun $U \subseteq X$ offen und nicht leer, dann gibt es ein $U' \subseteq U$ derart, dass U' offen und affin ist und es gilt

$$\mathcal{O}_X(U) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(U') \;\subseteq\; K(U') \;=\; K(X)$$

Damit sind die ersten beiden Aussagen bewiesen und es bleibt nurnoch die letzte nachzuweisen. Seien dafür $U, V \subseteq X$ offen und nicht leer, dann folgt aus dem obigen Teil

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(U)$$

Ebenso gilt dies aber auch für $\mathcal{O}_X(V)$ und damit folgt die erste Inklusion

$$\mathcal{O}_X(U \cup V) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V)$$

Für die andere Inklusion sei $f \in \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V)$. Dann ist wegen

$$\mathcal{O}_X(U), \mathcal{O}_X(V) \;\subseteq\; \mathcal{O}_X(U \cap V) \qquad \text{als Teilmengen von } K(X)$$

die Einschränkung von f, aufgefasst als Abbildung $U \to k$ oder $V \to k$, nach $U \cap V$ die selbe. Die Abbildungen $U \to k$ und $V \to k$, die durch f gegeben sind, „verkleben" sich also auf natürliche Weise zu einem Element aus $\mathcal{O}_X(U \cup V)$, welches notwendigerweise mit f übereinstimmt. $\square$

Definition 4.11 *(offene Unterprävarietät)*
Ist X eine Prävarietät und $U \subseteq X$ offen, dann ist auch $\left(U, \mathcal{O}_{X|U}\right)$ eine Prävarietät und wir nennen dieses Tupel eine offene Unterprävarietät von $(X, \mathcal{O}_X)$.

Abgeschlossene Unterprävarietäten

Sei X eine Prävarietät und $Z \subseteq X$ eine abgeschlossene Teilmenge. Wir wollen nun nicht nur im Falle offener Teilmengen von Unterprävarietäten reden können, sondern auch in der Lage sein die abgeschlossenen Mengen, die ja in der Kategorie der affinen algebraischen Mengen eine besonders wichtige Rolle spielen, in der Kategorie der Räume mit Funktionen brauchbar zu betrachten.

Wir müssen also zunächst einmal für offenen Teilmengen Familien von Funktionen nach k angeben, die der Definition eines Raumes mit Funktionen 3.1 genügen. Sei $U \subseteq Z$ eine offene Teilmenge, dann setze zunächst für alle $u \in U$ die Hilfsfamilie

$$\mathcal{M}(u) \;:=\; \left\{\, V \subseteq X \;\middle|\; V \text{ ist offen und } u \in V \,\right\}$$

Damit können wir den folgenden Ansatz formulieren:

$$\mathcal{O}'_Z(U) \;\;:=\;\; \left\{\, f : U \to k \;\middle|\; \forall\, u \in U \;\exists\, V \in \mathcal{M}(u)\; \exists g \in \mathcal{O}_X(V) \text{ so dass } f_{|U \cap V} \;=\; g_{|U \cap V} \right\}$$

Wir wollen nun zeigen, dass wir mit diesem Ansatz tatsächlich aus Z einen Raum mit Funktionen machen können, der dann eine Prävarietät ist.

Leicht zu sehen ist, dass $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ein Raum mit Funktionen über k ist. Weiter ist klar, dass wir nur hoffen können bei unserer Konstruktion auf eine Prävarietät zu stoßen, wenn Z irreduzibel ist.

Es gibt bereits einen Fall, indem das Symbol $\mathcal{O}_Z$ belegt ist. Mit dem folgenden Lemma zeigen wir, dass unsere neue Definition mit der bereits vorhandenen verträglich ist. Dann können wir anschließend den Strich an unserem soeben eingeführten Zeichen wieder weglassen.

Lemma 4.12 *Sei X eine affine Varietät und $Z \subseteq X$ eine irreduzible agbeschlossene Teilmenge von X. Wie oben konstruiere $(Z, \mathcal{O}'_Z)$. Andererseits entspricht X einer irreduziblen affinen algebraischen Menge, also gilt das auch für Z und wir können von der zugehörigen affinen Varietät $(Z, \mathcal{O}_Z)$ sprechen. Es gilt*

$$(Z, \mathcal{O}'_Z) \;=\; (Z, \mathcal{O}_Z)$$

das heißt für alle offenen $U \subseteq Z$ gilt: $\mathcal{O}_Z(U) \;=\; \mathcal{O}'_Z(U)$.

Beweis. In beiden Fällen trägt Z die Teilraumtopologie bezüglich der Inklusion $Z \subseteq X$. Sei nun $U \subseteq Z$ bezüglich dierser Topologie offen in Z. Wir zeigen zwei Inklusionen:

- „$\mathcal{O}'_Z(U) \subseteq \mathcal{O}_Z(U)$“ Sei $f \in \mathcal{O}'_Z(U)$ und seien u, V, g wie in der Definition von $\mathcal{O}'_Z(U)$, etwa

  $$g \;=\; \frac{h}{s} \;\in \mathcal{O}_X(V) \;\subseteq\; K(X) \qquad \text{mit } s, h \in \Gamma(X) \text{ und } s(u) \neq 0$$

  bezeichne mit $\overline{s}, \overline{h}$ die Bilder von s, h unter der natürlichen Projektion von $\Gamma(X)$ nach $\Gamma(Z)$, so lässt sich die Einschränkung von f auf die Menge $V \,\cap\, D(\overline{s}) \,\cap\, U$ beschreiben durch die Zuordnung

  $$z \;\mapsto\; \frac{\overline{h}(z)}{\overline{s}(z)}$$

  Aus der Definition von $\mathcal{O}_Z$ folgt damit

  $$f_{|V \,\cap\, D(\overline{s}) \,\cap\, U} \;\in\; \mathcal{O}_Z(V \,\cap\, D(\overline{s}) \,\cap\, U)$$

  Für jedes $u \in U$ finden wir eine solche Umgebung und durch das Verkleben der Funktionen folgt

  $$f \;\in\; \mathcal{O}_Z(U)$$

- „$\mathcal{O}'_Z(U) \supseteq \mathcal{O}_Z(U)$“ Sei nun $f \in \mathcal{O}_Z(U)$, dann haben wir bereits gezeigt, dass

  $$\mathcal{O}_Z(U) \;=\; \bigcap_{u \in U} \Gamma(Z)_{\mathfrak{m}_x} \;\subseteq\; K(X)$$

  Sei nun $u \in U$, dann schreibe

  $$f \;=\; \frac{h}{s} \qquad \text{mit } h, s \in \Gamma(Z) \text{ und } s(u) \neq 0$$

  Seien $\dot{s}$ und $\dot{h}$ zwei Urbilder von s und h unter der natürlichen Projektion von $\Gamma(X)$ nach $\Gamma(Z)$. Setze

  $$V \;:=\; D(\dot{s}) \;\subseteq\; X \quad \text{und} \quad g \;:=\; \frac{\dot{h}}{\dot{s}} \;\in K(X)$$

  Dann gilt $f_{|U \,\cap\, V} \;=\; g_{|U \,\cap\, V}$, also $f \in \mathcal{O}'_Z(U)$. □

Also ist in dem Fall, wo das Symbol $\mathcal{O}_Z$ bereits belegt war, die neue Definition tatsächlich äquivalent zur alten. Also lassen wir den Strich nun wieder weg, da wir nicht weiter unterscheiden müssen.

Folgerung 4.13 *Sei X eine Prävarietät und $Z \subseteq X$ eine irreduzioble abgeschlossene Teilmenge. Dann ist $(Z, \mathcal{O}_Z)$ ebenfalls eine Prävarietät.*

Beweis. Ist etwa

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} U_i$$

eine offene Überdeckung von X durch affine Varietäten. Dann ist

$$Z = \bigcup_{i=1}^{n} U_i \cap Z$$

eine offene Überdeckung von Z und die $U_i \cap Z$ sind affine Varietäten, denn für jedes $i = 1, \ldots, n$ gilt

- $U_i \cap Z \subseteq Z$ ist offen.
- $U_i \cap Z \subseteq U_i$ ist abgeschlossen.
- $\left(U_i \cap Z, \mathcal{O}_{U_i \cap Z}\right)$ ist affine Varietät nach Lemma 4.12, denn

$$\mathcal{O}_{U_i \cap Z} \overset{4.12}{=} \mathcal{O}'_{U_i \cap Z} = \mathcal{O}'_{Z|U_i \cap Z}$$

□

5 Projektive Varietäten

Homogene Polynome

Den Großteil dieses technischen Einschubs können wir sehr allgemein für Ringe machen. Sei also im Folgenden R immer ein kommutativer Ring.

Definition 5.1 *(Homogenes Polynom)*
Ein Polynom $f \in R[X_0, \ldots, X_n]$ heißt homogen vom Grad d, falls f die Summe von Monomen vom Grad d ist. Also von der Form

$$f = \sum_{|i|=d} a_{i_0, \ldots, i_n} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$$

wobei $|i| := i_0 + \ldots + i_n$.

Beispiel 21 *(Homogene Polynome)*

$$f = X_0^3 + X_0 X_1 X_2 + X_1 X_2^2$$

ist ein homogenes Polynom vom Grad $d = 3$.

Bemerkung 5.2 *Ist R ein Integritätsring mit unendlich vielen Elementen, so gilt:*
$f \in R[X_0, \ldots, X_n]$ ist genau dann homogen vom Grad d, wenn für alle $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $(x_0, \ldots, x_n) \in R^{n+1}$ gilt

$$f(\lambda x_0, \ldots, \lambda x_n) = \lambda^d \cdot f(x_0, \ldots, x_n)$$

In den Übungen zeigen wir diese Aussage für den Fall, dass $R = k$ ein algebraisch abgeschlossener Körper ist.

Definition und Bemerkung 5.3 *(Homogener Untermodul vom Grad d)*
Wir bezeichnen die Menge aller homogenen Polynome vom Grad d mit

$$R[X_0, \dots, X_n]_d \subseteq R[X_0, \dots, X_n]$$

Diese Menge ist offensichtlich ein R-Untermodul und wir können den Polynomring als direkte Summe über alle diese Untermoduln schreiben

$$R[X_0, \dots, X_n] = \bigoplus_{d \geq 0} R[X_0, \dots, X_n]_d$$

Notation 5.4 *Wir wollen in Zukunft aus Polynomringen eine Variable „auslassen". Wir benutzen die Schreibweise*

$$R[T_0 \dots \widehat{T_i} \dots T_n] := R[T_0, \dots, T_{i-1}, T_{i+1}, \dots, T_n]$$

für $i \in \{0, \dots, n\}$.

Lemma 5.5 *Seien $i \in \{0, \dots, n\}$ und $d \geq 0$ fest gewählt. Dann ist*

$$\begin{array}{rcl} \phi_i = \phi_i^{(d)} : R[X_0, \dots, X_n]_d & \to & \left\{ g \in R[T_0 \dots \widehat{T_i} \dots T_n] \,\middle|\, \deg(g) \leq d \right\} \\ f & \mapsto & f(T_0, \dots, T_{i-1}, 1, T_{i+1}, \dots, T_n) \end{array}$$

eine bijektive R-lineare Abbildung.

Beispiel 22

$$\phi_2^{(3)}(X_0^3 + X_0X_1X_2 + X_1X_2^2) = X_0^3 + X_0X_1 + X_1$$

Beweis. Konstruiere eine Umkehrabbldung $\psi_i^{(d)}$. Sei dazu $g \in R[T_0 \dots \widehat{T_i} \dots T_n]$ mit $\deg(g) \leq d$. Schreibe g als Summe seiner homogenen Komponenten, etwa

$$g = \sum_{j=0}^{d} g_j \quad \text{wobei } g_j \text{ ein homogenes Polynom vom Grad } j \text{ ist.}$$

und setze

$$\psi_i^{(d)}(g) := \sum_{j=0}^{d} X_i^{d-j} \cdot g_j(X_0, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots X_n)$$

Wegen der offensichtlichen R-linearität beider Abbildungen, genügt es auf Monomen zu zeigen, dass ψ_i und ϕ_i invers zueinander sind. Das ist aber klar. $\square$

Bemerkung 5.6 *Sind $f \in R[\underline{X}]_d$ und $g \in R[\underline{X}]_e$ mit $d, e \geq 0$, so ist $f \cdot g \in R[\underline{X}]_{d+e}$ und es gilt*

$$\phi_i^{(d)}(f) \cdot \phi_i^{(e)}(g) = \phi_i^{(d+e)}(fg) \tag{5.1}$$

Sei nun $R = K$ ein Körper. Wir setzen

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{f}{g} \in K(\underline{X}) \,\middle|\, f, g \in K[\underline{X}] \text{ mit } g \neq 0 \text{ und } f, g \text{ homogen vom selben Grad} \right\}$$

Nach der vorangegangenen Bemerkung ist $\mathcal{F}$ ein Teilkörper von $K(X)$. Genauer gilt sogar

$$K\Big(\frac{X_i}{X_j}\Big|\, i,j=0,\dots,n\Big) \;=\; \mathcal{F} \;\subseteq\; K(\underline{X})$$

Das heißt $\mathcal{F}$ ist die kleinste Körpererweiterung von K in $K(\underline{X})$, die sowohl K als auch alle Brüche der Form $\frac{X_i}{X_j}$ enthält. Dass alle Brüche dieser Form in $\mathcal{F}$ liegen ist klar. Für die andere Inklusion schreibe

$$K\Big(\frac{X_i}{X_j}\Big|\, i,j=0,\dots,n\Big) \;=\; K\Big(\frac{X_0}{X_i}\cdots\frac{X_n}{X_i}\Big) \qquad \text{für ein festes } i\in\{0,\dots,n\}$$

und es ist klar, dass $\mathcal{F}$ in der rechten Seite liegt. Mit dieser zweiten Schreibweise erhalten wir weiter einen Isomorphismus

$$\begin{array}{ccc} K\Big(\frac{X_0}{X_i}\cdots\frac{X_n}{X_i}\Big) & \xrightarrow{\sim} & K(T_0\dots\widehat{T_i}\dots T_n) \\ \frac{X_j}{X_i} & \mapsto & T_j \end{array}$$

Allgemein gilt dann die folgende

Bemerkung 5.7 *Die Abbildung $\phi_i^{(d)}$ induziert einen Isomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\sim} & K(T_0\dots\widehat{T_i}\dots T_n) \\ \frac{f}{g} & \mapsto & \frac{\phi_i^{\deg(f)}(f)}{\phi_i^{\deg(g)}(g)} \end{array}$$

Beweis. Die Aussage folgt aus Gleichung (5.1) und aus dem Lemma 5.5. □

Der projektive Raum

Sei nun wieder k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $n\geq 0$. In diesem Abschnitt wollen wir die Prävarietät

$$\big(\mathbb{P}^n(k),\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}\big)$$

einführen und werden diese den „n-dimensionalen projektiven Raum über k" nennen.

1. Schritt Wir definieren $\mathbb{P}^n(k)$ als Menge. Setze dazu

$$\mathbb{P}^n(k) \;:=\; \big\{\text{ Eindimensionale Untervektorräume von } k^{n+1}\big\}$$

Anschaulich gesprochen ist $\mathbb{P}^n(k)$ also die Menge aller Geraden in k^{n+1} durch den Ursprung. Fassen wir die Geraden durch den Ursprung als Äquivalenzklassen der Punkte, die auf ihr liegen, auf, so erhalten wir die Identität

$$\mathbb{P}^n(k) \;=\; {\big\{(x_0,\dots,x_n)\in k^{n+1}\setminus\{0\}\big\}}\big/{\sim}$$

wobei die Äquivalenzrelation $\sim$ definiert ist durch

$$(x_0,\dots,x_n)\sim(x_0',\dots,x_n') \;:\Leftrightarrow\; \exists\,\lambda\in k^\times\ \forall\, i=1,\dots n\ :\ x_i=\lambda x_i'$$

Bezeichne die Äquivalenzklasse von $(x_0,\ldots,x_n)$ bezüglich dieser Relation mit $(x_0:\cdots:x_n)$ dann erhalten wir die Abbildungen

$$\begin{array}{rcll} U\subset k^{n+1} & \mapsto & (x_0:\cdots:x_n) & \text{mit } \{(x_0,\ldots,x_n)\} \text{ ist Basis von } U \\ \big\langle(x_0,\ldots,x_n)\big\rangle & \leftarrow\!\shortmid & (x_0:\cdots:x_i) & \end{array}$$

Diese Indentifikation heißt „Beschreibung von $\mathbb{P}^n(k)$ durch homogene Koordinaten“.

Anmerkung Beachte, dass der Nullpunkt nicht im Projektiven Raum enthalten ist, denn $<0,\ldots,0>$ ist kein eindimensionaler Unterraum von k^{n+1}.

2. Schritt Topologie und Funktionenfamilie. Wähle ein $i\in\{0,\ldots,n\}$ und setze

$$U_i \;:=\; \big\{\,(x_o:\cdots:x_n)\in\mathbb{P}^n(k)\,\big|\,x_i\neq 0\big\}$$

Auf natürliche Weise erhalten wir eine bijektive Abbildung von U_i auf $\mathbb{A}^n(k)$ durch die Zuordnungen

$$\begin{array}{rrcl} \alpha_i: & U_i & \leftrightarrows & \mathbb{A}^n(k) \\ & (x_o:\cdots:x_n) & \mapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_i}\cdots\dfrac{\widehat{x_i}}{x_i}\cdots\dfrac{x_n}{x_i}\right) \\ & (z_1:\cdots:z_{i-1}:1:z_{i+1}:\cdots:z_n) & \leftarrow\!\shortmid & (z_1,\ldots,z_n) \end{array}$$

Mittels dieser Bijektion fassen wir α_i als affine Varietät auf, das heißt wir definieren via α_i eine Topologie auf U_i:

$$V\;\subseteq\;U_i\;\text{ ist offen }\quad:\Leftrightarrow\quad \alpha_i(V)\;\subseteq\;\mathbb{A}^n(k)\;\text{ ist offen} \tag{5.2}$$

Und für in diesem Sinne offene Teilmengen $V\subseteq U_i$ setzen wir

$$\mathcal{O}_{U_i}(V)\;:=\;\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)}\big(\alpha_i(V)\big)\;=\;\Big\{\,f:V\to k\,\Big|\,\big[\alpha_i(V)\xrightarrow{\sim}V\xrightarrow{f}k\big]\;\in\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)}\big(\alpha_i(V)\big)\,\Big\}$$

Mit diesen beiden Definitionen wird $(U_i,\mathcal{O}_{U_i})$ ein Raum mit Funktionen über k und die Bijektion α_i ist gerade bi-stetig und somit ein Isomorphismus von Räumen mit Funktionen.

Ziel 1 Definiere eine Topologie auf $\mathbb{P}^n(k)$, so dass für alle $i=0,\ldots,n$ die oben definirten Mengen $U_i\subseteq\mathbb{P}^n(k)$ offen sind und die von $\mathbb{P}^n(k)$ induzierte Teilraumtopologie auf U_i mit der Topologie aus Gleichung (5.2) übereinstimmt.

Ziel 2 Definiere eine Familie von Funktionen $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}$, so dass für alle $i=0,\ldots,n$ gilt

$$\mathbb{P}_{\mathbb{P}^n(k)|U_i}\;=\;\mathcal{O}_{U_i}$$

mit den oben definierten Mengen $\mathcal{O}_{U_i}$.

Mit diesen beiden Vorgaben gibt es - wenn überhaupt - nur eine Möglichkeit dies zu erreichen. Wir definieren die Topologie auf dem Projektiven raum via

Definition 5.8 *(Topologie auf dem projektiven Raum)*
Eine Teilmenge $V\subseteq\mathbb{P}^n(k)$ heißt genau dann offen, wenn $V\cap U_i\subseteq U_i$ für alle $i=0,\ldots,n$ offen ist.

Für im Sinne dieser Topologie offenen Mengen $V\subseteq\mathbb{P}^n(k)$ setze nun

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(V)\;=\;\Big\{\,f:V\to k\,\Big|\,\forall\,i=0,\ldots,n\;:\;\;f_{|V\cap U_i}\;\in\;\mathcal{O}_{U_i}(V\cap U_i)\,\Big\}$$

Sicherlich ist das so definierte Tupel $(\mathbb{P}^n(k), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(K)})$ ein Raum mit Funktionen über k. Die Teilraumtopologie auf U_i ist genau die Topologie aus Gleichung (5.2), denn sei $V \subseteq U_i$, dann sind die folgenden Äquivalenzen zu zeigen:

$$\forall\, j = 0, \dots, n \;\; V \cap U_j \text{ offen } \;\Leftrightarrow\; V \subseteq \mathbb{P}^n(k) \text{ offen } \;\Leftrightarrow\; V \subseteq U_i \text{ offen}$$

Die Äquivalenz von links nach rechts ist hierbei trivial, aber der Schritt von ganz rechts nach ganz links muss erklärt werden. Offensichtlich ist $U_i \cap U_j$ sowohl in U_i als auch in U_j offen für alle $j = 1, \dots, n$. Weiter ist

$$V \cap U_j \;=\; V \cap U_j \cap U_i \;\subseteq\; U_j$$

Wir können auf dem Durchschnitt $U_i \cap U_j$ jeweils zu den Teilraumtoplogien bezüglich der Inklusionen nach U_i und nach U_j übergehen. Diese Topologien sind aber gleich, denn bezüglich U_i können wir den Durchschnitt schreiben als

$$\left\{\, (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \,\middle|\, x_i \neq 0 \wedge x_j \neq 0 \,\right\} \;=\; \left\{\, (z_1, \dots, z_n) \in k^n \,\middle|\, z_{j'} \neq 0 \,\right\} \;=\; D(T_{j'})$$

und bezüglich U_j gilt

$$\left\{\, (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \,\middle|\, x_i \neq 0 \wedge x_j \neq 0 \,\right\} \;=\; \left\{\, (z_1, \dots, z_n) \in k^n \,\middle|\, z_{i'} \neq 0 \,\right\} \;=\; D(T_{i'})$$

Vermöge der Abbildung

$$\begin{array}{rccc} \alpha_{ij}: & D(T_{j'}) & \to & D(T_{i'}) \\ & (z_1, \dots, z_n) & \mapsto & \left(\dfrac{z_1}{z_{j'}}, \dots, \dfrac{z_n}{z_{j'}}\right) \end{array}$$

sehen wir, dass sich die Topoligien genau entsprechen, denn auch α_{ij} ist ein Isomorphismus von Prävarietäten.

Wir müssen also nun noch zeigen, dass für alle $i = 0, \dots, n$ die Einschränkung $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)|U_i} \;=\; \mathcal{O}_{U_i}$ gilt. Dazu beweisen wir den folgenden

Satz 5.9 *Sei $U \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ offen, dann ist*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U) \;=\; \left\{ f : U \to k \;\middle|\; \begin{array}{c} \text{Für alle } u \in U \text{ gibt es ein offenes } V \subseteq U \text{ mit } u \in V \\ \text{und } g, h \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen vom selben Grad,} \\ \text{so dass für alle } z \in V \text{ gilt: } f(z) \;=\; \frac{g(z)}{h(z)} \text{ und } h(z) \neq 0 \end{array} \right\}$$

Die $z \in V$, die in der Bedingung vorkommen, sind Äquivalenzklassen. Wähle in Zähler und Nenner immer je den selben Representanten von $z \in V \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, dann ist die Zuordnung oben wohldefiniert.

Aus diesem Satz folgt sofort die zu zeigende Eigenschaft. Dies zu sehen ist noch zu zeigen, dass für $V \subseteq U_i$ und $f \in \mathcal{O}_{U_i}(V)$ stets $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(V)$ gilt. Wende die Beschreibung von f als Bruch homogener Polynome an. Sei dazu $x \in V$ Etwa $x \in D(\tilde{h}) \subseteq V \subseteq U_i$ mit $\tilde{h} \in k[T_1, \dots, T_n]$. Auf $D(\tilde{h})$ hat f die Form

$$f(z) \;=\; \frac{\tilde{g}(z)}{\tilde{h}^r(z)} \qquad \text{mit } r \in \mathbb{N}$$

Durch homogenisieren, also Anwenden von ψ_i auf $\tilde{g}$ und $\tilde{h}^r$, erhalte die homogenen Polynome g, h wie in der Beschreibung nach dem Satz.

Beweis. Zur Wohldefiniertheit: Die Polynome g, h sind nach Voraussetzung Homogen vom selben Grad, das heißt wir können Skalare oben und unten mit der selben Potenz aus dem Polynom ziehen. Die Representanten der Äquivalenzklassen unterscheiden sich jeweils um eine skalare Konstante. Wir zeigen nun die beiden Inklusionen

- Sei $f \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U)$. Dann ist $f_{|U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$. Wie oben sehen wir durch Homogenisieren, dass f lokal eine Beschreibung mit homogenen Polynomen g, h, wie in der Bedingung der rechten Menge, hat.
- Sei andererseits f aus der rechten Menge und $i \in \{0, \ldots, n\}$. Wir müssen zeigen, dass dann $f_{|U \cap U_i} \in \mathcal{O}_{U_i}(U \cap U_i)$ gilt. Lokal auf $U \cap U_i$ hat f eine Beschreibung der Form

$$z \mapsto \frac{g(z)}{h(z)}$$

mit homogenen Polynomen g, h. Nach Anwenden der in Schritt zwei definierten Abbildung $\alpha_i : U_i \xrightarrow{\sim} \mathbb{A}^n(k)$ erhalten wir daraus

$$f(z) = \frac{\phi_i(g)\big(\alpha_i(z)\big)}{\phi_i(h)\big(\alpha_i(z)\big)}$$

und damit gehört f lokal zur Familie $\mathcal{O}_{U_i \cap U \cap V}$ mit $\phi_i(h) \neq 0$ auf V. Diese Mengen V überdecken aber U und durch verkleben erhalten wir die zu zeigende Aussage. □

Folgerung 5.10 $\mathbb{P}^n(k)$ *ist eine Prävarietät*

Beweis. Es ist nur noch zu zeigen, dass $\mathbb{P}^n(k)$ irreduzibel ist. Dies lassen wir als eine Übungsaufgabe.

Bemerkung 5.11 *(Koordinatenwechsel)*

Im affinen Raum ($\mathbb{A}^n(k)$): *Ist $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ eine invertierbare Matrix, so sind die Abbildungen*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^n(k) & \leftrightarrows & \mathbb{A}^n(k) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \mapsto & A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \\ A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} & \leftarrow\!\shortmid & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{array}$$

zueinander inverse Isomorphismen vin Prävarietäten. (klar, denn diese sind durch die n-Polynome, die wir durch das standart Matrizenprodukt erhalten, gegeben.)

Im projektiven Raum ($\mathbb{P}^n(k)$): *Ist $A = (a_{ij})_{i,j=0,\ldots,n} \in \mathrm{GL}_{n+1}(k)$ eine invertierbare Matrix, so ist*

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & \mathbb{P}^n(k) & \to & \mathbb{P}^n(k) \\ & (x_0 : \cdots : x_n) & \mapsto & \Big(\sum_{j=0}^{n} a_{0j}\, x_j \;:\; \cdots \;:\; \sum_{j=0}^{n} a_{nj}\, x_j\Big) \end{array}$$

Ein Isomorphismus mit Umkehrabbildung $\varphi_{A^{-1}}$. (Hierbei ist noch zu zeigen, dass φ_A ein Morphismus von Räumen mit Funktionen ist.)

Genaugenommen liefern A und λA für $\lambda \in k^\times$ den selben Isomorphismus, also hängt φ_A sogar nur vom Bild von A in

$$\mathrm{PGL}_{n+1}(k) \;:=\; {}^{\mathrm{GL}_{n+1}(k)}\!\big/_{\{\mathrm{diag}(\lambda) | \lambda \in k^\times\}} \;=\; {}^{\mathrm{GL}_{n+1}(k)}\!\big/_{k^\times}$$

ab, wobei $\mathrm{diag}(\lambda)$ *die Diagonalmatrix mit nur λ-Einträgen auf der Diagonalen sei.*

Bemerkung 5.12 *(Der rationale Funktionenkörper von $\mathbb{P}^n(k)$)*
Wir haben bereits gesehen, dass $\mathbb{P}^n(k)$ eine Prävarietät ist, also ist

$$\begin{aligned} K\big(\mathbb{P}^n(k)\big) &= K(U_i) = k\Big(\frac{X_0}{X_i}, \dots, \frac{X_n}{X_i}\Big) \\ &= \mathcal{F} := \left\{ \frac{f}{g} \,\middle|\, f, g \in k[X_0, \dots, X_n] \text{ homogen vom selben Grad} \right\} \end{aligned}$$

In natrürlicher Weise ist $\Gamma(U_i) \subseteq K(U_i) = K\big(\mathbb{P}^n(k)\big)$. Genauso gut gilt aber auch

$$K\big(\mathbb{P}^n(k)\big) = K(U_j) = k\Big(\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}\Big)$$

für $i \neq j$ und in ebenso natürlicher Weise ist $\Gamma(U_j) \subseteq K(U_j) = K\big(\mathbb{P}^n(k)\big)$.

Anmerkung Die Koordinatenringe $\Gamma(U_i)$ und $\Gamma(U_j)$ sind für $i \neq j$ deutlich verschieden.

Satz 5.13 *Es gilt*

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}\big(\mathbb{P}^n(k)\big) = k$$

Insbesondere ist für $n \geq 1$ die Prävarietät $\mathbb{P}^n(k)$ nicht affin.

Beweis. Nach Satz 4.10 gilt für eine Prävarietät X und offene Teilmengen $U, V \subseteq X$

$$\mathcal{O}_X(U \cap V) = \mathcal{O}_X(U) \cap \mathcal{O}_X(V)$$

in $K(X)$. Mit der vorangegangenen Bemerkung zum rationalen Funktionenkörper von $\mathbb{P}^n(k)$ gilt damit

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}\big(\mathbb{P}^n(k)\big) &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}\Big(\bigcup_{i=0}^n U_i\Big) = \bigcap_{i=0}^n \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U_i) \\ &= \bigcap_{i=0}^n k\Big[\frac{X_0}{X_j}, \dots, \frac{X_n}{X_j}\Big] = k \end{aligned}$$

□

Abgeschlossene Unterprävarietäten des projektiven Raums

Seien $f_1, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogene Polynome, dann ist

$$V_+(f_1, \ldots, f_m) \ := \ \big\{ (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \,\big|\, f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \text{ für alle } i \big\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge, denn für alle $j = 0, \ldots, n$ gilt

$$V_+(f_1, \ldots, f_m) \cap U_j \ = \ V\big(\phi_j(f_1), \ldots, \phi_j(f_n)\big)$$

und diese Menge ist abgeschlossen in U_j und insgesamt dann auch in $\mathbb{P}^n(k)$.

Notation 5.14 *Wir bezeichnen mit $V_+(f_1, \ldots, f_m)$ auch die zu dieser abgeschlossenen Teilmenge gehörige abgeschlossene Unterprävarietät*

Wir wollen nun zeigen, dass jede abgeschlossene Unterprävarietät von $\mathbb{P}^n(k)$ genau diese Form hat.

Definition 5.15 *(projektive Varietät)*
Abgeschlossene Unterprävarietäten von $\mathbb{P}^n(k)$, das heißt diejenigen Prävarietäten, die wir zu abgeschlossenen Teilmengen $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ erhalten, nennen wir projektive Varietät.

Beispiel 23 *Sind $f_1, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogene Polynome, dann ist*

$$V \ := \ V_+(f_1, \ldots, f_m) \ := \ \big\{ (x_0 : \cdots : x_n) \in \mathbb{P}^n(k) \,\big|\, f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0 \text{ für alle } i \big\}$$

eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^n(k)$. Ist V irreduzibel, so ist V eine Prävarietät. in diesem Fall ist

$$V \ = \ \bigcup_{j=0}^{n} \big(V \cap U_j\big) \ = \ \bigcup_{j=0}^{n} V_{U_j}\big(\phi_j(f_1), \ldots, \phi_j(f_m)\big)$$

eine Überdeckung durch affine Varietäten.

Beispiel 24 *(Einige Beispiele für V_+-Mengen)*
Den projektiven Raum $\mathbb{P}^1(k)$ können wir als disjunkte Vereinigung

$$\mathbb{P}^1(k) \ = \ U_0 \,\dot\cup\, \big\{(0:1)\big\} \ = \ \mathbb{A}^1(k) \,\dot\cup\, \{pt\}$$

schreiben wobei wir $\{pt\}$ den „Punkt im Unendlichen“ nennen. Berachte

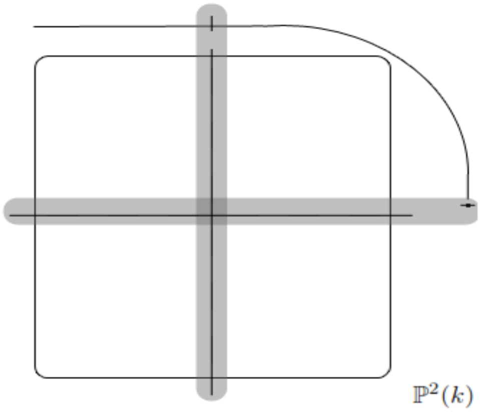
$$\begin{aligned} V_+(X_0 - X_1) \ &= \ \big\{(1:1)\big\} \\ V_+(X_0^2 - X_1^2) \ &= \ \big\{(1:1), (1:-1)\big\} \end{aligned}$$

Den projektiven Raum $\mathbb{P}^2(k)$ können wir als disjunkte Vereinigung

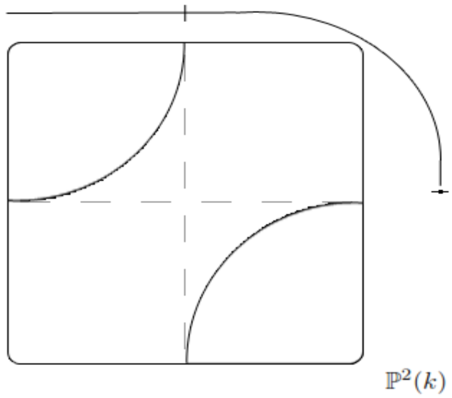
$$\mathbb{P}^1(k) \ = \ U_0 \,\dot\cup\, \big\{(0:1:x_2)\big\} \,\dot\cup\, \big\{(0:0:1)\big\} \ = \ \mathbb{A}^2(k) \,\dot\cup\, \mathbb{A}^1(k) \,\dot\cup\, \{pt\}$$

schreiben wobei wir $\mathbb{A}^1(k) \,\dot\cup\, \{pt\}$ die „Gerade im Unendlichen“ nennen. Berachte

$$V_+(X_1X_2) \ = \ V_{U_0}\Big(\frac{X_1}{X_0} \cdot \frac{X_2}{X_0}\Big) \cup \big\{(0:0:1)\big\} \cup \big\{(0:1:0)\big\}$$



„Achsenkreuz“ ($V_+(X_1X_2)$)



„Hyperbel“ ($V_+(X_1X_2 - X_0^2)$)

Wir wollen nun zeigen, dass alle abgeschlossenen Teilmengen des projektiven Raums als solche V_+-Mengen auftreten. Dazu betrachten wir zunächst affine Kegel

Definition 5.16 *(affiner Kegel)*
Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ heißt affiner Kegel, falls für alle $x \in X$ und alle $\lambda \in k$ gilt $\lambda x \in X$.

Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^{n+1}(k) \setminus \{0\} & \twoheadrightarrow & \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & (x_0 : \cdots : x_n) \end{array}$$

Dies ist ein Morphismus, weil offenbar für alle $i = 0, \ldots, n$ die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} f^{-1}(U_i) & \xrightarrow{f_{|f^{-1}(U_i)}} & U_i \\ D_{\mathbb{A}^{n+1}}(X_i) & \to & \mathbb{A}^n(k) \\ (x_0, \ldots, x_n) & \mapsto & \left(\dfrac{x_0}{x_1}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_1}\right) \end{array}$$

ein Morphismus ist.

Definition und Bemerkung 5.17 *(Kegel zu einer abgeschlossenen Menge)*
Sei $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ abgeschlossen, dann setze

$$C(Z) \;:=\; \overline{f^{-1}(Z)}$$

wobei $\overline{f^{-1}(Z)}$ den Abschluss von $f^{-1}(Z)$ in $\mathbb{A}^{n+1}(k)$ bezeichne. Falls $Z \neq \emptyset$, dann gilt

$$C(Z) \;=\; f^{-1}(Z) \;\cup\; \{0\}$$

und $C(Z)$ ist ein affiner Kegel und heißt der Kegel (coen) zu Z.

Satz 5.18 *Sei $X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k)$ abgeschlossen, dann sind äquivalent*

(1) *X ist affiner Kegel*

(2) *$I(X) \lhd k[T_1, \dots, T_n]$ wird von homogenen Polynomen erzeugt.*

(3) *Es gibt eine abgeschlossene Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit $X = C(Z)$.*

Sind diese äquivalenten Bedingungen erfüllt, so gilt: Die Menge Z aus **(3)** *ist eindeutig bestimmt und sind $f_1, \dots, f_m$ homogene Polynome, die $I(X)$ erzeugen, dann ist*

$$Z \;=\; V_+(f_1, \dots, f_m) \;\subseteq\; \mathbb{P}(k)$$

Insbesondere sind also alle abgeschlossenen Teilmengen von $\mathbb{P}^n(k)$ von dieser Form.

Beweis. Per Ringschluss

„(3) ⇒ (1)“ Diesen Schritt haben wir schon in der vorangestellten Bemerkung gesehen.

„(1) ⇒ (2)“ Es genügt zu zeigen, dass für $g \in I(X)$ etwa

$$g \;=\; \sum_{j=0}^{N} g_j \qquad \text{mit } g_j \text{ homogen vom Grad } j$$

gilt $g_j \in I(X)$ für alle $j = 0, \dots, N$.
Sei also $g \in I(X)$ mit einer Zerlegung in homogene Komponenten wie oben. Angenommen es gäbe ein $\hat{j} \in \{0, \dots, N\}$ mit $g_{\hat{j}} \notin I(X)$, dann gäbe es ein $x \in X$ mit $g_{\hat{j}} \neq 0$. Das Polynom

$$\sum_{j=0}^{n} g_j(x)\, T^j$$

ist also nicht das Nullpolynom, also gibt es $\lambda \in k^\times$ mit

$$0 \;\neq\; \sum_{j=0}^{n} g_j(x)\, \lambda^j$$

Da die g_j homogene Polynome von Grad j sind, gilt also

$$0 \;\neq\; \sum_{j=0}^{n} g_j(x)\, \lambda^j \;=\; \sum_{j=0}^{n} g_j(x\lambda) \;=\; g(x) \;=\; 0$$

Also muss die Annahme falsch gewesen sein, und die Implikation ist bewiesen.

„(2) ⇒ (3)“ Da wir **(2)** voraussetzen ist $I(X)$ erzeugt von homogenen Polynomen[5], etwa

$$I(X) \;=\; (f_1, \dots, f_m)$$

Setze

$$Z \;:=\; V_+(f_1, \dots, f_m)$$

dann ist offenbar $X = C(Z)$.

Für den Zusatz müssen wir nurnoch zeigen, dass Z eindeutig bestimmt ist. Dies ist aber wegen der Surjektivität von f klar. □

[5]Es genügen endlich viele Polynome, denn der Ring $k[T_1, \dots, T_{n+1}]$ ist noethersch.

Morphismen zwischen quasi-projektiven Varietäten

Definition 5.19 *(quasi-projektive Varietät)*
Eine Prävarietät heißt quasi-projektive Varietät, wenn sie zu einer offenen Untervarietät einer projektiven Varietät isomorph ist.

Beispiel 25 *(quasi-projektive Varietäten)*

- *Projektive Varietäten sind quasi-projektiv, denn offensichtlich ist*

$$Z \overset{\text{offen}}{\subseteq} Z \overset{\text{abges.}}{\subseteq} \mathbb{P}^n(k)$$

- *Affine Varietäten sind quasi-projektiv, denn sei*

$$X \overset{\text{abges.}}{\subseteq} \mathbb{A}^n(k) \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{P}^n(k)$$

  eine affine Varietät, dann gibt es wegen der Teilraumtopologie eine abgeschlossene Teilmenge $Z \in \mathbb{P}^n(k)$ mit

$$X = \mathbb{A}^n(k) \cap Z \overset{\text{offen}}{\subseteq} Z \overset{\text{abges.}}{\subseteq} \mathbb{P}^n(k)$$

- *Die Prävarietät $\mathbb{A}^n(k) \setminus \{0\}$ ist quasi-projektiv, denn*

$$\mathbb{A}^n(k) \setminus \{0\} \overset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{P}^n(k) \overset{\text{abges.}}{\subseteq} \mathbb{P}^n(k)$$

  Anmerkung *Für $n \geq 2$ haben wir in den Übungen gesehen, dass diese Prävarietät nicht affin ist und das $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n(k)\setminus\{0\}}(\mathbb{A}^n(k)\setminus\{0\}) = k[T_1, \ldots, T_n]$ ist. Wir werden später zeigen, dass - falls Z eine projektive Varietät ist - gilt $\mathcal{O}_Z(Z) = k$ und damit ist $\mathbb{A}^n(k) \setminus \{0\}$ auch nicht projektiv.*

Im Folgenden sagen wir nur noch, dass eine Menge $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasi-projektiv sei und unterschlagen die Menge, in der Y offen enthalten ist, denn per Definition sind äquivalent

- $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist quasi-projektiv.
- $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ liegt offen in einer abgeschlossenen Teilmenge $Z \subseteq \mathbb{P}^n(k)$.
- $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist der durchschnitt einer offenen und einer abgeschlossenen Teilmenge von $\mathbb{P}^n(k)$.
- $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ist lokal abgeschlossen

Satz 5.20 *Sei $Y \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ quasi-projektiv, dann gelten*

(1) *Seien $f_0, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n]$ homogen vom selben Grad, derart dass für alle $y \in Y$ ein $j \in \{0, \ldots, m\}$ existiert mit $f_j(y) \neq 0$. Dann ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} h : Y &\rightarrow \mathbb{P}^n(k) \\ y &\mapsto \big(f_0(y) : \cdots : f_m(y)\big) \end{aligned}$$

ein Morphismus von Prävarietäten.

Eine Familie von Polynomen $(g_i)_{i=0,\ldots,m}$, die die gleichen Bedingungen wie die Familie $(f_j)_j$ erfüllt, definiert genau die gleiche Abbildung, wenn für alle $i, j = 0, \ldots, m$ und alle $y \in Y$ gilt

$$f_i(y)g_j(y) = f_j(y)g_i(y)$$

(2) *Sei umgekehrt $h : Y \to \mathbb{P}^n(k)$ ein Morphismus von Prävarietäten, dann gibt es für alle $y \in Y$ eine offene Teilmenge $U \subseteq Y$ mit $y \in U$, derart dass $h_{|U}$ die Form wie in **(1)** hat.*

Beweis. Die Eigenschaft einer Abbildung, Morphismus von Räumen mit Funktionen zu sein, lässt sich lokal auf einer offenen Überdeckung des Zielraums prüfen. Im konkreten Fall betrachte

$$\mathbb{P}^n(k) \;=\; \bigcup_{i=0}^{m} U_i \quad \text{mit } U_i = \alpha_i(\mathbb{A}^n(k))$$

Es genügt also für alle $i = 0, \dots, m$ zu zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} h^{-1}(U_i) & \to & U_i \\ \cap & & \cap \\ Y & \xrightarrow{h} & \mathbb{P}^m(k) \end{array}$$

ein Morphismus ist. Fixiere dazu ein $i \in \{0, \dots, m\}$. Die Abbildung $h^{-1}(U_i) \to U_i = \mathbb{A}^m(k)$ hat die Form

$$y = (y_0 : \cdots : y_n) \;\mapsto\; \Big(\frac{f_0(y)}{f_i(y)}, \dots, \widehat{\frac{f_i(y)}{f_i(y)}}, \dots, \frac{f_n(y)}{f_i(y)}\Big)$$

Es ist also zu zeigen: Diese Abbildung

(i) ist stetig, das heißt, dass für alle $f \in k[T_1, \dots, T_m]$ ist $h^{-1}\big(D(f)\big) \subseteq h^{-1}(U_i)$ offen

(ii) erfüllt die Bedingung: Für alle $f \in k[T_1, \dots, T_m]$ und alle $g \in \mathcal{O}_{\mathbb{A}(k)}\big(D(f)\big) = k[T_1, \dots, T_m]_f$ gilt

$$g \circ h_{|h^{-1}(D(f))} \;\in\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m(k)}\big(h^{-1}(D(f))\big)$$

Zu i) Es gilt

$$y \in h^{-1}\big(D(f)\big) \;\Leftrightarrow\; f\Big(\frac{f_0(y)}{f_i(y)}, \dots, \widehat{\frac{f_i(y)}{f_i(y)}}, \dots, \frac{f_n(y)}{f_i(y)}\Big) \;\neq\; 0$$

Schreibe

$$f\Big(\frac{f_0}{f_i}, \dots, \widehat{\frac{f_i}{f_i}}, \dots, \frac{f_n}{f_i}\Big) \;=\; \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \qquad \in \mathcal{F}$$

mit Polynomen φ_1, φ_2, die homogen vom selben Grad sind. Insbesondere ist $\varphi_2(y) \neq 0$ für alle $y \in h^{-1}(U_i)$, denn φ_2 ist eine Potenz von f_i. Weiter ist aber auch $\varphi_1(y) \neq 0$ auf $h^{-1}(D(f))$. Wir erhalten

$$h^{-1}\big(D(f)\big) \;=\; h^{-1}(U_i) \setminus V_+(\varphi_1)$$

und diese Menge ist trivialerweise offen, denn Mengen der Form $V_+(\dots)$ sind abgeschlossen.

Zu ii) Mit dem gleichen Argument wie in **(i)** sehen wir, dass $g \circ h$ die Form

$$y \;\mapsto\; \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} \qquad \text{mit } \varphi_1, \varphi_2 \text{ homogen vom selben Grad}$$

hat. Diese Abbildungsvorschrift bezeichnet einen Morphismus

$$h^{-1}\big(D(f)\big) \;\subseteq\; \mathbb{P}^n(k) \setminus V_+(\varphi_2) \;\to\; \mathbb{A}^1(k)$$

denn die oben genannte Abbildungsvorschrift entspricht der Beschreibung Elementen aus $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(k)}(U)$ für offene Mengen $U \in \mathbb{P}^n(k)$ nach Satz 5.9. Dann ist die Einschränkung dieses Morphismus auf $h^{-1}(D(f))$ aber erst recht ein Morphismus.

Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen. Für den Nachweis des zweiten Teils betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[rr, "h"] & & \mathbb{P}^m(k) \\
h^{-1}(U_i) \arrow[u, hook] \arrow[r] & U_i = & \mathbb{A}^m(k) \arrow[u, hook] \arrow[d, "\pi_j"] \\
& & \mathbb{A}^1(k)
\end{tikzcd}$$

Es genügt die Aussage für $h_{|h^{-1}(U_i)}$ zu zeigen. Damit genügt es aber, die Morphismen

$$h^{-1}(U_i) \xrightarrow{h} U_i = \mathbb{A}^m(k) \xrightarrow{\pi_j} \mathbb{A}^1(k)$$

für alle $j = 1, \dots, m$ zu betrachten. Diese Morphismen sind Elemente von $\mathcal{O}_Y\left(h^{-1}(U_i)\right)$ und haben daher $_{(\dots)}$ lokal auf $h^{-1}(U_i)$ die Form

$$y \mapsto \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)} \qquad \text{mit } \varphi_1, \varphi_2 \text{ homogen vom selben Grad und } \varphi_2(y) \neq 0$$

□

Lineare Unterräume

Beispiel 26 *(Lienare Unterräume)*
Sei $m \geq 0$ und sei

$$\varphi : k^{m+1} \hookrightarrow k^{n+1}$$

ein injektiver k-Vektorraum-Homomorphismus, dann induziert φ eine injektive Abbildung

$$\psi : \mathbb{P}^m(k) \hookrightarrow \mathbb{P}^n(k)$$

Bei gewählten Koordinaten gilt: Ist φ von der Form $x \mapsto Ax$ für eine Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{(n+1)\times(m+1)}(k)$, so hat ψ die Form

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto \Big(\sum_{j=0}^{m} a_{0j}\, x_j \,:\, \cdots \,:\, \sum_{j=0}^{m} a_{nj}\, x_j\Big)$$

ist also ein Morphismus, der durch lineare homogene Polynome beschrieben wird.
Ist $B = (b_{ij}) \in \mathrm{Mat}_{l\times(n+1)}(k)$ eine Matrix mit $\mathrm{Im}(\varphi) = \mathrm{Ker}(B)$, so setze

$$f_i := \sum_{j=0}^{n} b_{ij}\, x_j \qquad \text{für } i = 1, \dots, l$$

und wir erhalten einen Isomorphismus

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{P}^m(k) \arrow[r, hook, "\psi"] \arrow[dr, dashed, "\cong"'] & \mathbb{P}^n(k) \\
& V_+(f_1, \dots, f_l) \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Andererseits tritt jede abgeschlossene Teilmenge $V_+(g_1, \dots, g_s) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit linearen homogenen Polynomen g_i auf diese Art und Weise auf, wenn sie nicht leer ist.

Dieses Beispiel gibt uns Anlass zu einigen Definitionen und der Einführung einiger Sprechweisen

Definition 5.21 *(lineare Unterräume) Nicht leere Abgeschlossene Untervarietäten der Form $V_+(g_1, \dots, g_s) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ mit linearen homogenen Polynomen g_i heißen lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n(k)$. Gilt*

$$\mathbb{P}^m(k) \xrightarrow{\sim} V_+(g_1, \dots, g_s)$$

so heißt m die Dimension des Raums.

Definition und Bemerkung 5.22 *Es gelten*

- *Die leere Menge betrachten wir als linearen Unterraum der Dimension -1*
- *Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n(k)$ der Dimension 0 sind genau die einelementigen Teilmengen.*
- *Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n(k)$ der Dimension 1 heißen Geraden.*
- *Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n(k)$ der Dimension 2 heißen Ebenen.*
- *Lineare Unterräume von $\mathbb{P}^n(k)$ der Dimension $n-1$ heißen Hyperebenen.*
- *$\mathbb{P}^n(k)$ ist der eizige lineare Unterraum der Dimension n von $\mathbb{P}^n(k)$.*

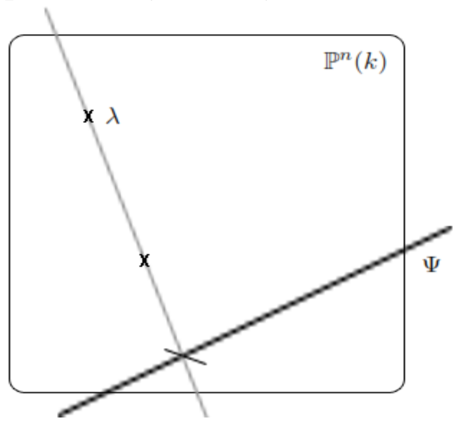
Definition und Bemerkung 5.23 *Es gelten*

(1) *Zu zwei verschiedenen Punkten $p, q \in \mathbb{P}^n(k)$ (also $p \neq q$) gibt es eine eindeutig bestimmte Gerade in $\mathbb{P}^n(k)$, die p und q enthält. Wir schreiben $\overline{pq}$ für diese Gerade.*

(2) *Je zwei verschiedene Geraden im $\mathbb{P}^2(k)$ schneiden sich in genau einem Punkt.*

Beweis. Übung!

Beispiel 27 *(Projektion auf einen linearen Unterraum)*



Sei $\Lambda = \{\lambda\} \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ ein 0-Dimensionaler linearer Unterraum und $\Psi \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ eine $n-1$-Dimensionale Hyperebene mit $\lambda \notin \Psi$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} p_\Lambda : \mathbb{P}^n(k) \setminus \Lambda &\to \Psi \\ x &\mapsto p_\Lambda(x) \end{aligned}$$

wobei gelte

$$\{p_\Lambda(x)\} = \Psi \cap \overline{x\lambda}$$

Nach einem Koordinatenwechsel hat p_Λ die Form

$$(x_0 : \dots : x_n) \mapsto (0 : x_1 : \dots : x_n)$$

und dies ist trivialer Weise ein Morphismus.

Bemerkung 5.24 *Ist X eine projektive Varietät, dann gibt es einen surjektiven Morphismus $X \twoheadrightarrow \mathbb{P}^m(k)$ mit endlichen Fasern.*

Beweis. Wir wenden die Konstruktion aus dem Vorangegangenen Beispiel an. Sei etwa $X \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, dann gibt es ein $\lambda \in \mathbb{P}^n(k) \setminus X$. Wähle nun eine Hyperebene $\Psi \cong \mathbb{P}^{n-1}(k)$ mit $\lambda \notin \Psi$. Dann beschränkt sich die Abbildung p_Λ aus dem vorangegangenen Beispiel auf

$$p_{\Lambda|X} : X \quad \to \quad \Psi \cong \mathbb{P}^{n-1}(k)$$

Diese Abbildung hat endliche Fasern, weil jede Faser für $z \in \Psi$ die Form hat

$$\left(p_{\Lambda|X}\right)^{-1}(z) \;=\; p_{\Lambda|X}^{-1}(z) \cap X \;\overset{\subseteq}{\text{abges.}}\; p_{\Lambda|X}^{-1}(z) \;\cong\; \mathbb{A}^1(k)$$

Die Fasern sind also abgeschlossene Teilmengen in $\mathbb{A}^1(k)$. Also entweder eine endliche Teilmenge, die leere Menge oder ganz $\mathbb{A}^1(k)$. Den letzten Fall möchten wir gerne noch ausschließen und tatsächlich würde wegen

$$\overline{p_\Lambda^{-1}(z)} \;=\; p_\Lambda^{-1} \cup \{\lambda\} \quad \text{und} \quad X \subseteq \mathbb{P}^n(k) \text{ abgeschl.}$$

aus $p_\Lambda^{-1}(z) \subseteq X$ folgen, dass $\lambda \in X$ wäre. Dies haben wir aber ausgeschlossen.

Fact. *$p_\Lambda(X)$ ist eine abgeschlossene Teilmenge in Ψ, also wieder eine projektive Varietät.*

Betrachte nun die projektive Varietät $X^{(1)} := p_\Lambda(X) \subseteq \mathbb{P}^{n-1}(k)$. Induktiv sehen wir: Es gibt einen surjektiven Morphismus $f : p_\Lambda(X) \twoheadrightarrow \mathbb{P}^m(k)$ mit endlichen Fasern. Damit ist aber die Abbildung

$$X \;\to\; p_\Lambda \;\xrightarrow{f}\; \mathbb{P}^m(k)$$

von der gewünschten Form. □

Anmerkung Die benutzte Tatsache ist nicht offensichtlich und wird von uns auch erst später eingesehen.

Quadriken

In diesem Abschnitt sei k ein (algebraisch abgeschlossener) Körper der Charakteristik $\neq 2$.

Definition 5.25 *(Quadrik)*
Eine angeschlossene Teilmenge der Form $V_+(q) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$, mit einem homogenen Polynom $q \in k[X_0, \ldots, X_n]_2 \setminus \{0\}$ vom Grad 2, heißt eine Quadrik

Beispiel 28 *(Quadriken)*
Für $n = 1$: Die V_+-Mengen bestehen aus einzelnen Punkten. Beispielsweise

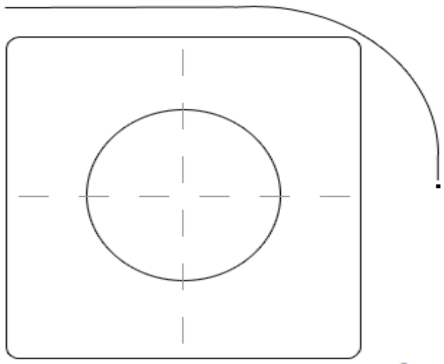
$$\begin{array}{rcl} V_+(X_0^2 + X_1^2) & = & \{(1 : \sqrt{-1}), (1 : -\sqrt{-1})\} \\ V_+(X_0^2) & = & \{(0 : 1)\} \end{array}$$

Für $n = 2$: Es gibt im Grunde nur zwei Arten von V_+-Mengen. 1. irreduzible (Geraden und Ellipsen oder, je nach affinem Anteil, Hyperbeln bzw. Parabeln) 2. nicht irreduzible (Geraden, die sich schneiden). Diese V_+-Mengen sind nur zum Teil skizzierbar.

- $q = -X_0^2 + X_1^2 + X_2^2$

  Wegen $(0:0:0) \notin \mathbb{P}^2(k)$ *können nicht alle Einträge zugleich Null sein. Dann muss aber insbesondere* x_1 *von Null verscheiden sein. Daher können wir die erste Koordinate auf* 1 *normieren und erhalten die nach* X_0*-dehomogenisierte Gleichung*

  $$\left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 + \left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2 = 1$$

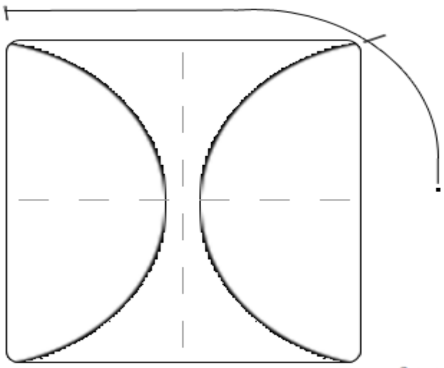
  $\mathbb{P}^2(k)$

- $q = X_0^2 - X_1^2 + X_2^2$

  Wie oben können wir die erste Koordinate auf 1 *normieren und erhalten die nach* X_0*-dehomogenisierte Gleichung*

  $$\begin{aligned} 1 &= \left(\frac{X_1}{X_0}\right)^2 - \left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2 \\ &= \left(\frac{X_2}{X_0} - \frac{X_2}{X_0}\right) \cdot \left(\frac{X_2}{X_0} + \frac{X_2}{X_0}\right) \end{aligned}$$

  Im affinen Teil erhalten wir eine „um 45 *gekippte“ Hyperbel, sowie zwei Punkte auf der Geraden im Unendlichen.*

  $\mathbb{P}^2(k)$

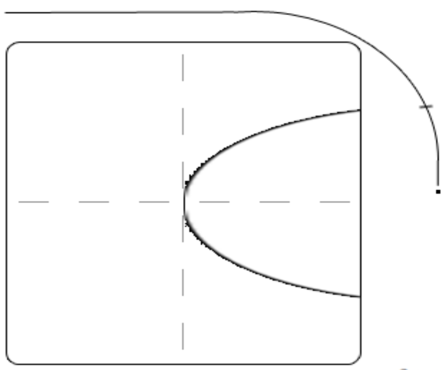
  Vorstellung: *Wenn wir nach einem anderen affinen Anteil de-homogenisieren wird die Ellipse von oben in zwei Hälften geteilt und die „Klebestellen“ sind die Punkte auf der Geraden im Unendlichen.*

- $q = -X_2^2 + X_0X_1$

  Wenn wir eine Nullstelle mit $X_1 = 0$ *suchen, so muss auch* $X_2 = 0$ *sein. Damit die Nullstelle im Projektiven Raum liegen kann, muss die Nullstelle also* $(1:0:0)$ *sein. Wir können also wie in den vorherigen Beispielen die affine Gleichung betrachten*

  $$\frac{X_1}{X_0} = \left(\frac{X_2}{X_0}\right)^2$$

  Im affinen Teil erhalten wir eine „um 90 *gekippte“ Parabel und einen Punkt auf der Geraden im Unendlichen.*

  $\mathbb{P}^2(k)$

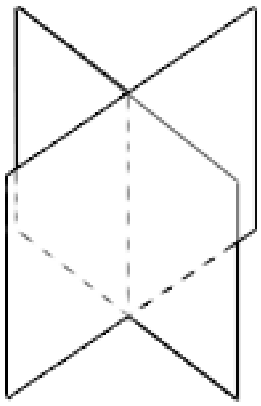
  Vorstellung: *Wenn wir nach einem anderen affinen Anteil de-homogenisieren wird die Ellipse von oben längs einer Tangente aufgeschnitten. und die „Klebestelle“ ist der Punkt auf der Gerade im unendlichen.*

- $q = X_1^2$ *Die* V_+*-Menge ist eine Gerade in* $\mathbb{P}^n(k)$*.*

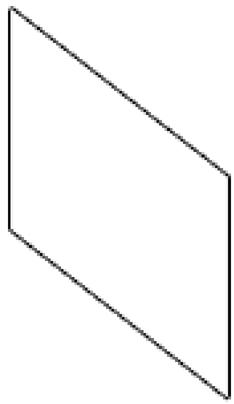
- $q = X_1^2 + X_2^2$ *Die V_+-Menge ist die Vereinigung zweier Geraden in $\mathbb{P}^n(k)$, dies ist keine irreduzible Menge.*

Für $n = 3$: Auch hier gibt es nur diese beiden Arten von Beispielen. Wenn wir die Projektion auf einen lienaren Unterraum „rückwerts“ durchführen, können wir Dimensionen „aufsteigen“. Wir erhalten aus der Ellipse, der Geraden und den gekreuzten Geraden:

$V_+(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$

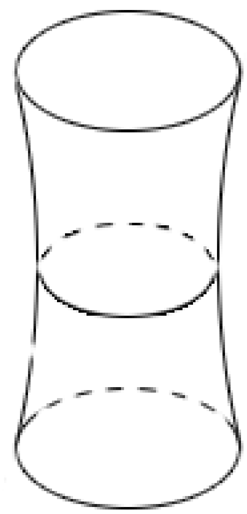


$V_+(X_0^2 + X_1^2)$



$V_+(X_0^2)$

Es gibt noch ein Beispiel, dass wir mit dieser Methode nicht bekommen:



$V_+(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$

Wir wollen nun Begründen, warum dies genau die Arten von Beispielen sind, die wir für V_+-Mengen bekommen. Dazu benötigen wir zunächst etwas wissen aus der linearen Algebra.

Bemerkung 5.26 *(Quadratische Formen)*
Aus der linearen Algebra kennen wir die Bijektion

$$\begin{array}{ccc} \{\text{ Quadratische Formen }\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{ symmetrische Bilinearformen }\} \\ q & \mapsto & \beta(v,w) := \frac{1}{2}q(v+w) - q(v) - q(w) \\ q(x) := \beta(x,x) & \leftarrow\!\shortmid & \beta \end{array}$$

Quadratische Formen können wir un unserer Terminologie auch als homogene Polynome vom Grad 2 *auffassen, also*

$$\{\text{ Quadratische Formen }\} \;\cong\; k[X_0, \dots, X_n]_2 \setminus \{0\}$$

Symmetrische Bilinearformen können wir hingegen als Matrix bezüglich eienr gewählten Basis, zum Beispiel der Standartbasis $\{e_0, \dots, e_n\}$ *ausdrücken durch*

$$A \;:=\; \big(\beta(e_i, e_j)\big)_{i,j=0,\dots,n} \;\in\; \mathrm{Mat}_{n+1\times n+1}(k)$$

Mit dieser darstellung ung der oben angegebenen Bijektion erhalten wir

$$q \;=\; \sum_{i,j=0}^{n} \beta(e_i, e_j)\cdot X_i\, X_j$$

Mit dieser Terminologie können wir nun die Behauptung beweisen. Es gilt der folgende

Satz 5.27 *Sei* $q \in k[X_0, \dots, X_n]_2 \setminus \{0\}$ *eine Homogenes Polynom vom Grad* 2*, dann gibt es einen Koordinatenwechsel von* $\mathbb{P}^n(k)$ *unter dem* q *übergeht in ein Polynom der Form*

$$X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2 \qquad \text{mit } 0 < r \leq n+1$$

und r *ist unabhängig von der Wahl des Koordinatenwechsels.*

Beispiel 29 *Wir wollen die Idee hinter dem Satz an einem Beispiel darstellen. Sei also*

$$A \;:=\; (a_{ij})_{ij=0,1,2} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

eine Matrix. A *ist invertierbar und liefert einen Koordinatenwechsel*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^n(k) & \to & \mathbb{P}^n(k) \\ (x_0 : x_1 : x_2) & \mapsto & (x_0 + 2x_1 + x_2 \;:\; 3x_0 + 4x_1 \;:\; x_2) \end{array}$$

Unter diesem Wechsel gilt der folgende Übergang von V_+*-Mengen:*

$$V_+\big((3X_0 + 4X_1)^2 + X_2^2\big) \;\xrightarrow{\sim}\; V_+\big(X_1^2 + X_2^2\big)$$

Mit einem weiteren Koordinatenwechsel (einer Drehung) erhalten wir dann

$$V_+\big((3X_0 + 4X_1)^2 + X_2^2\big) \;\xrightarrow{\sim}\; V_+\big(X_0^2 + X_1^2\big)$$

Für den Beweis des Satzes verwenden wir im Grunde nur lineare Algebra: Wir wissen, der Übergang unter Koordinatenwechsel beschreibt sich durch einen Basiswechsel auf k^{n+1} für eine quadratische Form $q : k^{n+1} \to k$. Nach Bemerkung 5.26 können wir dies auch durch den Basiswechsel für eine Bilinearform beschreiben:

$$A \mapsto {}^tS\,A\,S$$

Damit folgt der Satz aus dem nächsten

Lemma 5.28 *Jede symmetrische Bilinearform über einem Körper K mit $char(K) \neq 2$ ist diagonalisierbar*

Mit anderen Worten: Zu jeder symmetrischen Matrix A gibt es eine invertierbare Matrix S, so dass ${}^tS\,A\,S$ Diagonalgestalt hat. Ist K sogar algebraisch abgeschlossen, so lässt sich zudem erreichen, dass gilt

$${}^tS\,A\,S = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Zusatz. Sei also K algebraisch Abgeschlossen und A diagonalisierbar, etwa ${}^tS\,A\,S = \operatorname{diag}(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)$, dann sortiere die Einträge $\alpha_i = 0$ nach „unten“. Für die Normierung auf 1 betrachte

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \alpha_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_0}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Denn, da wir K als algebraisch abgeschlossen vorausgesetzt haben existieren all diese Wurzeln.

Im allgemeinen Fall kennen wir die folgende Charaktarisierung von symmetrischen Bilinearformen:

Definition *(nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform)*

Sei β eine symmetrische Bilinearform mit Strukturmatrix A, dann heißt β genau dann nicht ausgeartet, falls für alle $v \in k^{n+1} \setminus \{0\}$ ein $w \in k^{n+1}$ existiert mit $\beta(v, w) \neq 0$

Aus der linearen Algebra wissen wir: β ist genau dann nicht ausgeartet, wenn A invertierbar ist. Wir beweisen das Lemma nun unter Zuhilfenahme von Ergebnissen aus der linearen Algebra für nicht ausgeartete symmetrische Bilinearformen und zweigen anschließend, dass der Allgemeine Fall sich auf diesen zurückführen lässt.

Lemma *Sei β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, etwa $\beta : V \times V \to K$ mit einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Sei weiter $W \subseteq V$ ein Unterraum, dann ist*

$$W^{\perp} := \left\{ v \in V \,\middle|\, \forall\, w \in W : \beta(v, w) = 0 \right\}$$

Es gilt der Dimensionssatz

$$\dim W + \dim W^{\perp} = \dim V$$

Beweis (*Skizze*)[6]**.** Bezeichne $V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ den Dualraum von V, dann betrachte das Diagramm

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, hook] & V \arrow[d, "\cong"] \\ W^* & V^* \arrow[l, two heads] \end{tikzcd}$$

Wonei die Identifizierung von V mit seinem Dualraum durch

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\sim} & V^* \\ v & \mapsto & \left[x \mapsto \beta(v, x)\right] \end{array}$$

gegeben ist. Es lässt sich mit diesem Diagramm zeigen, dass

$$W^{\perp} = \mathrm{Ker}\left(V \xrightarrow{\sim} V^* \twoheadrightarrow W^*\right)$$

gilt und dann folgt die Behauptung aus dem Dimensionssatz:

$$\dim W^{\perp} = \dim V - \dim W^* = \dim V - \dim W$$

$\diamond$

Lemma *Sei β eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform, etwa $\beta : V \times V \to K$ mit einem endlich-dimensionalen K-Vektorraum V. Dann gibt es ein $v \in V$ mit $\beta(v, v) \neq 0$, also ein $v \in V$ mit*

$$< v > \cap < v >^{\perp} = \{0\}$$

Beweis. Die zu β gehörige quadratische Form q ist ungleich Null. $\square$

Für eine nicht ausgeartete symmetrische Bilinearform β folgt aus diesen Lemmata die Diagonalisierbarkeit durch Induktion.

Ist β hingegen eine ausgeartete symmetrische Bilinearform, so zerlege V wie folgt:

$$V = \left\{ v \in V \,\middle|\, \forall\, w \in V : \beta(v, w) = 0 \right\} \oplus U$$

Wobei U ein komplement der ersten Teilmenge ist. Dann ist die Einschränkung $\beta : U \times U \to K$ nicht ausgeartet. Es gibt einen Basiswechsel, so dass die Strukturmatrix von β in die Stukturmatrix von $\beta_{|U}$ und die Nullmatrix zerfällt. $\square$

[6] Der vollständige Beweis mit Hilfe der Dualraumtheorie findet sich in der linearen Algebra

Im vorangegangenen Satz haben wir gezeigt, dass wir jedes $q \in k[X_0, \dots, X_n]_2 \setminus \{0\}$ in der Form

$$X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2$$

mit eindeutigem $r > 0$ darstellen können. dies motiviert uns zu der folgenden

Definition 5.29 *Ist $q \in k[X_0, \dots, X_n]_2 \setminus \{0\}$ homogen vom Grad 2 mit eindeutiger Darstellung*

$$X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2$$

Dann heißen $n-1$ die Dimension und r der Rang von $V_+(q)$.

Bemerkung 5.30 *Seien $q, \overline{q} \in k[X_0, \dots, X_n]_2 \setminus \{0\}$ so gilt*

$$V_+(q) \;=\; V_+(\overline{q}) \;\Leftrightarrow\; q = \lambda \overline{q} \text{ für } \lambda \in k^*$$

Beweis. Übungsblatt 8, Aufgabe 4

Lemma 5.31 *Sei $r \geq 1$, dann gelten*

(1) *Das Polynom $X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2$ ist genau dann irreduzibel, wenn $r > 2$ ist.*

(2) *Die abgeschlossene Teilmenge $V_+(X_0^2 + \ldots + X_{r-1}^2) \subseteq \mathbb{P}^n(k)$ für $n \geq r-1$ ist genau dann irreduzibel, wenn $r \neq 2$ ist.*

Beweis. Zur ersten Aussage ist nicht zu sagen, denn die Fälle $r = 1, 2$ sind klar (siehe Beispiel 28) die Fälle $r > 2$ sind durch eine einfache Rechnung zu sehen. Auch die zweite Aussage ist klar für $r = 1, 2$, denn

$$V_+(X_0^2) \;=\; V_+(X_0) \quad \text{und} \quad V_+(X_0^2 + X_1^2) \;=\; V_+\big((X_0 - \sqrt{-1}X_1)(X_0 + \sqrt{-1}X_1)\big)$$

Für den allgemeinen Fall folgt die Behauptung aus **(1)** durch folgende Überlegung
(*Skizze*) Wäre

$$V_+(q) \;=\; V_+(f_1, \dots, f_m) \cup V_+(g_1, \dots, g_l) \;\subseteq\; V_+(f_1) \cup V_+(g_1) \;=\; V_+(f_1 g_1)$$

so könnte (q) kein Primideal sein.
Entweder muss dieses Argument nun für den affinen Fall wiederholt, oder die Behauptung muss durch Übergang zum affinen Kegel auf den affinen Fall zurück geführt werden. Für die zweite möglichkeit betrachte

$$\begin{array}{ccccccccc}
{}^{n+1} \setminus \{0\} & \supset & \pi^{-1}\big(V_+(q)\big) & \subseteq & C\big(V_+(q)\big) & = & V(q) & \subset & {}^{n}(k) \\
\downarrow \pi & & \downarrow & & & & & & \\
\mathbb{P}^n(k) & \supset & V_+(q) & & & & & &
\end{array}$$

Und wir wissen, dass der Kegel $C(V_+(q)) = V(q)$ irreduzibel ist für ein irreduzibles Polynom q. $\diamond$

Es kann gezeigt werden, dass zwei irreduzible Quadriken genau dann als projektive Varietäten isomorph sind, wenn ihre Dimension und ihr Rang gleich sind. Wenden wir dieses Wissen auf das Beispiel 28 an, so sehen wir:

$(n = 1)$**:** Rang und Dimension von $V_+(X_0^2 + X_1^2)$ und $V_+(X_0^2)$ sind je 1, also sind diese isomorph

($n = 2$): Der Rang der Geraden $V_+(X_1^2)$ ist 1 und ihre Dimension ist 2, aber Ellipse ($V_+(-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$), Hyperbel ($V_+(X_0^2 - X_1^2 + X_2^2)$) und Parabel ($V_+(-X_2^2 + X_0X_1)$) haben gleichen Rang 3 und gleiche Dimension 2, damit sind diese drei Fälle tatsächlich isomorph.

($n = 3$): Die Dimension aller Beispiele ist 3, die Ebene ($V_+(X_0^2)$) hat Rang 1, die Fläche der aufeinanderstehenden Kegel ($V_+(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$) hat Rang 3 und das letzte Beispiel ($V_+(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2)$) hat Rang 4.

Dies werden wir nach mehr Theorie auch beweisen können.

6 Schema

Im Kontext von Prävarietäten lässt sich die sogenannte „klassische algebraische Geometrie“ betreiben. Dabei gibt es aber zwei besondere Defizite:

1. Die Durchschnitte von bestimmten V-Mengen lassen sich nicht unterscheiden, zum Beispiel

$$V(X) \cap V(Y) \;=\; V(X,Y) \;=\; \{0\} \;=\; V(Y,X^2) \;=\; V(Y) \cap V(Y - X^2)$$

   Dabei ist der erstere der Schnittpunkt zweier Geraden und der zweitere der Berührpunkt einer Parabel mit der Y-Achse. Diese speziellen eigenschaften gehen verloren und in beiden Fällen erhalten wir dieselbe Prävarietät.

2. Um mit Prävarietäten zu arbeiten müssen wir einen (algebraisch abgeschlossenen) Grundkörper fixieren. Es wäre interessant, mit unserem bisherigen Wissen aber nicht möglich, zum Beispiel ganzzahlige Lösungen von Systemen von Polynomgleichungen zu betrachten, oder die durch ganzzahlige Polynome (das heißt Polynome aus $\mathbb{Z}[X_1, \dots, X_n]$) definierte Prävarietät über verschiedenen Körpern zu betrachten

Daher wollen wir nun den allgemeineren Begriff des „Schemas“ Verwenden

<u>Bisher</u>	**<u>Neu</u>**
$\{$ irreduzible affine algebraische Mengen $\}$	$\{$Primspektren von Ringen$\}$
$\Vert \wr$	$\Vert \wr$
$\{$ integre, endl. erz. k-Algebra $\}$	$\{$Ringe$\}$
$\Vert \wr$	$\Vert \wr$
$\{$ affine Varietäten $\}$	$\{$affine Schemata$\}$
$\cap$	$\cap$
$\{$ Prävarietät $\}$	$\{$Schemata$\}$
$\cap$	$\cap$
$\{$ Räume mit Funktionen über k $\}$	$\{$geringte Räume$\}$
X topol. Raum und Funktionenfamilie $\mathcal{O}_X(U)$ für offene Teilmengen $U \subseteq X$	X topol. Raum und Ring $\mathcal{O}_X(U)$ für offene Teilmengen $U \subseteq X$

Damit haben wir den „Fahrplan“ für den zweiten Hauptabschnitt der Vorlesung.

Kapitel II

Das Spectrum eines Rings

In diesem Hauptteil bezeichne R stets einen kommutativern Ring. Wir wollen nun zunächst einige (topologische) Begriffe aus der kommutativen Algebra wiederholen und sie im Kontext des ersten Kapitels eventuell noch neu beleuchten.

7 Zariskitopologie

Definition 7.1 *(Spectrum eines Rings)*
Dann bezeichnen wir mit $\mathrm{Spec}(R)$ *die Menge der Primideale von* R*. Die Menge der Maximalen Ideale von* R *bezeichnen wir mit* $\mathrm{Spm}(R)$*.*

Definition 7.2 *(Verschwindungsmenge eines Ideals)*
Ist $\mathfrak{a} \lhd R$ *ein Ideal, so setzen wir*

$$V(\mathfrak{a}) \ := \ \left\{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \,\middle|\, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p} \right\}$$

Bemerkung 7.3 *Ist* X *eine affine algebraische Menge mit Koordinatenring* $\Gamma(X)$*, dann haben im ersten Kapitel für Ideale* $\mathfrak{a} \lhd \Gamma(X)$ *die Bijektion*

$$\begin{array}{ccc} X & \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} & \mathrm{Spm}(R) \\ x & \mapsto & \mathfrak{m}_x \end{array}$$

gesehen wir sehen sofort, dass sich diese Einschränkt zu einer Bijektion

$$X \ \supseteq V(\mathfrak{a}) \ \stackrel{1:1}{\longleftrightarrow} \ \left\{ \mathfrak{m} \in \mathrm{Spm}(X) \,\middle|\, \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m} \right\} \subseteq \mathrm{Spm}(R)$$

Definition und Lemma 7.4 *(Zariskitopologie auf Ringspectren)*
Die Mengen der Form $V(\mathfrak{a})$ wie in Definition 7.2 sind die abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf $\operatorname{Spec}(R)$*, der sogenannten Zariskitopologie. Genauer gelten für Ideale* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{a}_i \lhd R$

(1) $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{b} \;\Rightarrow\; V(\mathfrak{a}) \supseteq V(\mathfrak{b})$

(2) $V(0) = \operatorname{Spec}(R)$ *und* $V\big(((1)\big) = \varnothing$

(3) $V\Big(\sum\limits_{i\in I} \mathfrak{a}_i\Big) \;=\; \bigcup\limits_{i\in I} V(\mathfrak{a}_i)$

(4) $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \;=\; V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \;=\; V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$

Beweis. Die Punkte **(2)**, **(3)** und **(4)** genau die Kriterien, die eine Topologie zu erfüllen hat (Vergleiche Satz 1.4). Die Punkte **(1)**, **(2)** und **(3)** sind sofort per Definition klar, einzig **(4)** ist zu zeigen:

- $V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \;=\; V(\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b})$ ist durch nachrechnen zu zeigen.
- Für $V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b}) \;=\; V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ zeige beide Inklusionen:

  „$\subseteq$“ Diese Inklusion folgt direkt aus Eigenschaft **(1)**.

  „$\supseteq$“ Sei $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b})$ mit $\mathfrak{p} \notin V(\mathfrak{a})$. Wir wollen zeigen, dass $\mathfrak{p}$ dann in $V(\mathfrak{b})$ liegt. Nach Voraussetzung gibt es ein $x \in \mathfrak{a} \setminus \mathfrak{p}$. Sei $y \in \mathfrak{b}$, dann ist $x \cdot y \in \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$. Da wir ausgeschlossen haben, dass $x \in \mathfrak{p}$ liegt und $\mathfrak{p}$ aber prim ist, muss also $y \in \mathfrak{p}$ liegen. □

Notation 7.5 *Die Elemente des topologischen Raums* $\operatorname{Spec}(R)$ *heißen Punkte. Zu einem Punkt* $x \in \operatorname{Spec}(R)$ *bezeichne* $\mathfrak{p}_x \lhd R$ *das „zugehörige“ Primideal in* R*.*

Definition 7.6 *Für eine Teilmenge* $Y \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ *definieren wir durch*

$$I(Y) \;:=\; \bigcap_{y\in Y} \mathfrak{p}_y \;\lhd R$$

das zu Y *gehörige Ideal.*

Die Definitionen 7.2 und 7.6 kennen wir schon im Kontext der Varietäten. Und tatsächlich gelten die gleichen Eigenschaften:

Satz 7.7 *Seien* $Y \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ *und* $\mathfrak{a} \lhd R$ *ein Ideal.*

(1) *Für* $Y' \subseteq Y$ *gilt* $I(Y') \supseteq I(Y)$

(2) $I(Y)$ *ist ein Radikalideal, das heißt* $I(Y) = \sqrt{I(Y)}$

(1) **(i)** $V(I(Y)) = \overline{Y}$ *ist der Abschluss von* Y *in* $\operatorname{Spec}(R)$.

(ii) $I(V(\mathfrak{a})) = \sqrt{\mathfrak{a}}$

Beweis. Die Teile **(1)** und **(2)** sind direkt aus der Definition klar. Für den ersten Teil von Behauptung **(3)** ist zu zeigen, dass $V(I(Y))$ die kleinste abgeschlossene Teilmenge von $\operatorname{Spec}(R)$ ist, die Y enthält. Sei also $V(\mathfrak{b})$ eine beliebige abgeschlossene Teilmenge, dann ist Y genau dann enthalten in $V(\mathfrak{b})$, wenn für alle $y \in Y$ gilt $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}_y$. Dies ist aber äquivalent mit der Bedingung

$$\mathfrak{b} \;\subseteq\; \bigcap_{y\in Y} \mathfrak{p}_y \;=\; I(Y)$$

Für den zweiten Teil betrachte die Gleichung

$$I(V(\mathfrak{a})) \;=\; \bigcap_{x \in V(\mathfrak{a})} \mathfrak{p}_x \;=\; \bigcap_{\substack{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \\ \mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}}} \mathfrak{p} \;=\; \sqrt{\mathfrak{a}}$$

□

Folgerung 7.8 *V und I induzieren inklusionsumkehrende Bijektionen*

$$\left\{\, \mathfrak{a} \lhd k[\underline{T}] \;\middle|\; \mathfrak{a} = \sqrt{\mathfrak{a}} \,\right\} \underset{I}{\overset{V}{\rightleftarrows}} \left\{\, Z \subseteq \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; Z \text{ abges.} \,\right\}$$

Unter dieser entsprechen sich

$$\operatorname{Spm}(R) \;\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\; \left\{\, \{x\} \;\middle|\; x \in \operatorname{Spec}(R) \,\right\}$$

Vergleiche auch Folgerung 1.13.

Definition 7.9 *(Ausgezeichnete offene Mengen)*
Für $f \in R$ setzen wir

$$D(f) \;:=\; \operatorname{Spec}(R) \setminus V\big((f)\big) \;=\; \left\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; f \notin \mathfrak{p} \,\right\}$$

Die Mengen der Form $D(f)$ heißen die ausgezeichneten offenen Mengen von $\operatorname{Spec}(R)$.

Bemerkung 7.10 *Es gelten*

- $D(0) \;=\; \left\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; 0 \notin \mathfrak{p} \,\right\} \;=\; \varnothing$
- $D(1) \;=\; \left\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; 1 \notin \mathfrak{p} \,\right\} \;=\; \operatorname{Spec}(R)$
- $D(fg) \;=\; \left\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R) \;\middle|\; f, g \notin \mathfrak{p} \,\right\} \;=\; D(f) \cap D(g)$

Lemma 7.11 *Seien für $i \in J$ Elemente $f_i, g \in R$ gegeben. Es gilt*

$$\begin{aligned} D(g) \;\subseteq\; \bigcup_{i \in J} D(f_i) \;&\Leftrightarrow\; \exists\, n \geq 0 \;:\; g^n \in (f_i | i \in J) \\ &\Leftrightarrow\; g \;\in\; \sqrt{(f_i | i \in J)} \end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\sqrt{(f_i | i \in J)} \;=\; I\big(V(f_i | i \in J)\big) \;=\; \bigcup_{\substack{\mathfrak{p} \,\in\, \operatorname{Spec}(R) \\ \mathfrak{p} \,\in\, V((f_i | i \in J))}} \mathfrak{p}$$

Damit ist also $g \in \sqrt{(f_i | i \in J)}$ äquivalent dazu, dass für alle $q \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $g \notin q$ gilt, dass q nicht in $V((f_i | i \in J))$ liegt. Es gilt aber

$$\begin{aligned} q \;\notin\; V((f_i | i \in J)) \;&\Leftrightarrow\; q \;\in\; \operatorname{Spec}(R) \setminus V((f_i | i \in J)) \\ &\Leftrightarrow\; q \in \operatorname{Spec}(R) \setminus \bigcap_{i \in J} V((f_i)) \\ &\Leftrightarrow\; q \in \bigcup_{i \in J} \big(\operatorname{Spec}(R) \setminus V((f_i)) \big) \\ &\Leftrightarrow\; q \in \bigcup_{i \in J} D(f_i) \end{aligned}$$

□

Wenden wir dieses Lemma auf das konstante Polynom $g = 1$ an, so erhalten wir

$$\bigcup_{i \in J} D(f_i) \;=\; \operatorname{Spec}(R) \quad\Leftrightarrow\quad (f_i | i \in J) = (1) = R$$

Folgerung 7.12 *Die ausgezeichneten offenen Teilmengen bilden eine Basis der (Zariski-) Topologie auf* $\operatorname{Spec}(R)$*. Alle Mengen der Form* $D(g)$*, also insbesondere auch* $\operatorname{Spec}(R)$*, sind quasi-kompakt.*

Beweis. Ist $U \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ offen, dann ist $\operatorname{Spec}(R) \setminus U$ abgeschlossen. Es gibt also ein $\mathfrak{a} \in R$ mit

$$V(\mathfrak{a}) \;=\; \operatorname{Spec}(R) \setminus U \;=\; \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} D(f)$$

Damit ist der erste Teil der Folgerung bereits gezeigt. Für die quasi-Kompaktheit genügt es nun zu zeigen, dass für alle $g \in R$ mit

$$D(g) \;\subseteq\; \bigcup_{i \in I} D(f_i)$$

eine endliche Teilmenge $J \subseteq I$ existiert, mit

$$D(g) \;\subseteq\; \bigcup_{i \in J} D(f_i)$$

Sei also $g \in R$ mit dieser Eigenschaft, dann gibt es nach dem Lemma ein $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n \in (f_i | i \in I)$, es gibt also eine <u>endliche</u> Teilmenge $J \subseteq I$ mit

$$g^n \;=\; \sum_{i \in J} a_i\, f_i$$

und damit gilt insbesondere $g^n \in (f_i | i \in J)$. Nach dem Lemma ist nun aber wiederum

$$D(g) \;\subseteq\; \bigcup_{i \in J} D(f_i)$$

und damit folgt die Behauptung. □

Warnung: Im Allgemeinen kann $\operatorname{Spec}(R)$ auch offene Teilmengen enthalten, die nicht quasi-kompakt sind.

Erinnerung *Im ersten Kapitel hatten wir für eine affine algebraische Menge* X *die Korrespondenzen:*

$$\begin{array}{ccc}
\{\text{ abges. Teilmengen von } X \} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{ Radikalideale in } \Gamma(X) \} \\
\cup & & \cup \\
\{\text{ irred. Teilmengen von } X \} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{ Primideale in } \Gamma(X) \} \\
\cup & & \cup \\
\{\text{ einpunktige Teilmengen von } X \} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \{\text{ Maximalideale in } \Gamma(X) \}
\end{array}$$

Wir wollen nun eine ähnliche Korrespondenz zwischen $X = \operatorname{Spec}(R)$ als topologischen Raum und den Idelaen im Ring R herstellen. Dabei werden wir die unterste Stufe der Maximalideale nicht übersetzen können.

Satz 7.13 *Sei $Y \subseteq \operatorname{Spec}(R)$ und bezeichne $\mathfrak{p} := I(Y)$. Dann ist Y genau dann irreduzibel, wenn $\mathfrak{p}$ ein Primideal von R ist. Und in diesem Fall ist gilt für die Abschlüsse in $\operatorname{Spec}(R)$: $\overline{Y} = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.*

Beweis. Sei zunächst Y irreduzibel und sei $f \cdot g \in \mathfrak{p}$, so gilt

$$Y \subseteq V(f \cdot g) \subseteq V(F) \cup V(g)$$

Da wir Y als irreduzibel vorausgesetzt haben muss entweder $Y \subseteq V(f)$ oder $Y \subseteq V(g)$ gelten. Ohne Einschränkung gelte $Y \subseteq V(f)$. Dann gilt

$$\mathfrak{p} = I(Y) \supseteq I\big(V(f)\big)$$

und damit muss also $f \in \mathfrak{p}$ gelten.
Sei andersherum nun $\mathfrak{p}$ ein Primideal, dann gilt

$$\overline{Y} = V\big(I(Y)\big) = V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$$

also ist insbesondere $\overline{Y}$ irreduzibel (denn wir haben es als Abschluss einer einpunktmenge schreiben können). Damit ist wegen Lemma 1.18 auch Y irreduzibel. □

Folgerung 7.14 *Die Zuordnung $\mathfrak{p} \mapsto V(\mathfrak{p})$ induziert eine Bijektion*

$$\operatorname{Spec}(R) = \big\{ \text{Primideale in } R \big\} \xleftrightarrow{1:1} \big\{ \text{irred. abges. Teilmengen von } \operatorname{Spec}(R) \big\}$$

Unter dieser Bijektion entsprechen die (bzgl. der Inklusion) minimalen Primideale in R den (bzgl. der Inklusion maximalen) irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen, also den irreduziblen Komponenten, von $\operatorname{Spec}(R)$.

Definition 7.15 *(abgeschlossene und generische Punkte, Generalisierung)*
Sei X ein topologischer Raum.

(i) *$x \in X$ heißt ein abgeschlossener Punkt, falls $\{x\}$ abgeschlossen ist.*

(ii) *$\eta \in X$ heißt generischer Punkt von X, falls $X = \overline{\{\eta\}}$.*

(iii) *Sind $x, y \in X$ so heißt x Generalisierung von y und y Spezialisierung von x, falls $y \in \overline{\{x\}}$.*

(iv) *$x \in X$ heißt ein maximaler Punkt, wenn $\overline{\{x\}}$ eine irreduzible Komponente ist.*

Beispiel 30 *Wir wollen die Sprechweisen aus Definition 7.15 in unseren Fall übersetzen, sei also $X = \operatorname{Spec}(R)$, dann gelten*

(i)	$x \in \operatorname{Spec}(R)$ ist abgeschlossener Punkt	$\Leftrightarrow$	$\mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spm}(R)$
(ii)	$\eta \in \operatorname{Spec}(R)$ ist generischer Punkt	$\Leftrightarrow$	$V(\mathfrak{p}_\eta) = \operatorname{Spec}(R))$
		$\Leftrightarrow$	$\mathfrak{p}_\eta$ ist eind. bestimmtes minimales Primideal
		$\Leftrightarrow$	Das Nilradikal $nil(R) := \bigcap\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)} \mathfrak{p}$ ist prim
(iii)	$x, y \in \operatorname{Spec}(R)$ mit $y \in \overline{\{x\}}$	$\Leftrightarrow$	$\mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$
(iv)	$x \in \operatorname{Spec}(R)$ ist maximaler Punkt	$\Leftrightarrow$	$\mathfrak{p}_x$ ist (bzgl. Inklusion) ein maximales Primideal

Eine weitere Annäherung an Bijektionen, wie wir sie in Kapitel 1 gefunden haben, erhalten wir, in dem wir einen naheliegenden Spezialfall betrachten:

Beispiel 31 *Sei X eine affine algebraische Menge und bezeichne $R := \Gamma(X)$. Dann ist*

$$X = \mathrm{Spm}(R) \subseteq \mathrm{Spec}(R)$$

und das Maximalspektrum $\mathrm{Spm}(R)$ trägt die von $\mathrm{Spec}(R)$ induzierte Teilraumtopologie. Diese entspricht genau der Zariskitopologie, die wir in Kapitel 1 auf X eingeführt haben. Für die Menge $\mathrm{Spec}(R) \setminus X$ der nicht maximalen Primideale erhalten wir die folgende Korrespondenz aus Folgerung 7.14

$$\mathrm{Spec}(R) \setminus X \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{irred. abges. Teilmengen von } \mathrm{Spec}(R) \\ \text{mit mehr als einem Element} \end{array} \right\}$$

Nach Kapitel 1 haben wir aber auch

$$\mathrm{Spec}(R) \setminus X \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{irred. abges. Teilmengen von } X \\ \text{mit mehr als einem Element} \end{array} \right\}$$

Damit erhalten wir in diesem Spezialfall eine neue Bijektion und zwar

$$\begin{array}{ccc} \left\{ \begin{array}{c} \text{irred. abges. Teilmengen von } \mathrm{Spec}(R) \\ \text{mit mehr als einem Element} \end{array} \right\} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & \left\{ \begin{array}{c} \text{irred. abges. Teilmengen von } X \\ \text{mit mehr als einem Element} \end{array} \right\} \\ Y & \mapsto & Y \cap X \end{array}$$

8 Funktorialität des Spectrums I

Seien A, B in diesem Abschnitt stets kommutative Ringe mit Einselement.

Definition 8.1 *(Assozierte Abbildung)*
Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus, dann bezeichnen wir die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} {}^a\varphi : \mathrm{Spec}(B) & \to & \mathrm{Spec}(A) \\ \mathfrak{q} & \mapsto & \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{array}$$

als die zu φ assozierte Abbildung.

Anmerkung Die assozierte Abbilung ist wohldefiniert, denn $\varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ ist für Primideale $\mathfrak{q} \in \mathrm{Spec}(B)$ ein Primideal von A, denn

$$A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \hookrightarrow B/\mathfrak{q}$$

und der Faktorring B nach $\mathfrak{q}$ ist integer.

Satz 8.2 *Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus.*

(1) *Für alle $M \subseteq A$ gilt:* ${}^a\varphi\big(V(M)\big) = V\big(\varphi(M)\big)$ *und*
für alle $f \in A$ gilt: ${}^a\varphi\big(D(f)\big) = D\big(\varphi(f)\big)$.

(2) *Für alle Ideale $\mathfrak{b} \lhd B$ gilt:* $V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big) = \overline{{}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)}$

Beweis. Für alle $M \subseteq A$ und alle $q \in \operatorname{Spec}(B)$ ist

$$\varphi(M) \subseteq q \;\Leftrightarrow\; M \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

Damit folgen die Aussagen von **(1)** sofort. Zu **(2)** betrachte für $\mathfrak{b} \lhd B$

$$\begin{aligned} I\big({}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)\big) &= \bigcap_{\mathfrak{p} \in {}^a\varphi(V(\mathfrak{b}))} \mathfrak{p} = \bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \\ &= \varphi^{-1}\Big(\bigcap_{\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{b})} \mathfrak{q}\Big) = \phi^{-1}\big(\sqrt{\mathfrak{b}}\big) \\ &= \sqrt{\varphi^{-1}(\mathfrak{b})} \end{aligned}$$

Wende nun auf beide Seiten den V-Operator an und erhalte

$$\overline{{}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)} = V\big(I\big({}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big)\big)\big) = V\big(\sqrt{\varphi^{-1}(\mathfrak{b})}\big) = V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big)$$

□

Insbesondere folgt aus **(2)**, dass Urbilder abgeschlossener Teilmengen unter ${}^a\varphi$ wieder abgeschlossen sind, also ist ${}^a\varphi$ eine stetige Abbildung. Damit erhalten wir die

Folgerung 8.3 *Die Zuordnungen $R \mapsto \operatorname{Spec}(R)$ und $\varphi \mapsto {}^a\varphi$ ergeben zusammen einen kontravariantern Funktor von Ringen mit Ringhomomorphismen zu topologischen Räumen mit stetigen Abbildungen. Das heißt*

- ${}^a\varphi$ *ist stetig*
- ${}^a id = id$
- ${}^a(\psi \circ \varphi) = {}^a\varphi \circ {}^a\psi$

Definition und Folgerung 8.4 *(${}^a\varphi$ dominant)*
Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Wir nennen ${}^a\varphi$ dominant, wenn $\overline{\operatorname{Im}({}^a\varphi)} = \operatorname{Spec}(A)$ ist. Es gilt: ${}^a\varphi$ ist genau dann dominant, wenn $\operatorname{Ker}\varphi$ aus nilpotenten Elementen besteht.

Beweis. Betrachte **(2)** von Satz 8.2 für $\mathfrak{b} = (0)$ und erhalte

$$\overline{\operatorname{Im}({}^a\varphi)} = \overline{{}^a\varphi(V(0))} = V\big(\varphi^{-1}(0)\big) = V\big(\operatorname{Ker}(\varphi)\big)$$

□

Beispiel 32 *Sei $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ein Ringhomomorphismus, dann ist ${}^a\varphi$ dominant, denn (o) ist generischer Punkt des Spectrums von $\mathbb{Z}$ und* $\operatorname{Im}({}^a\varphi) = (0)$.

Beispiel 33 *(abgeschlossene Teilmengen von Ringspectren)*

- *Sei K ein Körper, dann ist $\operatorname{Spec}(K)$ einelementig.*
- *Ist R ein Hauptidealring (Beispielsweise $K[T]$, $\mathbb{Z}$, ...) dann ist*

  $$\operatorname{Spec} R = \operatorname{Spm}(R) \cup \{(0)\}$$

  Die abgeschlossenen Teimlengen von $\operatorname{Spec}(R)$ sind also $\varnothing$, $\operatorname{Spec}(R)$ und endliche Mengen von abgeschlossenen Punkten.

Satz 8.5 *Es gelten*

(1) *Sei $\varphi : A \twoheadrightarrow B$ ein surjektiver Ringhomomorphismus und bezeichne $I := \operatorname{Ker}\varphi$. Dann induziert ${}^a\varphi$ einen Homöomorphismus von $\operatorname{Spec}(B)$ auf die abgeschlossene Teilmenge $V(I)$ in $\operatorname{Spec}(A)$.*

(2) *Sei $S \subseteq A$ eine multiplikativ abgeschlossene Teilmenge und sei*

$$\varphi : A \to S^{-1}A =: B$$

die kanonische Abbildung in die Lokalisierung von A nach S. Dann induziert ${}^a\varphi$ einen Homöomorphismus von $\operatorname{Spec}(B)$ auf die Teilmenge $\{\, \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(A) \mid \mathfrak{p} \cap S = \varnothing \,\}$ in $\operatorname{Spec}(A)$.

Beweis. Aus der kommutativen Algebra ist bekannt, dass ${}^a\varphi$ in beiden Fällen injektiv mit den jeweils angegebenen Bild ist. Damit genügt es also zu zeigen, dass die jeweiligen Umkehrabbildungen sttig sind. Mit anderen Worten: Es ist zu zeigen, dass Bilder abgeschlossener Teilmengen unter ${}^a\varphi$ abgeschlossen in $\operatorname{Im}({}^a\varphi)$ sind.
In beiden Fällen gilt für ein Ideal $\mathfrak{b} \lhd B$ und ein Primideal $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec}(B)$

$$\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{q} \;\Leftrightarrow\; \varphi^{-1}(\mathfrak{b}) \subseteq \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$$

Denn in **(1)** ist φ als surjektiv vorausgesetzt und in **(2)** ist φ die kanonische Abbildung in die Lokalisierung. Deshalb ist in beiden Fällen

$${}^a\varphi\big(V(\mathfrak{b})\big) = V\big(\varphi^{-1}(\mathfrak{b})\big) \cap \operatorname{Im}({}^a\varphi)$$

Und diese Menge ist jeweils abgeschlossen. □

Beispiel 34 *Ist A ein Ring und $f \in A$ ein Element, dann sind*

$$D(f) \cong \operatorname{Spec}(A_f)$$

homöomorph. Dabei betrachten wir links die Teilraumtopologie auf $D(f)$ und rechts die Zariskitopologie auf dem Spektrum der Lokalisierung.

9 Garben

Wir wollen nun ein Analogon zum Konstrukt der Räume mit Funktionen über einem Körper k konstruieren. Wir erinnern uns: Ist X eine affine algebraische Menge, dann haben wir das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\Gamma(X) \arrow[rr, "\mathrm{ev}_x:\, f \mapsto f(x)"] \arrow[dr, "\pi"'] & & k \\
& \Gamma(X)/\mathfrak{m}_x \arrow[ur, "\cong"'] &
\end{tikzcd}$$

Weil also die Evaluationsabbildung ev_x über das zu x gehörige Maximalideal $\mathfrak{m}_x$ faktorisiert erhalten wir eine Beschreibung der Einbettung von $\Gamma(X)$ nach $\operatorname{Abb}(X,k)$ als

$$\begin{array}{rcl}
\Gamma(X) = \mathcal{O}_x(X) & \hookrightarrow & \operatorname{Abb}(X,k) \\
f & \mapsto & [x \mapsto f \text{ modulo } \mathfrak{m}_x]
\end{array}$$

Betrachten wir nun den Fall für einen Ring R und $f \in R$ sowie $x \in \operatorname{Spec}(R)$. Die Elemente aus R sind nicht im eigentlichen Sinne Funktionen, schon gar nicht auf den Elementen des Spektrums. Trotzdem wollen wir analog zur obigen Beschreibung das Bild von f im Restklassenkörper $\kappa(\mathfrak{p}_x)$ mit $f(x)$ bezeichnen:

Definition 9.1 *Sei* $x = \mathfrak{p}_x \in \operatorname{Spec}(R)$ *dann bezeichne*

$$\kappa(\mathfrak{p}_x) \;:=\; \kappa(x) \;:=\; \operatorname{Quot}\left(R/\mathfrak{p}_x\right)$$

den Restklassenkörper zu x. *Wir können Elemente* $f \in R$ *auffassen als „Funktion“ auf* $\operatorname{Spec}(R)$, *derart, dass zu* $x \in \operatorname{Spec}(R)$ *der Funktionaswert von* f *in* $\kappa(x)$ *liegt.*

Beispiel 35 *(Ringelemente als „Funktion“)*

- *Sei* $R = \mathbb{Z}$ *und* $f = 6 \in \mathbb{Z}$, *dann fassen wir* 6 *als „Funktion“ auf* $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ *auf, vermöge der Zuordnung*

$$\mathfrak{p} \;\mapsto\; \begin{cases} 6 \in \mathbb{Q} & \text{falls } \mathfrak{p} = (0) \\ \overline{6} \in \mathbb{F}_p & \text{falls } \mathfrak{p} = (p) \text{ für eine Primzahl } p \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

- *Sei* k *ein akgebraisch abgeschlossener Körper und* $R = k[T]$ *der Polynomring in einer Variablen über* k. *Wir fassen* $f \in R$ *als „Funktion“ auf* $\operatorname{Spec}(R)$ *auf, vermöge der Zuordnung*

$$\mathfrak{p} \;\mapsto\; \begin{cases} f \in k(T) & \text{falls } \mathfrak{p} = (0) \\ \overline{f} \in R/(T-\alpha) & \text{falls } \mathfrak{p} = (T-\alpha) \text{ für ein } \alpha \in k \end{cases}$$

  In diesem Fall können wir natürlich via

$$\begin{array}{ccc} R/(T-\alpha) & \xrightarrow{\sim} & k \\ T & \mapsto & \alpha \\ f & \mapsto & f(\alpha) \end{array}$$

  Die Bildbereiche für die Fälle $\mathfrak{p} \neq (0)$ *miteinander identifizieren und erhalten so tatsächlich eine Funktion auf dem Maximalspektrum.*

In den folgenden Abschnitten wollen wir das Konstrukt der Räume mit Funktionen durch das Konstrukt der geringten Räume ersetzen. Dabei werden wir die k-Algebra $\mathcal{O}_X$ durch Garben ersetzen. Die entscheidenden Methoden, die wir bei der Definition von $\mathcal{O}_X$ für Räume mit Funktionen gefordert haben sind „Verkleben“ und „Einschränken“ von Funktionen. Die Grundidee ist nun eine Familie zu definieren, die genau diese Methoden in das neue Konstrukt herüberrettet. Zunächst die Einschränkung:

Definition 9.2 *(Prägarbe)*
Sei X *ein topologischer Raum. Eine Prägarbe* $\mathcal{F}$ *auf* X *ist gegeben durch*

- *eine Menge* $\mathcal{F}(U)$ *für jede offene Teilmenge* $U \subseteq X$
- *Eine Abbildung* $\operatorname{res}^U_V : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ *für je zwei offene Mengen* $V \subseteq U \subseteq X$ *so dass gelten*

  (1) *Für alle offenen Mengen* $U \subseteq X$ *ist* $\operatorname{res}^U_U \;=\; id_{\mathcal{F}(U)}$

  (2) *Für alle offenen Mengen* $W \subseteq V \subseteq U \subseteq X$ *gilt* $\operatorname{res}^U_W \;=\; \operatorname{res}^V_W \circ \operatorname{res}^U_V$

Die Elemente von $\mathcal{F}(U)$ *nennnen wir auch Schnitte von* $\mathcal{F}$ *auf* U *und anstelle von* $\operatorname{res}^U_V(f)$ *verwenden wir auch oft die, aus dem Umgang mit Funktionen geläufige, Schreibweise* $f_{|V}$ *für* $f \in \mathcal{F}(U)$.

Bemerkung 9.3 *Genauer sprechen wir in Definition 9.2 von einer Prägarbe von Mengen. Analog definieren wir Prägarben von (abelschen) Gruppen, Ringen, R-Moduln, ... indem wir zusätzlich fordern, dass alle $\mathcal{F}(U)$ nicht nur irgendwelche Mengen, sondern (abelsche) Gruppen, Ringe oder R-Moduln, etc. sind und für alle Restriktionsabbldungen* res, *dass sie Homomorphismen der entsprechenden Objekte sind.*

Definition 9.4 *(Morphismus von Prägarben)*
Sei X ein topologischer Raum und seien $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Prägarben auf X. Ein Morphismus

$$f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

von Prägarben ist gegeben durch eine Abbildung $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ derart, dass das folgende Diagramm für alle offenen Teilmengen $V \subseteq U$ kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "f(U)"] \arrow[d, "\mathrm{res}^U_V"'] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\mathrm{res}^U_V"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "f(V)"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd}$$

Anmerkung Analog sprechen wir von Morphismen von Prägarben von (abelschen) Gruppen, Ringen, usw. und fordern zusätzlich, dass auch alle $f(U)$ Homomorphismen der entsprechenden Objekte sind.

Mit dem Konstrukt der Prägarbe können wir nun also Elemente von R auf Teilmengen von $\mathrm{Spec}(R)$ einschränken. Nun wollen wir solche „lokalen Funktionen“ auch verkleben können. Dafür betrachte die folgende

Definition 9.5 *(Garbe)*
Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Wir nennen $\mathcal{F}$ eine Garbe, wenn die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind:

(1) *Seien $U_i \subseteq X$ für $i \in I$ offen und U die Vereinigung dieser U_i. Sind $s, t \in \mathcal{F}(U)$ Schnitte, so dass $s_{|U_i} = t_{|U_i}$ für alle $i \in I$ gilt, so gilt auch global $s = t$*

(2) *Seien $U_i \subseteq X$ für $i \in I$ offen und U die Vereinigung dieser U_i. Sind für $i \in I$ Schnitte $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ derart gegeben, so dass für alle $i, j \in I$ gilt*

$$s_{i|U_i \cap U_j} = s_{j|U_i \cap U_j}$$

Dann gibt es ein globales $s \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_{|U_i} = s_i$ für alle $i \in I$.

Diese Punkte heißen auch erstes und zweites Garbenaxiom.

Anmerkung Wenn **(1)** aus der obigen Definition in Geltung ist, dann ist das globale s aus **(2)** durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt.

Bemerkung 9.6 *Wir nennen ein Diagramm der Form*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, shift left, "\psi_1"] \arrow[r, shift right, "\psi_2"'] & C \end{tikzcd}$$

exakt, falls φ injektiv und $\operatorname{Im}(\varphi) = \left\{ b \in B \,\middle|\, \psi_1(b) = \psi_2(b) \right\}$ ist. Mit dieser Sprechweise können wir die Definition der Garben auch umformulieren zu:
Seien $U_i \subseteq X$ für $i \in I$ offen und U die Vereinigung dieser U_i, dann gelten erstes und zweites Garbenaxiom genau dann, wenn für alle U_i das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r] & \prod\limits_{i\in I} \mathcal{F}(U_i) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod\limits_{i,j\in I} \mathcal{F}\left(U_i \cap U_j\right) \end{tikzcd}$$

$$s \longmapsto (s_i)_{i\in I} \qquad \begin{array}{lcl} (s_i)_{i\in I} & \longmapsto & (s_{i|U_i\cap U_j})_{i,j\in I} \\ (s_i)_{i\in I} & \longmapsto & (s_{j|U_i\cap U_j})_{i,j\in I} \end{array}$$

exakt ist.

Bemerkung 9.7 *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, dann ist $\mathcal{F}(\varnothing) = \{pt.\}$ eine einpunktige Menge.*
Betrachte dazu die Indexmenge $I = \varnothing$, dann ist

$$\varnothing = U = \bigcup_{i\in I} U_i$$

für offenen Mengen U_i.Nach dem zweiten Garbenaxiom gibt es ein Element in $\mathcal{F}(\varnothing)$ und nach dem ersten Garbenaxiom ist dieser eindeutig.

Beispiel 36 *(Garben)*

1. *Sei $(X, \mathcal{O}_X)$ ein Raum mit Funktionen über k, dann ist $\mathcal{O}_X$ eine Garbe (von k-Algebren) auf X.*

2. *Sei X ein topologischer Raum und M eine Menge, dann definiert $\mathcal{F}(U) := \operatorname{Abb}(U, M)$ eine Garbe wobei die Restriktionsabbildung das Einschränken von Abbildungen ist.*

3. *Sei X, Y topologische Räume und für $U \subseteq X$ offen sei $\mathcal{F}(U) := \operatorname{Hom}(U, Y)$ mit Einschränken von Abbildungen als Restriktionsabbildung. Dann ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X.*

4. *Sei X ein topologischer Raum und für $U \subseteq X$ offen setze*

   $$\mathcal{F}(U) := \{ f : U \to \mathbb{R} \mid f(U) \text{ ist beschränkt} \}$$

   Zusammen mit Einschränken von Abbildungen als Restriktionsabbildung ist $\mathcal{F}$ eine Prägarbe, aber im allgemeinen keine Garbe auf X.

5. *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X. Für $U \subseteq X$ offen ist $\mathcal{F}_{|U}$ eine Garbe auf U mit $\mathcal{F}_{|(U)}(V) = \mathcal{F}(V)$ fÜr $V \subset U$ offen.*

Bemerkung 9.8 *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{B}$ eine Basis der Topologie auf X.*

- *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe auf X, dann ist $\mathcal{F}$ durch die $\mathcal{F}(U)$ mit $U \in \mathcal{B}$ und res^U_V für $U, V \in \mathcal{B}$ eindeutig bestimmt und für alle $W \in X$ offen gilt dann*

$$\mathcal{F}(W) \;=\; \left\{ (s_U)_U \;\in\; \prod_{\substack{U \subseteq W \\ U \in \mathcal{B}}} \mathcal{F}(U) \,\middle|\, s_{U|V} = s_V \text{ für alle } V \subseteq U \subseteq W \text{ mit } U, V \in \mathcal{B} \right\} \quad (9.1)$$

- *Ist für jedes $U \in \mathcal{B}$ eine Menge $\mathcal{F}'(U)$ und für je zwei $U, V \in \mathcal{B}$ mit $V \subseteq U$ eine Abbildung*

$$\mathrm{res}^U_V : \mathcal{F}'(U) \to \mathcal{F}'(V)$$

mit den Eigenschaften $\mathrm{res}^U_U = id$ und $\mathrm{res}^W_V = \mathrm{res}^U_V \circ \mathrm{res}^W_U$ für $V, U, W \in \mathcal{B}$ mit $V \subseteq U \subseteq W$ gegenen, so dass $\mathcal{F}'$ mit res die Garbenaxiome für alle U_i, $i \in I$ und U der Vereinigung dieser U_i, wobei $U_i, U \in \mathcal{B}$ für alle $i \in I$, erfüllen.
Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{F}$ auf X mit

(1) $\mathcal{F}(U) \;=\; \mathcal{F}'(U)$ *für alle $U \in \mathcal{B}$*

(2) $\mathrm{res}^U_{V.\mathcal{F}} \;=\; \mathrm{res}^U_{V.\mathcal{F}'}$ *für alle $U, V \in \mathcal{B}$ mit $V \subset U$*

Beweisskizze. Nur zum zweiten Punkt der Bemerkung: Definieren $\mathcal{F}'$ durch die Gleichung (9.1) und rechne die Garbenaxiome nach. $\diamond$

Der direkte (oder: induktive) Limes

Wir wollen für $x \in X$ einen sogenannten „Halm" definieren. Damit meinen wir eine Menge $\mathcal{F}_x$ der „Abbildungen" (Schnitte) die in irgendeiner (kleinen) Umgebung (Also offene Mengen $U \subset X$ mit $x \in U$) von x definiert sind.

Im Fall von *affinen Varietäten*, etwa $(X, \mathcal{O}_X)$, ist diese Konstruktion leicht, denn für offene Teilmengen $U \subseteq X$ kann $\mathcal{O}_X(U)$ immer als Teilmenge des rationalen Funktionen körpers $K(X)$ betrachtet werden und für je zwei offene Mengen $V, U \subseteq X$ mit $V \subseteq U$ ist die Restriktionsabbildung

$$\mathrm{res}^U_V : \; \mathcal{O}_X(U) \;\to\; \mathcal{O}_X(V)$$

die natürliche Inklusion innerhalb des rationalen Funktionenkörpers. Wir können damit $\mathcal{F}_x \;=\; \mathcal{O}_{X,x}$ definieren als

$$\mathcal{F}_x \;=\; \mathcal{O}_{X,x} \;:=\; \bigcup_{\substack{U \subset X\, offen \\ x \in U}} \mathcal{O}_X(U)$$

Im allgemeineren Fall der *Garben* können wir $\mathcal{F}_x$ nicht auf diesem Wege definieren, denn die Restriktionsabbildungen sind nicht notwendig injektiv. Deswegen müssen wir die Vereinigung durch eine allgemeinere Konstruktion, die des induktiven Limes, ersetzen.

Bezeichne in diesem Abschnitt $\mathcal{C}$ stets eine Kategorie, zum Beispiel die Kategorie der Mengen (Mengen mit Abbildungen) oder Gruppen (Gruppen mit Gruppenhomomorphismen). Wir schreiben dann $Obj(\mathcal{C})$ für die Objekte (also im Beispiel die Mengen oder Gruppen) und $Mor(\mathcal{C})$ für die zugehörigen Morphismen (also Abbildungen oder Homomorphismen) der betreffenden Kategorie.

Definition 9.9 *(partiell geordnet, induktives System, induktiver Limes)*
Sei $(I, \leq)$ eine partiell geordnete Menge, das heißt es gelten

- *Für alle $i \in I$ ist $i \leq i$*
- *Für alle $i, j, k \in I$ mit $i \leq j$ und $j \leq k$ gilt $i \leq k$*
- *Für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ und $j \leq i$ gilt $i = j$*

Sei weiter $\big((A_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \leq j}\big)$ ein induktives System, das heißt es gelten

- *Für alle $i \in I$ ist $A_i \in Obj(\mathcal{C})$*
- *Für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ ist $\varphi : A_i \to A_j$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$, so dass gelten*
  - *Für alle $i \in I$ ist $\varphi_{ii} = id_{A_i}$*
  - *Für alle $i, j, k \in I$ mit $i \leq j \leq k$ ist $\varphi_{ik} = \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij}$*

Ein Objekt $L \in Obj(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $\psi_i : A_i \to L$ für $i \in I$ heißt induktiver (oder: direkter) Limes des induktiven Systems $\big((A_i)_{i \in I}, (\varphi_{ij})_{i \leq j}\big)$ und wir schreiben

$$L = \varinjlim_{I} A_i$$

Falls gelten

- *Für alle $i, j \in I$ mit $i \leq j$ ist $\psi_j \circ \varphi_{i,j} = \psi_i$. Das heißt das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\varphi_{ij}"] \arrow[dr, "\psi_i"'] & & L \\ & A_j \arrow[ur, "\psi_i"'] & \end{tikzcd}$$

- *Die folgende **universelle Eigenschaft**:*
  Ist $T \in Obj(\mathcal{C})$ zusammen mit Morphismen $\eta_i : A_i \to T$ mit $\eta_j \circ \varphi_{ij} = \eta_j$ für alle $i \leq j$, so gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\xi : L \to T$ mit $\xi \circ \psi_i = \eta_i$ für alle $i \in I$. Mit anderen Worten, das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\eta_i"'] & & L \arrow[dl, dashed, "\exists!\,\xi"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Bemerkung 9.10 ***Falls*** *der induktive Limes eines induktiven Systems (A_i, ϕ_{ij}) existiert, so ist er wegen der universellen Eigenschaft, bis auf eindeutige Isomorphie, eindeutig bestimmt.*
Im Allgemeinen *existiert der induktive Limes nicht*[1].

[1] Wir werden später noch ein Beispiel eines induktiven Systems ohne induktiven Limes in der Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume über einem Körper sehen.

Definition 9.11 *(gerichtete Menge)*
Eine partiell geordnete Menge $(I, \leq)$ heißt gerichtet, falls es für alle $i, j \in I$ ein $k \in I$ gibt, mit $i \leq k$ und $j \leq k$.

Beispiel 37 *(gerichtete Menge)*
Sei $I = \mathbb{N}_{>0}$, dann definieren wir eine partielle Ordnung auf I durch

$$i \leq j \;\; :\Leftrightarrow \;\; i \,|\, j$$

Dann ist $(I, \leq)$ gerichtet, denn für alle $i, j \in I$ gibt es ein $k \in I$, Beispielsweise $k = i \cdot j$ oder $k = kgv(i, j)$, mit $i \leq k$ und $j \leq k$.
Anmerkung *$(I, \leq)$ ist im Gegensatz zu den natürlichen Zahlen mit der Standartordnung nicht total geordnet, denn i, j mit $i \nmid j$ und $j \nmid i$ sind mit der oben definerten Ordnung nicht verglechbar.*

Im Folgenden betrachten wir nurnoch gerichtete Indexmengen $(I, \leq)$.

Beispiel 38 *Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Mengen und X eine Menge. Seien $(I, \leq)$ Teilmengen $A_i \subseteq X$ mit $A_i \subseteq A_j$ für $i \leq j$ gegeben und sei $\varphi_{ij} : A_i \hookrightarrow A_j$ die natürliche INklusion. Dann ist*

$$L := \bigcup_{i \in I} A_i \qquad (\subseteq X)$$

zusammen mit den Inklusionen $\psi_i : A_i \hookrightarrow L$ „der“ induktive Limes des Systems (A_i, φ_{ij})
Beweis. *Es ist in diesem Fall nur noch die universelle Eigenschaft zu prüfen. Sei also (T, η_i) ebenfalls ein Tupel, dass die Eigenschaften des induktiven Limes erfüllt, dann ist zu zeigen, dass ein eindeutiges ξ existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:*

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\eta_i"'] & & L \arrow[dl, dashed, "\xi"] \\
& T &
\end{tikzcd}$$

Für $a \in A_i$ ist ξ durch $\xi(a) := \eta_i(a)$ bereits eindeutig bestimmt. Wir müssen nun noch betrachten, was passiert, falls auch $a \in A_j$ gilt. Nach Voraussetzung ist I gerichtet, also gibt es ein $k \in I$ mit $A_i \subseteq A_k \supseteq A_j$. Es gelten

$$\eta_i(a) = \eta_{k|A_i}(a) \quad \text{und} \quad \eta_j(a) = \eta_{k|A_j}(a)$$

und damit ist ξ eindeutig angegeben. $\diamond$

Obwohl wir oben bemerkt haben, dass der induktive Limes im Allgemeinen nicht existiert, ist es kein Sonderfall, dass es einen solchen Limes gibt. Dies zeigen die folgenden Sätze

Satz 9.12 *Sei $(I, \leq)$ eine gerichtete Menge und sei (A_i, φ_{ij}) ein induktives System in der Kategorie der Mengen. Dann existiert der induktive Limes*

$$\varinjlim_{I} A_i =: L$$

Beweis. Betrachte auf der disjunkten Vereinigung

$$\coprod_{i\in I} A_i$$

die folgende Äquivalenzrelation

$$a \sim b \;:\Leftrightarrow\; a \in A_i,\, b \in A_j \;\exists k \in I:\; i \le k,\; j \le k \text{ mit } \varphi_{ik}(a) = \varphi_{jk}(a)$$

Offensichtlich ist $\sim$ reflexiv und symmetrisch. Zur Transitivität betrachte $a \in A_i,\, b \in A_j\,, c \in A_l$ mit $a \sim b$ und $b \sim c$ das heißt es gibt $k_1, k_2 \in I$ mit $\varphi_{ik_1}(a) = \varphi_{jk_1}(b)$ und $\varphi_{jk_2}(b) = \varphi_{lk_2}(c)$ Da I gerichtet ist, gibt es ein $n \in I$ mit $k_1, k_2 \le n$ und es gilt

$$\begin{aligned}\varphi_{in}(a) &= \varphi_{k_1n}\big(\varphi_{ik_1}(a)\big) = \varphi_{k_1n}\big(\varphi_{jk_1}(b)\big)\\ &= \varphi_{jn}(b) = \varphi_{k_2n}\big(\varphi_{jk_2}(b)\big) = \varphi_{k_2n}\big(\varphi_{lk_2}(c)\big)\\ &= \varphi_{ln}(c)\end{aligned}$$

Setze dann

$$L := \Big(\coprod_{i\in I} A_i\Big)\Big/\!\sim \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rccc}\psi_i: & A_i & \to & L\\ & a & \mapsto & [a]_\sim\end{array}$$

Es bleibt nurnoch zu zeigen, dass (L, ψ_i) die universelle Eigenschaft des induktiven Limes erfüllt. Sei also auch (T, η_i) ein Tupel, dass die Eigenschaften des induktiven Limes erfüllt, dann ist zu zeigen, dass ein eindeutiges ξ existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\eta_i"'] & & L \arrow[dl, dashed, "\xi"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Wir verkürzen $[a] := [a]_\sim$. Für $[a] \in L$ mit $a \in A_i$ ist die Abbildung $\xi([a]) := \eta_i(a)$ klar. Betrachte nun einen weiteren Repräsentanten, etwa $[a] = [b]$ mit $b \in A_j$. Dann ist $\eta_i(a) = \eta_j(b)$, denn

$$\eta_i(a) = \eta_k\big(\varphi_{ik}(a)\big) = \eta_k\big(\varphi_{ik}(b)\big) = \eta_j(b)$$

denn $a \sim b$. □

Satz 9.13 *Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der (abelschen) Gruppem, Ringe oder R-Modul für einen festen Ring R. Sei weiter $(I, \le)$ eine gerichtete Menge und (A_i, φ_{ij}) ein induktives System in $\mathcal{C}$. Dann existiert der Induktive Limes $L \in Obj(\mathcal{C})$ des Systems (A_i, φ_{ij}).*

Beweis. Sei L als Menge der induktive Limes des Systems (A_i, φ_{ij}) in der Kategorie der Mengen („vergessen“ wir für den Moment die Strukturen auf den Mengen, dann erhalten wir die Existens von L aus dem vorangegangenen Satz). Wir müssen nun die Strukturen auf der Menge L neu erklären:
Addition auf L: Seien $[a]$, $[b] \in L$, etwa $a \in A_i$ unf $b \in A_j$. Sei $k \in I$ mit $i, j \le k$, dann setze

$$[a] + [b] := \big[\varphi_{ik}(a) + \varphi_{jk}(b)\big]$$

Durch Nachrechnen der *Wohldefiniertheit* (also der Unabhängigkeit von jedweder Vertreterwahl) und der *Additionsaxiome* der jeweilige Kategorie sehen wir, dass damit $(L, +)$ eine (abelsche) Gruppe mit neutralem Element $[0]$ ist.

Analog definiere die (eventuell Vorhandenen) anderen Strukturen auf L. Dann wird L zu einem Objekt in der betrachteten Kategorie. Die Abbildungen $\psi_i : A_i \to L$ sind dann „automatisch" Morphismen in der Kategorie $\mathcal{C}$. Es bleibt also nur noch die universelle Eigenschaft zu zeigen. Sei dazu (T, η_i) ein weiteres Tupel, dass die Eigenschaften des induktiven Limes erfüllt, dann ist zu zeigen, dass ein eindeutiges ξ existiert, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[rr, "\psi_i"] \arrow[dr, "\eta_i"'] & & L \arrow[dl, dashed, "\xi"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Allerdings haben wir bereits das eindeutig bestimmte ξ aus der Kategorie der Mengen, denn L und T sind induktive Limites in der Kategorie der Mengen (s.o.). Damit ist ξ der einzige Kandidat und wir müssen nur zeigen, dass ξ ein Morphismus der betrachteten Kategorie ist. Dies ist aber, wie bei den ψ_i automatisch der Fall (Nachrechnen!). $\square$

Beispiel 39 *(Kein induktiver Limes)*
Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der endlichdimensionalen Vektorräume über einem Körper K und $I = \mathbb{N}_0$ mit der üblichen „$\leq$"-Ordnung. Setze $A_i = K^i$ für $i \in I$ und $\varphi_{ij} : A_i \hookrightarrow A_j$ die natürliche Inklusion auf die ersten i-Einträge. Der einzige Kandidat für einen induktiven Limes ist

$$\bigcup_{i \in I} A_i \;=\; \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K^i$$

und dies ist <u>kein</u> endlich dimensionaler Vektorraum, also kein Objekt von $\mathcal{C}$. Und damit existiert der induktive Limes nicht.

Halme

Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine (Prä-)Garbe auf X und $x \in X$ ein Punkt. Setze

$$I \;:=\; \{\, U \subseteq X \text{ offen} \mid x \in U \,\}$$

Eine Ordnung „$\leq$" auf I definieren wir durch

$$U \leq V \quad :\Leftrightarrow \quad V \subseteq U$$

Dann erhalten wir ein induktives System

$$\Big(\big(\mathcal{F}(U)\big)_{U \in I}, \, \big(\mathrm{res}^U_V\big)_{U \leq V} \Big)$$

Definition 9.14 *(Halm)*
Der induktive Limes des oben definierten Systems heißt der Halm der (Prä-)Garbe $\mathcal{F}$ im Punkt x Wir schreiben

$$\mathcal{F}_x \;=\; \varinjlim_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \to & \mathcal{F}_x \\ s & \mapsto & s_x \end{array}$$

Bemerkung 9.15 *Ist $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben auf dem topologischen Raum X und $x \in X$ ein Punkt, so erhalten wir einen Morphismus (Also eine Abbildung)*

$$f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$$

von Halmen. Genauer gilt sogar: Die Zuordnung $\mathcal{F} \mapsto \mathcal{F}_x$ zusammen mit $f \mapsto f_x$ bilden einen Funktor von der Kategorie der Prägarben (von Mengen / Gruppen / abelschen Gruppen / ...) in die Kategorie der Mengen / Gruppen / abelschen Gruppen / ...
Denn der induktive Limes $\varinjlim$ ist ein Funktor.
Konkret: *Sind ein Morphismus von Garben $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ und ein Punkt $x \in X$ gegeben, so definiere*

$$\mathcal{F}_x \;=\; \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U) \;\to\; \varinjlim_{x \in U} \mathcal{G}(U) \;\to\; \mathcal{G}_x$$

unter Zuhilfenahme der universellen Eigenschaft des induktiven Limes:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \varinjlim\limits_{x \in U} \mathcal{F}(U) \arrow[ddl, dashed, "\exists!"] \\
& \mathcal{G}(U) \arrow[d] & \\
& \varinjlim\limits_{x \in U} \mathcal{G}(U) &
\end{tikzcd}$$

Noch konkreter können wir auch für jedes $s \in \mathcal{F}_x$ offene Mengen $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und $s_U \in \mathcal{F}(U)$ finden, so dass $(s_U)_x = s$. Dann wird die gesuchte Abbildung durch die Zuordnung

$$s \mapsto f(U)(s_U)_x$$

gegeben.

Bemerkung 9.16 *Sei X ein topologischer Raum, $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X und $x \in X$ ein Punkt. Dann gelten*

- *Jedes Element von $\mathcal{F}_x$ hat die Form s_x wobei $s \mapsto s_x$ für ein $U \subseteq X$ offen mit $x \in U$ und $s \in \mathcal{F}(U)$ geeignet.*
- *Für $s \in \mathcal{F}(U)$ und $t \in \mathcal{F}(V)$ gilt genau dann $s_x = t_x$, wenn es ein offenes $W \subseteq V \cap U$ mit $x \in W$ und $s_{|W} = t_{|W}$ gibt.*

Satz 9.17 *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ Prägarben auf X sowie $f : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben.*

(1) *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, dann sind die folgenden Punkte äquivalent:*

- **(i)** *Für alle $U \subseteq X$ offen ist $f(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ injektiv.*
- **(ii)** *Für alle Punkte $x \subseteq X$ ist $f_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ injektiv.*

(2) *Sind $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ Garben, dann gilt* **(1)** *entsprechend mit „bijektiv" anstelle von „injektiv".*

Beweis. Zu **(1)** betrachte für $U \subseteq X$ offen die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{F}(U) & \to & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \\ s & \mapsto & (s_x)_{x\in U} \end{array}$$

Behauptung Die oben definierte Abbildung ist injektiv, weil $\mathcal{F}$ eine Garbe ist.

Begründung. Seien $s, t \in \mathcal{F}(U)$ mit $s_x = t_x$ für alle $x \in U$, dann gibt es für alle $x \in U$ eine offene Menge $V_x \subseteq U$ mit $x \in V_x$ und $s_{|V_x} = t_{|V_x}$. Diese Mengen V_x bilden eine offene Überdeckung von U und damit gilt $s = t$ nach dem ersten Garbenaxiom aus Definition 9.5. $\diamond$

Betrachte nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "f(U)"'] & \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \arrow[d, hook] \\ \mathcal{G}(U) \arrow[r] & \prod_{x\in U} \mathcal{G}_x \end{tikzcd}$$

Wir sehen, dass damit „**(ii)** $\Rightarrow$ **(i)**" folgt.

Für den Nachweis der Gegenrichtung betrachte ein $x \in X$ und $f, s \in \mathcal{F}_x$ mit $f_x(s) = f_x(t)$ in $\mathcal{G}_x$. Wir müssen diesmal zeigen, dass bereits $s = t$ in $\mathcal{F}_x$ gilt.

Es gibt offene Mengen $U, V \subseteq X$ mit $x \in V \cap U$ sowie $s_U \in \mathcal{F}(U)$ und $t_V \in \mathcal{F}(V)$, so dass

$$(s_U)_x = s \quad \text{und} \quad (t_V)_x = t$$

gelten. Damit erhalten wir sofort

$$f(U)(s_U)_x = f_x(s) = f_x(t) = f(V)(t_v)_x$$

Also existiert nach der vorangegangen Bemerkung ein $W \subseteq U \cap V$ mit $x \in W$ und $f(V)(t_V)_{|W} = F(U)(s_U)_{|W}$. Wir dürfen die Restriktionsabbildung auf $\mathcal{F}(W)$ mit f vertauschen und erhalten so

$$f(W)(s_{U|W}) = f(V)(t_V)_{|W} = F(U)(s_U)_{|W} = f(W)(t_{V|W})$$

Da aber $f(W)$ nach Voraussetzung injektiv ist, muss also $s_{U|W} = t_{V|W}$ gelten. Damit erhalten wir aber

$$s = (S_U)_x = (t_V)_x = t$$

Zu **(2)** Ist $f(U)$ bijektiv, für alle offenen Mengen $U \subseteq X$, so ist f ein Isomorphismus von Garben. Wegen der Funktorialität von $f \mapsto f_x$ sind dann auch alle $\mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ bijektiv. Wir müssen also nurnoch die andere Behauptungsrichtung zeigen. Dafür genügt es aber zu Zeigen: Wenn f_x für alle

$x \in X$ bijektiv ist, dann ist $f(U)$ für alle $U \subseteq X$ offen surjektiv, denn die injektivität gilt bereits nach **(1)**.
Sei also $s \in \mathcal{G}(U)$. Für alle $x \in U$ sei $t_x \in \mathcal{F}_x$ mit $f_x(t_x) = s_x$. Um zu zeigen, dass $f(U)$ surjektiv ist, müssen wir ein Urbild t zu den t_x finden. Wir wissen: Zu jedem $x \in U$ gibt es eine Umgebung $V_x \subseteq U$ von x mit $\tilde{t}_x \in \mathcal{F}(V_x)$ derart, dass $t_x = (\tilde{t}_x)_x$ ist. Dann gilt aber doch für alle $x \in U$

$$f(V_x)(\tilde{t}_x)_x \;=\; f_x(t_x) \;=\; s_x$$

Damit gibt es zu jedem $x \in U$ eine (eventuell noch kleinere) offene Umgebung $W_x \subseteq V_x$ mit $x \in W_x$ und

$$f(V_x)(\tilde{t}_x)_{|W_x} \;=\; s_{|W_x}$$

und die W_x überdecken U. Damit verkleben sich die Elemente $\tilde{t}_{x|W_x} \in \mathcal{F}(W_x)$ zu einem globalen $t \in \mathcal{F}(U)$, denn

$$\tilde{t}_{x|W_x \cap W_y} \;=\; \tilde{t}_{y|W_x \cap W_y}$$

da die Abbildungen $f(W_x \cap W_y)$ injektiv sind nach Voraussetzung und

$$f(W_x \cap W_y)(\tilde{t}_{x|W_x \cap W_y}) \;=\; s_{W_x \cap W_y} \;=\; f(W_x \cap W_y)(\tilde{t}_{y|W_x \cap W_y})$$

gilt. Es bleibt nun zu zeigen, dass dieses t ein Urbild von s ist, dies folgt aber aus dem ersten Garbenaxiom vom Definition 9.5 für $\mathcal{G}$, denn

$$f(U)(t)_{|W_x} \;=\; f(W_x)(t_{W_x}) \;=\; f(W_x)(\tilde{t}_{x|W_x}) \;=\; s_{|W_x}$$

□

Folgerung 9.18 *Mit den obigen Bezeichnungen für X, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ und f gilt:*
Falls $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ die Garbenaxiome erfüllen und falls $g : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein weiterer Morphismus von Garben ist, so ist genau dann $f = g$, wenn für alle $x \in X$ die Gleichung $f_x = g_x$ erfüllt ist.

Beweis. Dass unter der Voraussetzung $f = g$ für alle $x \in X$ gilt $f_x = g_x$ ist klar, interessant ist die Gegenrichtung. Wir haben im Beweis zum vorangegangenen Satz das folgende Diagramm bereits gesehen:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d] & \prod\limits_{x \in U} \mathcal{F}_x \arrow[d] \\
\mathcal{G}(U) \arrow[r, hook] & \prod\limits_{x \in U} \mathcal{G}_x
\end{tikzcd}$$

Und damit folgt die Aussage sofort. □

Garbifizierung

Satz 9.19 *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Garbe $\widetilde{\mathcal{F}}$ zusammen mit einem Morphismus*

$$\iota_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \;\to\; \widetilde{\mathcal{F}}$$

von Prägarben, so dass für jede Garbe $\mathcal{G}$ zusammen mit einem Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägraben ein eindeutiger Morphismus $\psi : \widetilde{\mathcal{F}} \to \mathcal{G}$ von Garben existert, so dass das folgende Diagramm kommutiert.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[rr, "\iota_{\mathcal{F}}"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[dl, dashed, "\psi"] \\ & \mathcal{G} & \end{tikzcd}$$

So dass also $\psi \circ \iota_{\mathcal{F}} = \varphi$ ist. Weiterhin gelten

(1) *Für alle $x \in X$ ist $\iota_{\mathcal{F},x} : \mathcal{F}_x \to \widetilde{\mathcal{F}}_x$ bijektiv.*

(2) *Für alle Morphismen $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ von Prägarben gibt es einen eindeutig bestimmten Morphismus $\widetilde{\varphi} : \widetilde{\mathcal{F}} \to \widetilde{\mathcal{G}}$ von Garben, so dass das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "\iota_{\mathcal{G}}"] \\ \widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{\mathcal{G}} \end{tikzcd}$$

kommutiert. Insbesondere ist die Zuordnung $\mathcal{F} \mapsto \widetilde{\mathcal{F}}$ ein Funktor von Prägarben nach Garben.

Beweis. Wir konstruieren nun zunächst die Garbe $\widetilde{\mathcal{F}}$ und den Morphismus $\iota_{\mathcal{F}}$ zur gegebenen Prägarbe $\mathcal{F}$. Setze dazu für $U \subseteq X$ offen

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U) \;:=\; \left\{ (s_x)_{x\in U} \;\in\; \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall\, x \in U \;\; \exists\, V \subseteq U \text{ offen mit } x \in V \\ \exists\, t \in \mathcal{F}(V)\; \forall z \in V \;:\;\; s_z = t_z \end{array} \right\} \tag{9.2}$$

Weiter sei für offene Teilmengen $U' \subseteq U \subseteq X$ die Restriktionsabbildung

$$\mathrm{res}^U_{U'} : \widetilde{\mathcal{F}}(U) \;\to\; \widetilde{\mathcal{F}}(U')$$

durch die Projektionen $(s_x)_{x\in U} \;\mapsto\; (s_x)_{x\in U'}$ gegeben.

Behauptung *$\widetilde{\mathcal{F}}$ ist eine Garbe.*

Beweisskizze. Das erste Garbenaxiom ist klar, denn für $(s_x)_{x\in U}$, $(s'_x)_{x\in U} \in \widetilde{\mathcal{F}}(U)$ mit

$$(s_x)_{x\in U|U'} \;=\; (s'_x)_{x\in U|U'}$$

gilt $s_x = s'_x$ für alle $x \in U'$. Für den Nachweis des zweiten Garbenaxioms seien für $i \in I$ offenen Mengen $U_i \in X$ gegeben und sei U die Vereinigung dieser U_i. Seien weiter $(s_{i,x})_{x\in U_i} \in \widetilde{\mathcal{F}}(U_i)$ mit

$$s_{i,x} \;=\; s_{j,x} \quad \text{für alle } x \in U_i \cap U_j$$

Dann ist

$$(s_x)_{x\in U} \;\in\; \prod_{x\in U} \mathcal{F}_x$$

und die Bedingung in Gleichung (9.2) lässt sich lokal auf den U_i überprüfen. $\diamond$

Wir wollen nun $\iota_{\mathcal{F}}$ definieren. Sei dazu $U \subseteq X$ offen und $s \in \mathcal{F}(U)$, dann setze

$$\iota_{\mathcal{F}(U)}(s) \;\; := \;\; (s_x)_{x \in U}$$

dann ist $\iota_{\mathcal{F}}$ der gewünschte Morphismus. (Die Wohldefiniertheit ist klar.)
Zur Hauptaussage des Satzes fehlt nun nur noch die universelle Eigenschaft. Wir werden aber zunächst die beiden Zusaätze beweisen, da anschließend die universelle Eigenschaft leicht folgt.

zu (1) Der Morphismus $\iota_{\mathcal{F}} : \mathcal{F} \to \widetilde{\mathcal{F}}$ induzoert eine Abbildung $\iota_{\mathcal{F}.x} : \mathcal{F}_x \to \widetilde{\mathcal{F}}_x$. Diese ist

- **injektiv**, denn seien $s, t \in \mathcal{F}_x$ mit gleichem Bild in $\widetilde{\mathcal{F}}_x$, dann gibt es eine offene Umgebung $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und $s_u, t_u \in \mathcal{F}(U)$ derart, dass

  $$s \;=\; (s_U)_x \quad \text{und} \quad t \;=\; (t_U)_x$$

  gelten. dann gilt aber doch

  $$\iota_{\mathcal{F}(U)}(s_U) \;\;=\;\; \iota_{\mathcal{F}(U)}(t_U)$$

  damit erhalten wir, dass dann schon $s = (s_U)_x = (t_u)_x = t$ gilt.
- **surjektiv**, denn nimm ein Element aus dem Halm und finde ein Urbild, wie beim Nachrechnen des zweiten Garbenaxioms für die obige Behauptung.

zu (2) Definiere die Abbildung $\widetilde{\varphi}(U) : \widetilde{\mathcal{F}}(U) \to \widetilde{\mathcal{G}}(U)$ durch die Zuordnung

$$(s_x)_{x \in U} \;\; \mapsto \;\; \big(\varphi_x(s_x)\big)_{x \in U}$$

Es ist leicht zu sehen, dass die so definierte Abbildung $\widetilde{\varphi}$ ein Morphismus von Garben ist. Die Eindeutigkeit folgt sofort mit **(1)** und Folgerung 9.18.

Wir wollen nun die universelle Eigenschaft beweisen. Seien dazu eine Garbe $\mathcal{G}$ und ein Morphismus $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ gegeben. Wei $\mathcal{G}$ bereits eine Garbe ist, gelten $\widetilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G}$ und $\iota_{\mathcal{G}} = id_{\mathcal{G}}$. Betrachte das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\iota_{\mathcal{F}}"'] & \mathcal{G} \arrow[d, "id_{\mathcal{G}}"] \\
\widetilde{\mathcal{F}} \arrow[r, dashed, "\widetilde{\varphi}"'] & \widetilde{\mathcal{G}}
\end{tikzcd}$$

Mit den Zusätzen gilt dann, dass $\psi := (id_{\mathcal{G}})^{-1} \circ \widetilde{\varphi}$ die gesuchte eindeutig bestimmte Abbildung ist. $\square$

Beispiel 40 *(Konstante Garben)*
Sei X ein topologischer Raum, E eine Menge und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe mit $\mathcal{F}(U) := E$ für alle offenen Mengen $U \subseteq X$ und den Einschränkungsabbildungen

$$\text{res}_V^U \;=\; id_E \quad \text{für } V \subseteq U \subseteq X \text{ offen}$$

Diese Konstruktion ist im Allgemeinen keine Garbe, denn gibt es disjunkte offene Teilmengen $U, V \subseteq X$, dann lassen sich die Elemente $e \in \mathcal{F}(U)$ und $e' \in \mathcal{F}(V)$ mit $e \neq e'$ nicht zu einem Schnitt verkleben.

Sei $\widetilde{\mathcal{F}}$ die Garbifizierung.

Definition Wir nennen $\widetilde{\mathcal{F}}$ die konstante Garbe auch X mit Wert E und schreiben dafür auch $\underline{E}$ oder $\underline{E}_X$.

Es gilt konkret

$$\widetilde{\mathcal{F}}(U) \;=\; \underline{E}(U) \;=\; \left\{\, f : U \to E \,\middle|\, f \text{ ist lokal Konstant} \,\right\}$$

Beispiel 41 *Man benutzt die Garbifizierung um Konstruktionen für Mengen, Gruppen, Ringe oder Moduln auf Garben zu übertragen.*

- *Sei $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ etwa ein Morphismus von Garben, so setze*

  $$\mathcal{H}(U) \;:=\; \operatorname{Im}\Big(\, \mathcal{F}(U) \xrightarrow{\varphi(U)} \mathcal{G}(U)\Big)$$

  Dann ist $\mathcal{H}$ eine Prägarbe (im Allgemeinen aber keine Garbe). Sei nun aber $\widetilde{\mathcal{H}}$ die Garbifizierung von $\mathcal{H}$, dann setze

  $$\operatorname{Im}(\varphi) \;:=\; \widetilde{\mathcal{H}}$$

  Es kann gezeigt werden (und in den Übungen haben wir dies auszugsweise getan), dass das so definierte $\operatorname{Im}(\varphi)$ *tatsächlich die erwarteten Eigenschaften des Bildes hat.*

- *Für Garben von R-Moduln über einem Ring R können auf ähnliche Weise die Konstruktionen Tensorprodukt ($\otimes$), direkter Limes ($\varinjlim$), direkte Summe ($\bigoplus$), etc. übertragen werden.*

Direktes und inverses Bild von Garben unter stetigen Abbildungen

In diesem Unterabschnitt seien X, Y, Z stets topologische Räume, $\mathcal{F}$ bezeichne immer eine Prägarbe auf X und $f : X \to Y$ sowie $g : Y \to Z$ seien stetige Abbildunen.

Definition und Bemerkung 9.20 *(direktes Bild einer Garbe)*
Wir bezeichnen die Prägarbe $f_* \mathcal{F}$, die durch

$$\big(f_* \mathcal{F}\big)(V) \;:=\; \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) \qquad \text{für offene Mengen } V \in Y$$

sowie

$$\operatorname{res}_V^{V'} \;:=\; \operatorname{res}_{f^{-1}(V)}^{f^{-1}(V')} \qquad \text{für offene Mengen } V' \subseteq V \in Y$$

auf Y beschrieben wird, als das direkte Bild der Prägarbe $\mathcal{F}$ unter f. Es gelten:

1. *Ist $\mathcal{F}$ eine Garbe, so ist auch das direkte Bild $f_* \mathcal{F}$ von $\mathcal{F}$ eine Garbe.*

2. *Die Konastruktion ist Funktoriell in $\mathcal{F}$, das heißt ist $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ ein Morphismus von Prägarben, so ist auch*

   $$f_* \varphi : f_* \mathcal{F} \;\to\; f_* \mathcal{G}$$

   ein Morphismus von Prägarben, denn für $V \subseteq Y$ offen gilt

   $$\begin{tikzcd} \big(f_* \mathcal{F}\big)(V) \arrow[r, "f_*(\varphi)"] \arrow[d, equal] & \big(f_* \mathcal{G}\big)(V) \arrow[d, equal] \\ \mathcal{F}\left(f^{-1}(V)\right) \arrow[r, "\varphi\left(f^{-1}(V)\right)"'] & \mathcal{G}\left(f^{-1}(V)\right) \end{tikzcd}$$

   Die Verträglichkeit mit Kompositionierung und Identität ist leicht zu sehen.

3. *Es gilt*
$$g_*(f_* \mathcal{F}) \;=\; (g \circ f)_* \mathcal{F}$$

Beispiel 42 *Sei mit $\{pt\}$ der topologische Raum bezeichnet, der nur aus einem Punkt besteht, und sei $f : X \to \{pt\}$ stetig. Der Einpunktraum hat nur zwei offene Mengen, nämlich $\varnothing$ und $\{pt\}$. Die leere Menge ist für die Betrachtung mit Garben nicht interessant, identifiziere daher eine Garbe $\mathcal{G}$ auf $\{pt\}$ mit der Menge $\mathcal{G}(\{pt\})$. Dann gilt für Garben $\mathcal{F}$ auf X*

$$f_* \mathcal{F} \;\hat{=}\; \big(f_* \mathcal{F}\big)(\{pt\}) \;=\; \mathcal{F}(X)$$

Definition und Bemerkung 9.21 *(Inverses Bild einer Garbe)*
Sei $\mathcal{G}$ eine Prägarbe auf Y, dann definieren wir eine Prägarbe $\mathcal{F}$ auf X durch

$$\mathcal{F}(U) \;:=\; \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ offen} \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V) \qquad \text{für offene Mengen } U \subseteq X \qquad (*)$$

wobei der direkte Limes bezüglich der Restriktionsabbildungen von $\mathcal{G}$ und der Halbordnung ($V' \geq V$, falls $f(U) \subseteq V' \subseteq V$) genommen werde. Sei $\widetilde{\mathcal{F}}$ die Garbifizierung von $\mathcal{F}$, dann heißt $f^{-1}\mathcal{G} \;:=\; \widetilde{\mathcal{F}}$ das inverse Bild von $\mathcal{G}$ unter f. Es gelten

1. *Selbst wenn $\mathcal{G}$ eine Garbe ist, ist $\mathcal{F}$ nach Konstruktion $(*)$ nicht notwendig eine Garbe.*

2. *Genau wie $\cdot_*$ funktoriell in $\mathcal{F}$ ist, ist auch $\cdot^{-1}$ funktoriell in $\mathcal{G}$.*

3. *Ist $\mathcal{H}$ eine Garbe auf Z, so gilt*
$$f^{-1}\big(g^{-1}(\mathcal{H})\big) \;\cong\; (f \circ g)^{-1}(\mathcal{H})$$
Und diese Isomorphie wird durch die universellen Eigenschaften der direkten Limites bestimmt.

10 Lokal geringte Räume

Ziel dieses Abschnittes ist die Verallgemeinerung des Begriffs des Raums mit Funktionen auf eine Weise, die auf alle Spektren von Ringen „anwendbar“ ist. Wir wollen uns zwei wichtige Eigenschaften von Räumen mit Funktionen noch einmal vergegenwärtigen und dabei bereits versuchen, sie in die neue Terminologie der Garben zu übersetzen:

(1) Mit der Garbenterminologie ist ein Raum mit Funktionen über einem Körper K ein topologischer Raum mit einer Garbe $\mathcal{O}_X$ auf X, so dass

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_x \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathrm{Abb}(U,K) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_X(U') \arrow[r, hook] & \mathrm{Abb}(U',K) \end{tikzcd}$$

für alle offenen Mengen $U' \subseteq U \subseteq X$ kommutiert.

(2) Ein Morphismus von Räumen mit Funktionen $(X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ ist gegeben durch

- Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den Räumen.
- Die Verkettung von Elementen aus $\mathcal{O}_Y$ mit f induziert einen Morphismus den wir in der neuen Terminologie als $\mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ beschreiben.

Sind A und B Ringe, so sollen Morphismen von $\operatorname{Spec} A$ nach $\operatorname{Spec} B$ im Sinne der noch zu definierenden Struktur bijektiv den Ringhomomorphismen von B nach A entsprechen.

Definition 10.1 *(Geringter Raum, Morphismen von geringten Räumen)*
Ein geringter Raum ist ein Paar $(X, \mathcal{O}_X)$ wobei X ein topologischer Raum und $\mathcal{O}_X$ eine Garbe von Ringen auch X ist.

Ein Morphismus $X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ von geringten Räumen ist gegeben durch

- *Eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zwischen den Räumen.*
- *Einen Garbenhomomorphismus $f^b : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$*

In diesem Zusammenhang heißt $\mathcal{O}_x$ auch die Strukturgarbe von $(X, \mathcal{O}_X)$ und anstelle des Tupels schreiben wir, wie bei ähnlichen Strukturen ebenso üblich, oft auch nur X.

Bemerkung 10.2 *Wir erhalten die Kategorie der geringten Räume.*

Beweis. Wir können Morphismen verketten, denn für Morphismen geringter Räume

$$(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f} (Y\, \mathcal{O}_Y) \xrightarrow{g} (Z, \mathcal{O}_Z)$$

gibt es Ringhomomorphismen

$$f^b : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X \quad \text{und} \quad g^b : \mathcal{O}_Z \to g_* \mathcal{O}_Y$$

und es gilt

$$\mathcal{O}_z \xrightarrow{g^b} g_* \mathcal{O}_Y \xrightarrow{g_* f^b} g_*(f_* \mathcal{O}_X) \;=\; (g \circ f)_* \mathcal{O}_X$$

Damit ist $g \circ f$ zusammen mit $(g_* f^b) \circ g^b$ ein Morphismus geringter Räume von $X, \mathcal{O}_X)$ nach $(Z, \mathcal{O}_Z)$.

$\square$

Definition und Bemerkung 10.3 *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus geeringter Räume und ist $x \in X$ ein Punkt, so setze $y := f(x)$. Sei nun $V \subseteq Y$ eine offene Umgebung von y, so erhalte*

$$\mathcal{O}_Y(V) \stackrel{f^b(V)}{\longrightarrow} \mathcal{O}_X\left(f^{-1}(V)\right) \to \mathcal{O}_{X,x}$$

Durch Übergang zum direkten Limes also

$$\mathcal{O}_{Y,y} \;=\; \varinjlim_{\substack{V \subseteq Y \text{ offen} \\ y \in V}} \mathcal{O}_Y(V) \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}$$

Für die so erhaltene Abbildung schreiben wir

$$f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}$$

Beispiel 43 *Ist X eine Prävarietät, so können wir $(X, \mathcal{O}_X)$ als geringten Raum auffassen. Ist $x \in X$ ein Punkt, so können wir den Halm als Teilmenge des rationalen Funktionenkörpers $K(X)$ explizit beschreiben als*

$$\mathcal{O}_{X,x} \;=\; \left\{\, f \,\middle|\, f \text{ ist auf einer Umgebung von } x \text{ definiert} \,\right\}$$

Für eine affine Varietät $U \subseteq X$ mit $x \in U$ gilt genauer sogar

$$\mathcal{O}_{X,x} \;=\; \left\{ \frac{g}{h} \,\middle|\, g, h \in \Gamma(U) \;\wedge\; h(x) \neq 0 \right\} \;=\; \Gamma(U)_{\mathfrak{m}_x}$$

Sei $f : U \to V$ ein Morphismus affiner Varietäten, dann gilt mit der vorangegangenen Bemerkung die Abbildung

$$\Gamma(U)_{\mathfrak{m}_{f(x)}} \;=\; \mathcal{O}_{V,f(x)} \;\stackrel{f_x^\sharp}{\longrightarrow}\; \mathcal{O}_{U,x} \;=\; \Gamma(U)_{\mathfrak{m}_x}$$

- *ist gegen durch die Verkettung $s \;\mapsto\; s \circ f$ wenn wir die Sichtweise der Funktionen einnehmen*
- *wird als Homomorphismus zwischen den Lokalisierungen vom Homomorphismus $\Gamma(V) \to \Gamma(U)$ induziert.*

In diesem Speziealfall treten Eigenschaften auf, die im Allgemeinen nicht zu erwarten sind

1. *Alle Halme $\mathcal{O}_{X,x}$ sind lokale Ringe (sie besitzen alse genau ein maximales Ideal).*
2. *Für alle Homomorphismen der Form $f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}$ gilt*

$$f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{f(x)}) \;\subseteq\; \mathfrak{m}_x$$

Wir nennen Homomorphismen von Lokalen Ringen mit dieser Eigenschaft (die also das Maximalideal des einen in das Maximalideal des anderen Rings abbilden) lokale Homomorphismen.

Im nächsten Schritt wollen wir unse Struktur so anpassen, dass Sie die beiden besonderen Eigenschaften aus dem Beispiel berücksichtigt.

Definition 10.4 *(Lokal geringter Raum)*
Ein lokal geringter Raum ist ein geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$ derart, dass für alle Punkte $x \in X$ der zugehörige Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein lokaler Ring ist.
Ein Morphismus von lokal geringten Räumen

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

ist ein Morphismus geringter Räume, also eine stetige Abbildung $f : X \to Y$ zusammen mit einem Ringhomomorphismus $f^b : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$, welcher zudem die Eigenschaft, dass für alle $x \in X$ der Homomorphismus

$$f_x^\sharp : \mathcal{O}_{Y,f(x)} \;\to\; \mathcal{O}_{X,x}$$

lokal ist, also

$$f_x^\sharp(\mathfrak{m}_{f(x)}) \;\subseteq\; \mathfrak{m}_x \qquad \text{bzw. äquivalent} \qquad \mathfrak{m}_{f(x)} \;=\; \left(f_x^\sharp\right)^{-1}(\mathfrak{m}_x)$$

gelten, erfüllt.

Bemerkung 10.5 *Dieser Morphismusbegriff erlaubt die Verkettung von Morphismen, wir erhalten also die Kategorie der lokal geringten Räume.*

Beweis. Analog zu Bemerkung 10.3.

Das Spektrum eines Rings als lokal geringter Raum

Sei A ein Ring und bezeichne $X := \operatorname{Spec} A$ das Primspektrum von A versehen mit der Zariskitopologie (Definition 7.4). Unser Ziel in diesem Abschnitt ist es eine Garbe $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}$ zu definieren, so dass $\operatorname{Spec} A$ mit dieser Garbe ein lokal geringter Raum wird.
Im affinen Fall (Y eine affine Varietät) haben wir die Beobachtung $\mathcal{O}_Y(D(f)) \;=\; \Gamma(Y)_f$ gemacht.
Aus dieser Beobachtung erhalten wir die Idee für den Definitionsansatz der gesuchten Garbe. Für alle $f \in A$ setzen wir:

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A}\left(D(f)\right) \;:=\; A_f$$

Damit haben wir auf der Basis $\mathcal{B} = \left\{D(f) \mid f \in A\right\}$ der Topologie und damit für alle offenen Mengen von $\operatorname{Spec} A$ eine Prägarbe definiert, sofern wir zeigen können, dass

1. $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}}$ wohldefiniert ist, das heißt für $D(f) = D(g)$ erhalten wir den gleichen Ring.

2. Restriktionsabbildungen existieren.

Wir wissen: Sind $f, g \in A$, so gilt

$$\begin{aligned} D(f) \;\subseteq\; D(g) \quad &\Leftrightarrow \quad V(f) \;\supseteq\; V(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \in \sqrt{(g)} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists\, n \in \mathbb{N} \;:\quad f^n \in (g) \;;\!\Leftrightarrow \quad \frac{g}{1} \in (A_f)^\times \end{aligned}$$

Dass $\frac{g}{1}$ eine Einheit in A_f ist, heißt aber nichts anderes, als dass die Abbildung von A nach A_f über A_g faktorisiert, also dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] & & A_f \\ & A_g \arrow[ur, dashed, "\rho_{f,g}"'] & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Dies können wir weiter fortsetzen zu einem kommutativen Diagramm für $f, g, h \in A$ mit $D(f) \subseteq D(g) \subseteq D(h)$ und erhalten

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] \arrow[dr] \arrow[dd] & & A_f \\ & A_g \arrow[ur, "\rho_{f,g}"] & \\ A_h \arrow[ur, "\rho_{g,h}"] \arrow[uurr, bend right, "\rho_{f,h}"'] & & \end{tikzcd}$$

Weiterhin gilt offensichtlich $\rho_{f,f} = id_{A_f}$ und damit gelten insgesamt:

1. Ist $D(f) = D(g)$ für Elemente $f, g \in A$, so erhalte natürliche Isomorphismen

$$\rho_{f,g} : A_g \xrightarrow{\sim} A_f$$
$$\rho_{g,f} : A_f \xrightarrow{\sim} A_g$$

   Damit ist der Definitionsansatz von Oben also wohldefiniert. (Formal gesehen reicht Isomorphie hier nicht aus, wir können aber

$$\mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}} := \{ A_g \mid D(g) \supseteq D(f) \} \cong A_f$$

   als Definition verwenden und erhalten eine kanonische Isomorphie zu unserem Ursprünglichen Ansatz.)

2. Für $D(f) \subseteq D(g)$ erhalten wir Restriktionsabbildungen aus

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(g)) \arrow[r, dashed] \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(f)) \arrow[d, equal] \\ A_g \arrow[r, "\rho_{f,g}"'] & A_f \end{tikzcd}$$

Wir wollen nun aus dieser Prägarbe zu der gesuchten Garbe kommen. Zeigen wir den folgenden

Satz 10.6 *Die Prägarbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}$ erfüllt die Garbenaxiome bzüglich Überdeckung „innerhalb von $\mathcal{B}$“, das heißt für Überdekungen der Form*

$$D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i) \qquad \text{mit } f_i, f \in A$$

dann erhalten wir mit Bemerkung 9.8 sofort die

Folgerung 10.7 *Es gibt eine eindeutig bestimmte Garbe $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}$ auf $\mathrm{Spec}\, A$ mit $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(f)) = A_f$ für $f \in A$ und den vorgegebenen Restriktionsabbildungen.*

Beweis des Satzes. Wir müssen die beiden Garbenaxiome für Überdekungen dieser speziellen Form zeigen. Da wir hier Garben von Ringen betrachten kÃ¶nnen wir diese etwas vereinfachen:

(1) Ist $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(f))$ mit $s_{|D(f_i)} = 0$ für alle $i \in I$, so ist auch $s = 0$.

(2) Sind $s_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(f_i))$ für $i \in I$ so gegeben, dass für alle $i, j \in I$ gilt

$$s_{i|D(f_i,g_i)} \;=\; s_{j|D(f_i,g_i)}$$

so gibt es ein $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(f))$ mit $s_{|D(f_i)} = s_i$ für alle $i \in I$.

Weil Mengen der Form $D(f)$ quasi-kompakt sind, können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Indexmenge I endlich ist.
Indem wir von A zur Lokalisierung von A nach f übergehen und $D(f)$ mit $\operatorname{Spec} A_f$ identifizieren können wir weiterhin ohne Einschränkung $f = 1$ und $D(f) = D(1) = \operatorname{Spec} A$ annehmen.
Nach diesen Reduktionen sind wir also in der Situation

$$\bigcup_{i=1}^{m} D(f_i) \;=\; \operatorname{Spec} A$$

also ist $(f_1, \ldots, f_m) = (1)$. Wegen $D(f_i) = D(f_i^n)$ gilt ebenfalls $(f_1^n, \ldots, f_m^n) = (1)$ und wir erhalten eine Zerlegung der Eins, etwa

$$\sum_{i=1}^{m} b_{i,n} f^n \;=\; 1 \qquad (*)$$

Für den Nachweis des ersten Garbenaxioms sei $s \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(1)) = A$ mit $\frac{s}{1} = 0$ in A_{f_i} für alle $i = 1, \ldots, m$. Nach der Äquivalenzrealtion für „Brüche“ in Lokalisierungen gibt es also für alle $i = 1, \ldots, m$ ein $n_i \in \mathbb{N}$ mit

$$f_i^{n_i}(s \cdot 1 - 0 \cdot 1) \;=\; f_i^{n_i} \cdot s \;=\; 0$$

wähle $n \geq \max\{n_1, \ldots, n_m\}$ dann gilt für $b_{i,n}$ wie in $(*)$ also

$$s \;=\; \Big(\sum_{i=1}^{m} b_{i,n} f_i^n\Big) \cdot s \;=\; \sum_{i=1}^{m} b_{i,n}\big(f_i^n \cdot s\big) \;=\; 0$$

Für den Nachweis des zweiten Garbenaxioms seien $s_i \in \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(f_i)) = A_{f_i}$ gegeben. Wähle ein $n \in \mathbb{N}$ aus, so dass wir für alle $i = 1, \ldots, m$ Elemente a_i erhalten mit

$$s_i \;=\; \frac{a_i}{f_i^n}$$

Nach Voraussetzung gibt es dann für alle $i, j \in \{1, \ldots, m\}$ ein $N_{i,j} \in \mathbb{N}$ mit

$$(f_i f_j)^{N_{i,j}} \cdot (f_j^n \cdot a_i - f_i^n \cdot a_j) \;=\; 0 \qquad (**)$$

Wähle nun wieder ein $N \geq \max_{i,j}\{N_{i,j}\}$, dann gilt

$$f_j^{n+N}(f_i^N a_i) \;=\; f_i^{n+N}(f_j^N a_j)$$

und somit ist

$$s_i = \frac{a_i}{f_i^n} = \frac{f_i^N a_i}{f_i^{n+N}}$$

Ersetze nun a_i durch $f_i^N a_i$ und n durch $n+N$, so gilt wieder

$$s_i = \frac{a_i}{f_i^n}$$

mit neuen a_i und n. Durch dieses Vorgehen kÃ¶nnen wir sukzessive durch Abändern der Ausgangsbrüche die Vorfaktoren in Gleichung $(**)$ weglassen und wir erhalten

$$f_i^n a_j = f_j^n a_i \qquad \text{für alle } i,j \in \{1,\ldots,m\}$$

Mit $b_{j,n}$ wie in $(*)$ setze

$$s := \sum_{j=1}^{m} b_{j,n} a_j$$

Dann gilt

$$\frac{s}{1} = s_i \qquad \text{in } A_{f_i} \text{ für alle } i = 1,\ldots,m$$

denn

$$f_i^n \cdot s = \sum_{j=1}^{m} b_{j,n} a_j f_i^n = a_i$$

$\square$

Wir haben nun eine Garbe von Ringen auf $\operatorname{Spec} A$ konstruiert, nun gilt es zu überprüfen, ob damit $\operatorname{Spec} A$, wie gewünscht, zu einem lokal geringten Raum geworden ist. Hierfür müssen wir die Halme der konstruierten Garbe betrachten:

Bemerkung 10.8 *Sei $x \in \operatorname{Spec} A$, dann korrespondiert der Punkt x zu einem Primideal $\wp_x \lhd A$ und es gilt*

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A,x}} &= \varinjlim_{\substack{U \subseteq \operatorname{Spec} A \text{ offen} \\ x \in U}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(U) \\
&= \varinjlim_{\substack{f \in A \\ x \in D(f)}} \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(D(f)) \\
&= \varinjlim_{f \in A \setminus \wp_x} A_f \cong A_{\wp_x}
\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}})$ ein lokal geringter Raum.

Definition 10.9 *(affines Schema)*
Ein affines Schema ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$, so dass ein Ring A existiert mit

$$(X, \mathcal{O}_X) \cong (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}})$$

Morphismen affiner Schemata sind Morphismen der entsprechenden lokal geringten Räume.

Wir erhalten die Kategorie (Aff) der affinen Schemata.

Anmerkung Wegen $A = \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(\operatorname{Spec} A) \cong \mathcal{O}_X(X)$ ist die Auswahl an möglichen Kandidaten für passende Ringe A zu gegebenen lokal geringten Räumen $(X, \mathcal{O}_X)$ begrenzt.

11 Funktorialität des Spectrums II

In diesem Abschnitt betrachten wir erneut die Funktorialität von Spec und wollen Zeigen, dass Spec ein (kontravarianter) Funktor von der Kategorie der Ringe in die Kategorie der lokal geringten Räume ist. Dabei gilt auf den Objekten der Kategorie der Ringe

$$A \quad \mapsto \quad (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}})$$

wie im vorangegangenen Abschnitt konstruiert. Was passiert aber auf den Morphismen der Kategorie der Ringe? Sei $\varphi : A \to B$ ein Ringhomomorphismus. Setze

$$f :=^a \varphi : \operatorname{Spec} B \ \to \ \operatorname{Spec} A$$

wobei $f(\mathfrak{q}) =^a \varphi(\mathfrak{q}) = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ die übliche zu φ assoziierte stetige Abbildung ist. Wir wollen nun $f^b : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}} \to f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}$ definieren. Dazu genügt es für alle $s \in A$ Homomorphismen

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}}(D(s)) \ \to \ \big(f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}\big)(D(s))$$

anzugeben, die mit den Restriktionsabbildungen verträglich sind. Weil

$$f^{-1}(D(s)) = D(\varphi(s)) \subseteq \operatorname{Spec} B$$

gilt, können wir die natürliche Abbildung, die von

$$\begin{array}{ccccccccc} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}}(D(s)) & = & A_s & \to & B_{\varphi(s)} & = & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(D(\varphi(s))) & = & \big(f_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}\big)(D(s)) \\ & & \dfrac{a}{s^n} & \mapsto & \dfrac{a}{\varphi(s)^n} & & & & \end{array}$$

induziert wird, verwenden. Insbesondere ist

$$A \quad = \quad \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}}(\operatorname{Spec} A) \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}(\operatorname{Spec} B) \quad = \quad B$$

dann wieder der ursprüngliche Ringhomomorphismus φ (Betrachte, um dies zu sehen, die obige Abbildung für $s = 1$). Damit erhalten wir einen Morphismus geringter Räume

$$(\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \quad \longrightarrow \quad (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}})$$

Betrachten wir nun das Verhalten des Funktors Spec auf Halmen:

Für $x \in \operatorname{Spec} B$ mit korrespondierendem Primideal $\wp_x \lhd B$ kommutiert das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}}(\operatorname{Spec} A) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec B}}(\operatorname{Spec} B) \arrow[d] \\ \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, f(x)} \arrow[r, "f_x^\sharp"'] & \mathcal{O}_{\operatorname{Spec B,x}} \end{tikzcd}$$

also, mit den obigen Ergebnissen umgeschrieben, kommutiert

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\wp_{f(x)}} \arrow[r] & B_{\wp_x} \end{tikzcd}$$

Weil nun $\wp_{f(x)} = \varphi^{-1}(\wp_x)$ ist, folgt, dass der Homomorphismus

$$A_{\wp_{f(x)}} \longrightarrow B_{\wp_x}$$

aus dem obigen Diagramm lokal ist. Also gilt die Funktoriealität von Spec wie behauptet.

Wir haben affine Schemata als eine spezielle Unterklasse von lokal geringten Räumen definiert. Wir bezeichnen diejenigen lokal geringten Räume $(X, \mathcal{O}_X)$ als affine Schemata, für die es einen Ring A mit

$$(X, \mathcal{O}_X) \;\cong\; (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}})$$

gibt. Dies legt eine Einschränkung des Bildbereichs unseres Funktors Spec auf die Kategorie (Aff) der affinen Schemata nahe und tatsächlich erhalten wir damit eine Äquivalenz von Kategorien, denn es gilt der folgende

Satz 11.1 *Die beiden Funktoren*

$$\begin{array}{ccc} \big(\text{Ringe}\big) & \xrightarrow{\operatorname{Spec}} & \big(Aff\big) \\ A & \mapsto & (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}}) \\ (A \xrightarrow{\varphi} B) & \mapsto & {}^a\varphi : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A \\ & & \varphi^b : \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}} \to {}^a\varphi_* \mathcal{O}_{\operatorname{Spec B}} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{ccc} \big(Aff\big) & \xrightarrow{\Gamma} & \big(\text{Ringe}\big) \\ (X, \mathcal{O}_X) & \mapsto & \mathcal{O}_X(X) \\ \big(X, \mathcal{O}_X\big) \xrightarrow{(f, f^b)} (Y, \mathcal{O}_Y) & \mapsto & \mathcal{O}_Y(Y) \xrightarrow{f^b(Y)} (f_* \mathcal{O}_X)(Y) \;=\; \mathcal{O}_X(X) \end{array}$$

sind zueinander quasi-inverse Äquivalenzen von Kategorien. Das heißt es gelten

- *Ist A ein Ring, so sind A und $\mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}}(\operatorname{Spec} A)$ als Ringe isomorph.*
- *Ist $(X, \mathcal{O}_X)$ ein affines Schema dann sind $(X, \mathcal{O}_X)$ und $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathcal{O}_X(X)})$ als lokal geringte Räume isomorph.*
- *Sind A, B Ringe, dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(A, B) & \to & \operatorname{Hom}\Big((\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec B}}),\ (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}})\Big) \\ \varphi & \mapsto & {}^a\varphi \end{array}$$

bijektiv mit der Umkehrabbildung

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}\big((\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec B}}),\ (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}})\big) & \to & \operatorname{Hom}(A, B) \\ ({}^a\varphi, \varphi^b) & \mapsto & \varphi^b(\operatorname{Spec} B) \end{array}$$

Beweis. Die Äquivalenzen auf den Objekten sind bereits im vorangegangenen Abschnitt gezeigt worden, es ist also nur noch die letzte Aussage über die Morphismen zu zeigen.
Ist $\varphi \in \operatorname{Hom}(A, B)$ ein Ringhomomorphismus, so ist $\Gamma({}^a\varphi) = \varphi$ nach Konstruktion des Funktors, diese Richtung war also leicht.
Sei nun $(f, f^b) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec B}}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec A}})$ ein Morphismus lokal geringter Räume, so ist

$${}^a\Gamma(f) \;=\; f \qquad\qquad (*)$$

zu zeigen. Sie dazu $\wp_x \lhd B$ ein Primideal korrespondierend zu einem $x \in \operatorname{Spec} B$, dann ist

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,A}}(\operatorname{Spec} A) \arrow[dr, equal] & & & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,B}}(\operatorname{Spec} B) \arrow[dl, equal] \\
& A \arrow[r, "f^b(\operatorname{Spec} A)"] \arrow[d] & B \arrow[d] & \\
& A_{\wp_{f(x)}} \arrow[r, "f_x^\sharp"'] \arrow[dl, equal] & B_{\wp_x} \arrow[dr, equal] & \\
\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A, f(x)} & & & \mathcal{O}_{\mathrm{Spec\,B,x}}
\end{tikzcd}$$

kommutativ und $f_x^\sharp$ ist ein lokaler Ringhomomorphismus, das heißt

$$(f_x^\sharp)^{-1}(\wp_x\, B_{\wp_x}) \;=\; \wp_{f(x)}\, A_{\wp_{f(x)}}$$

Schreibe $\varphi := \Gamma(f) = f^b(\operatorname{Spec} A)$ so folgt aus der lokalität von $f_x^\sharp$

$$\varphi^{-1}(\wp_x) \;=\; \wp_{f(x)}$$

Damit ist die Abbildung ${}^a\Gamma(f)$ eine stetige Abbildung topologischer Räume von $\operatorname{Spec} B$ nach $\operatorname{Spec} A$ und hat für die Halme die gewünschte Form

$$\wp \;\mapsto\; \varphi^{-1}(\wp)$$

Es bleibt zu zeigen, dass $(*)$ auch auf Garbenniveau richtig ist. Es genügt dafür eine Basis der Topologie zu betrachten. Wir wollen also zeigen, dass die Garbenmorphismen auf allen $D(s)$ mit $s \in A$ übereinstimmen. Betrachte dazu das kommutatigve Diagramm

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\
A_s \arrow[r, "\psi"'] & B_{\varphi(s)}
\end{tikzcd}$$

Den Morphismus ψ erhalten wir einerseits aus f^b und andererseits aus ${}^a\varphi$. In beiden Fällen kommutiert das Diagramm aber und dadurch ist ψ bereits eindeutig bestimmt. $\square$

Definition 11.2 *(affiner Raum)*
Sei R ein Ring, dann heißt

$$\mathbb{A}_R^n \;:=\; \operatorname{Spec} R[T_1, \ldots, T_n]$$

der affine Raum über R von relativer Dimension n.

Beispiel 44 *Mit der oben gezeigten Äquivalenz von Kategorien erhalten wir die Möglichkeit bestimmte Sachverhalte aus der Welt der Ringe in die die lokal geringten Räume zu übertragen: Sei A ein Ring und $X = \operatorname{Spec} A$*

(a) *Zu $f \in A$ erhalte den Ringhomomorphismus $A \to A_f$ und eine stetige Abbildung $\operatorname{Spec} A_f \to \operatorname{Spec} A$. Dies induziert einen Isomorphismus*

$$(\operatorname{Spec} A_f, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A_f}) \xrightarrow{\sim} \big(D(f), \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A|D(f)}\big)$$

von lokal geringten Räumen.

(b) *Zu einem Ideal $\mathfrak{a} \lhd A$ erhalte Ringhomomorphismus und stetige Abbildung*

$$A \twoheadrightarrow A/\mathfrak{a} \quad \text{und dazu} \quad \operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \to \operatorname{Spec} A$$

Auf topologischen Räumen ist dieser Morphismus ein Homöomorphismus

$$\operatorname{Spec} A/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} V(\mathfrak{a})$$

Mittels dieses Homöomorphismus können wir $\mathrm{V}(\mathfrak{a})$ mit einer Garbe von Ringen versehen und so auch die abgeschlossenen Menge $V(\mathfrak{a})$ als affines Schema begreifen.

Beispiel 45 *Im Gegensatz zu dem vorangegangen Beispiel wollen wir mit diesem Beispiel zeigen, dass sich der mühsame Übergang zu den affinen Schemata wirklich lohnt, da wir in dieser Kategorie oft mehr Informationen über die zu betrachtenden Objekte haben.*
Sei B ein Ring und $\mathfrak{b} \lhd B$ ein Ideal. Die Abgeschlossenen Teilmengen

$$V(\mathfrak{b}),\ V(\mathfrak{b}^2),\ V(\mathfrak{b}^3),\ \ldots$$

sind (als topologische Räume) alle gleich[2]*. Die affinen Schemata*

$$V(\mathfrak{b}^n) \;\cong\; \operatorname{Spec} B/\mathfrak{b}^n \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

*die wir nach Beispiel **44.b** aus diesen Räumen erzeugen können, sind es im Allgemeinen nicht.*

Konkret I *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A := k[T]$, so betrachte*

$$\operatorname{Spec} k \;=\; \operatorname{Spec} k[T]/(T) \qquad \text{und} \qquad \operatorname{Spec} k[T]/(T^n) \quad \text{für } n \in \mathbb{N}_{>1}$$

Bei den topologischen Räumen können wir, da sie alle aus einem Punkt bestehen, keinen Unterschied sehen. Betrachten wir aber die Garben von Ringen, die wir in der Kategorie der affinen Schemata zur verfügung haben, so gilt: Die „Funktionen“ auf

- $\operatorname{Spec} k$ *sind die konstanten Funktionen* $\widehat{=}$ *Funktionswert bei* 0
- $\operatorname{Spec} k[T]/(T^n)$ *sind die Polynome vom Grad* $n-1$ $\widehat{=}$ *Funktionswert bei* 0 *sowie die erste bis* $n-1$*-te Ableitung der Funktion bei* 0.

Heuristisch stellen wir uns $\operatorname{Spec} k[T]/(T^n)$ als infinitesimal verdickten Punkt vor, so dass wir, analytisch gesprochen, Grenzwertprozesse wie Ableitungen betrachten können.

[2] Denn wegen der Primidealeigenschaft gilt für ein Primideal $\wp$ und $n \in \mathbb{N}$: $\mathfrak{b} \subseteq \wp \Leftrightarrow \mathfrak{b}^n \subseteq \wp$.

Konkret II *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper und $A := k[T, S]$ betrachte zwei Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b} \lhd k[T, S]$. Es gilt*

$$V(\mathfrak{a}) \cap V(\mathfrak{b}) \;=\; V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$$

als topologische Räume. Nach Beispiel ***44.b*** *konstruiere ein affines Schema*

$$V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \;\cong\; \operatorname{Spec} k[T, S]/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$$

Wir können nun zwischen verschiedenen Situationen unterscheiden.

Schnittpunkte: *Seien beispielsweise $\mathfrak{a} = (T)$ und $\mathfrak{b} = (S)$ so ist*

$$V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \;\cong\; \operatorname{Spec} k[T, S]/(T, S) \;=\; \operatorname{Spec} k$$

der Schnittpunkt der S- und T-Achsen in der affinen Ebene.

Berührpunkte: *Seien beispielsweise $\mathfrak{a} = (S - T^2)$ und $\mathfrak{b} = (S)$ so ist*

$$V(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}) \;\cong\; \operatorname{Spec} k[T, S]/(S - T^2, S) \;=\; \operatorname{Spec} k[T]/(T^2)$$

der Berührpunkt der Normalparabel mit der S-Achse.

Wir haben in beiden Fällen wieder nur einpunktige topologische Räume, die affinen Schemata erhalten aber die unterschiedliche Art und Weise der geometrischen Konstruktion.

Notation 11.3 *Sei X ein topologischer Raum und $\mathcal{F}$ eine Prägarbe auf X. Ist $U \subseteq X$ offen so schreiben wir*

$$\Gamma(U, \mathcal{F}) \;=\; \mathcal{F}(U)$$

Kapitel III

Schemata

Am Ende des ersten Kapitels haben wir gesehen, dass die Möglichkeiten bei der Arbeit mit Varietäten und Räumen mit Funktionen begrenzt sind, und haben begonnen die Theorie zu erweitern. Wir erinnern an dieser Stelle noch einmal an die geplante Erweiterung der Begriffe

Varietäten	**Schemata**
$\{$ irreduzible affine algebraische Mengen $\}$	$\{$Primspektren von Ringen$\}$
$\Vert \wr$	$\Vert \wr$
$\{$ integre, endl. erz. k-Algebren $\}$	$\{$Ringe$\}$
$\Vert \wr$	$\Vert \wr$
$\{$ affine Varietäten $\}$	$\{$affine Schemata$\}$
$\cap$	$\cap$
$\{$ Prävarietät $\}$	$\{$Schemata$\}$
$\cap$	$\cap$
$\{$ Räume mit Funktionen über k $\}$	$\{$geringte Räume$\}$
X topol. Raum und Funktionenfamilie $\mathcal{O}_X(U)$ für offene Teilmengen $U \subseteq X$	X topol. Raum und Ring $\mathcal{O}_X(U)$ für offene Teilmengen $U \subseteq X$

12 Definitionen

Definition 12.1 *(Schema)*
Ein Schema ist ein lokal geringter Raum $(X, \mathcal{O}_X)$*, so dass eine offene Überdeckung*

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

existiert, derart dass alle $(U_i, \mathcal{O}_{U_i})$ *affine Schemata sind.*

Anmerkung Im Vergleich zur analogen Konstruktion der Prävrietäten fordern wir hier nicht, dass die Überdekung endlich sei. Daher sind Schemata im Allgemeinen nicht quasi-kompakt, nicht irreduzibel, nicht zusammenhängend, . . .

Definition 12.2 *(Morphismen von Schemata)*
Ein Morphismus von Schemata ist ein Morphismus der lokal geringten Räume.

Definition und Bemerkung 12.3 *(Kategorie der Schemata)*
Da dieser Morphismusbegriff wie gesehen Verkettung zulässt erhalten wir auch hier eine Kategorie, wir bezeichnen die Kategorie der Schemata mit (Sch).

Erinnerung Zu einem festen Ring R haben wir in der kommutativen Algebra für einen Ring A die Begriffe R-Algebra sein und Ringhomomorphismus $R \to A$ sein miteinander identifiziert. Mit dieser Auffassung ist dann ein R-Algebra Homomorphismus ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr] & & B \\ & R \arrow[ul] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

von Ringhomomorphismen. Diese Betrachtungsweise können wir auch auf Schemata anwenden. Da der wichtige Funktor aus dem letzten Kapitel kontravariant ist, drehen wir auch hierbei die Pfeile um und erhalten:

Definition und Bemerkung 12.4 *(S-Schema)*
Sei S ein Schema. Ein S-Schema ist ein Morphismus $X \to S$ von Schemata. Ein Morphismus von S-Schemata

$$\big(X \xrightarrow{f} S\big) \longrightarrow \big(Y \xrightarrow{g} S\big)$$

ist ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr] \arrow[dr, "f"'] & & Y \arrow[dl, "g"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

Hieraus erhalten wir die Kategorie $(Sch/_S)$ der S-Schemata.

13 offene Unterschemata

Definition und Bemerkung 13.1 *(offenes Unterschema)*
Sei X ein Schema und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge des topologischen Raums. Dann ist $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ebenfalls ein Schema. Schemata dieser Form heißen offene Unterschemata von X und die Inklusion

$$j : U \hookrightarrow X$$

ist ein Morphismus von Schemata.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ein Schema ist. Sei dazu

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

eine offene Überdeckung durch affine Schemata, dann ist für alle $i \in I$ die Menge $U \cap U_i \subseteq U_i$ offen und lässt sich durch ausgezeichnete offene Teilmengen (der Form $D(s)$) von U_i überdecken. Diese sind mit Einschränkungen von $\mathcal{O}_{U_i}$ affine Schemata nach Beispiel **44.a**. Damit haben wir insgesamt eine Überdeckung von U durch affine Schemata gefunden.

Wir wollen nun zeigen, dass die Inklusion ein Morphismus von Schemata ist. Die benötigte Abbildung j^b ist hierbei gegeben durch

$$\mathcal{O}_X(V) \xrightarrow{\text{res}} \mathcal{O}_X(U \cap V) = (j_* \mathcal{O}_U)(V)$$

für offene Mengen $V \subseteq X$. □

Definition 13.2 *(affine offene Teilmenge)*
Sei X ein Schema und $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge des topologischen Raums. Ist das offene Unterschema $(U, \mathcal{O}_{X|U})$ ein affines Schema, so heißt U eine affine offene Teilmenge von X.
Entsprechend heißt eine Überdeckung von X durch solche affinen offenen Teilmengen eine affine offene Überdeckung von X.

Bemerkung 13.3 *Ist X ein Schema, dann bilden die affinen offenen Teilmengen von X eine Basis der Topologie.*

* Die Vorlesung 24. wurde in Vertretung gehalten von Dr. Christian Kappen.

Lemma 13.4 *Sei A ein Ring dann bezeichne $X = \operatorname{Spec} A$ das zugehörige affine Schema. Sei $U \subseteq X$ eine ausgezeichnete offene Teilmenge in X, das heißt von der Form $D_X(f)$ für ein $f \in A$. Sei weiter $U \subseteq V$ eine ausgezeichnete offene Teilmenge in U, das heißt von der Form $D_U(g)$ für ein $g \in A_f$. Dann ist V auch eine ausgezeichnete offene Teilmenge von X.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass ein $h \in A$ existiert mit $D_X(h) = V$. Wir haben bereits $V = D_U(g)$ für ein $g \in A_f$. wähle nun ein $\tilde{h} \in A$ mit

$$g = \frac{\tilde{h}}{f^n}$$

dann ist

$$V = D_X(f) \cap D_X(h) = D_X(f\tilde{h})$$

damit ist $h := f\tilde{h} \in A$ das gesuchte Element. □

Lemma 13.5 *Sei X ein Schema und seien $U, V \subseteq X$ offene affine Teilmengen von X, dann gilt:*
Für alle $x \in U \cap V$ gibt es eine offene Umgebung $x \in W \subseteq V \cap U$ derart, dass W eine ausgezeichnete offene (also insbesondere eine offene affine) Teilmenge ist.

Beweis. Die ausgezeichneten offenen Mengen von V bilden eine Basis der Topologie auf V und $U \cap V \subseteq V$ ist offen. Demnach gibt es eine ausgezeichnete offene Teilmenge $V' \subseteq V \cap U$ mit $x \in V'$.
Nach dem vorangegangen Lemma 13.4 dürfen wir also V durch V' ersetzen und ohne Einschränkung annehmen, dass $V \subseteq U$ gilt.
Die ausgezeichneten offenen Mengen von U bilden eine Basis der Topologie auf U, damit gibt es ein $f \in \mathcal{O}_{X|U}(U) = \Gamma(U, \mathcal{O}_{X|U})$ mit $D_U(f) \subseteq V$ und $x \in D_U(f)$.
In dieser Situation genügt es nun zu zeigen, dass $D_U(f) \subseteq V$ eine in V ausgezeichnete offene Teilmenge ist. Es gilt nun

$$D_U(f) = D_V(f_{|V})$$

wobei $f_{|V} \in \mathcal{O}_{X|V}(V)$ die Restriktion von f nach V ist. □

Definition und Bemerkung 13.6 *Sei X ein Schema und $x \in X$ ein Punkt.*

- *Wähle eine offene affine Umgebung $U \subseteq X$ von x. Es ist $U = \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A und die Abbildung*

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "j_x"] & \operatorname{Spec} A = U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

  die durch die Restriktion $\mathcal{O}_{X,x} \xleftarrow{\text{res}} \mathcal{O}_X(U) = A$ gegeben ist, unabhängig vom gewählten U.

  Denn Sei U' eine weitere offene Umgebung von x, dann können wir ohne Einschränkung annehmen, dass $U' \subseteq U$ gilt und das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\text{res}"'] \arrow[rr, bend left, "\text{res}"] & \mathcal{O}_X(U') \arrow[r, "\text{res}"'] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

  kommutiert. $\diamond$

- *Sei y ein abgeschlossener Punkt in $\operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x}$, dann gilt*

$$j_x(y) \quad = \quad x$$

  Denn das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "\text{res}"] \arrow[d, "\wr"'] & \mathcal{O}_{X,x} \arrow[d, "\wr"] \\ A \arrow[r, "loc"'] & A_{\wp_x} \end{tikzcd}$$

  mit $loc^{-1}(\wp_x A_{\wp_x}) \; = \; \wp_x$ kommutiert. $\diamond$

- *Definiere den Restklassenkörper von x als*

$$\kappa(x) \quad := \quad \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$$

  Die kanonische Abbildung $\mathcal{O}_{X,x} \to \kappa(x)$ korrespondiert zu

$$\begin{aligned} can : \operatorname{Spec} \kappa(x) \quad &\to \quad \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \\ pt \quad &\mapsto \quad \text{abges. } pt \end{aligned}$$

  Zusammen mit der Abbildung j_x aus dem ersten Punkt erhalten wir damit eine Abbildung

$$\begin{tikzcd} i_x : \operatorname{Spec} \kappa(x) \arrow[r, "can"] & \operatorname{Spec} \mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "j_x"] & X \\ pt \arrow[rr, mapsto] & & x \end{tikzcd}$$

Satz 13.7 *Seien X ein Schema und K ein Körper. Die kanonische Abbildung*

$$\begin{aligned} \left\{ (x,\iota) \,\middle|\, x \in X \wedge \iota : \kappa(x) \hookrightarrow K \text{ Körperhom.} \right\} \quad &\to \quad \operatorname{Hom}(\operatorname{Spec} K, X) \\ (x,\iota) \quad &\mapsto \quad i_x \circ \operatorname{Spec}(\operatorname{Im} \iota) \end{aligned}$$

ist bijektiv.

Beweis. Sei $f : \operatorname{Spec} K \to X$ gegeben. Setze $x := f(pt)$, dann ist die Abbildung f_x^b mit

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,x} \arrow[r, "f_x^b"] \arrow[d] & K \\
\kappa(x) \arrow[ur, hook, "\iota"'] &
\end{tikzcd}$$

die gesuchte Umkehrabbildung. Zum Nachweis dieser Behauptung wollen wir auf offenen affinen Umgebungen von x arbeiten. Dies ist möglich nach

Lemma *Seien X, Y Schemata, $U \subseteq X$ offen und $f : Y \to X$ ein Morphismus von Schemata mit $f(Y) \subseteq U$. Dann faktorisiert f eindeutig über $Y \to U \subseteq X$.* $\diamond$

In der affinen Situation ist $X = \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A und es ist

$$\left\{A \to K\right\} \xrightarrow{\sim} \left\{ (x, \iota) \,\middle|\, \wp_x \lhd A \text{ prim } \wedge \iota : A_{\wp_x} / \wp_x A_{\wp_x} \to K \right\}$$

und damit folgt die Aussage aus dem Homomorphiesatz. $\square$

14 Verklebesätze

Verkleben von Morphismen und Morphismen in affine Schemata

Satz 14.1 *(Verklebesatz für Morphismen)*
Seien X, Y lokal geringte Räume. Dann wird durch die Zuordnung

$$U \;\mapsto\; \mathrm{Hom}(U, Y) \qquad \text{für } U \subset X \text{ offen} \qquad\qquad (*)$$

eine Garbe von Mengen auf X beschrieben. Hierbei bezeichne $\mathrm{Hom}(\cdot,\cdot)$ die Menge der Morphismen von lokal geringten Räumen. Das heißt ist

$$X \;=\; \bigcup_{i\in I} U_i$$

eine offene Überdeckung von X, so gelten die Garbenaxiome

(1) *Seien $\varphi, \psi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ mit $\varphi_{|U_i} = \psi_{|U_i}$ für alle $i \in I$, so gilt bereits $\varphi = \psi$.*

(2) *Seien für $i \in I$ Morphismen $\varphi_i \in \mathrm{Hom}(U_i, X)$ so gegeben, dass für alle $i, j \in I$*

$$\varphi_{i|U_i\cap U_j} \;=\; \varphi_{j|U_i\cap U_j}$$

gilt, dann existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(X, Y)$ mit $\varphi_i = \varphi_{|U_i}$.

Beweis. Für offene Mengen $V \subseteq U \subseteq X$ erhalten wir die Restriktionsabbildungen

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{res}^U_V : \mathrm{Hom}(U, Y) & \to & \mathrm{Hom}(V, Y) \\ \varphi & \mapsto & \varphi_{|V} \end{array}$$

geschenkt, da wir einschränkung von Funktionen gut verstehen. Damit ist klar, dass wir mit $(*)$ eine Prägarbe definiert haben. Der rest des Beweises erfolgt Stufenweise. Führe die Konstruktion zunächst für Mengen X, Y durch (in diesem Fall ist die Garbeneigenschaft trivial). Anschließend beweise die Garbeneigenschaft für topologische Räume X, Y (dies ist leicht möglich da Stetigkeit eine lokale Eigenschaft ist). Zum Schluss betrachte lokal geringte Räume X, Y. Auch in desem Fall ist der Nachweis der Garbeneigenschaft nicht schwer, da der Morphismus von Garben

$$\varphi_* \mathcal{O}_Y \;\longrightarrow\; \mathcal{O}_X$$

lokal auf X definiert werden kann, da $\mathcal{O}_X$ eine Garbe ist.

Satz 14.2 *Sei X ein lokal geringter Raum und sei A ein Ring. Bezeichne $Y = \mathrm{Spec}\, A$ das zugehörige affine Schema, dann ist die natürliche Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} \Phi :\ \mathrm{Hom}\Big((X, \mathcal{O}_X),\ (Y, \mathcal{O}_Y)\Big) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)\big) \\ (f, f^b) & \mapsto & f^b(Y) \end{array}$$

bijektiv. (Wir haben bereits gezeigt, dass $\mathcal{O}_Y(Y) = A$ gilt.)

Beweis I [*Für den Fall, dass X ein Schema ist*]
Wähle eine offene affine Überdeckung

$$X \;=\; \bigcup_{i\in I} U_i$$

von X. Wir wissen mit Satz 11.1 bereits, dass die Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}\Big((U_i, \mathcal{O}_{X|U_i}),\, (Y, \mathcal{O}_Y)\Big) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_{X|U_i}(U_i)\big) \\ (f_i, f_i^b) & \mapsto & f_i^b(Y) \end{array}$$

für $i \in I$ bijektiv sind. Die Behauptung ist also insbesondere für den Fall, dass X selber affin ist, bereits gezeigt. Für $i, j \in I$ und eine offene affine Teilmenge $V \subseteq U_i \cap U_j$ ist das kanonische Diagramm

$$\begin{tikzcd} \operatorname{Hom}\Big((U_i, \mathcal{O}_{X|U_i}),\, (Y, \mathcal{O}_Y)\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \operatorname{Hom}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_{X|U_i}(U_i)\big) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ \operatorname{Hom}\Big((U_i\cap U_j, \mathcal{O}_{X|U_i\cap U_j}),\, (Y, \mathcal{O}_Y)\Big) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{res}"'] & \operatorname{Hom}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_{X|U_i\cap U_j}(U_i\cap U_j)\big) \arrow[d, "\mathrm{res}"] \\ \operatorname{Hom}(V, Y) \arrow[r] & \operatorname{Hom}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_{X|V}(V)\big) \end{tikzcd}$$

bijektiv. Damit folgt die Behauptung aus dem Verklebungssatz für Morphismen 14.1, denn

- Φ ist injektiv: Für $(f, f^b), (g, g^b)$ mit $f^b(Y) = g^b(Y)$ gilt wegen

  $$f^b_{|U_i}(Y)(h) \;=\; f^b(Y)(h) \;=\; g^b(Y)(h) \;=\; g^b_{|U_i}(Y)(h) \quad \text{für } h \in \mathcal{O}_Y(Y) = A$$

  die Gleichheit

  $$f^b_{|U_i}(Y) \;=\; g^b_{|U_i}(Y)$$

  und damit gilt aber bereits $f_{|U_i} = g_{|U_i}$ für alle $i \in I$, was $f = g$ impliziert.

- Φ ist surjektiv, der Beweis verläuft analog mit obigen Diagramm. □

Beweis II [*Für den allgemeinen Fall*]
Wir wollen zeigen, dass die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} \Phi:\ \operatorname{Hom}\Big((X, \mathcal{O}_X),\, (Y, \mathcal{O}_Y)\Big) & \longrightarrow & \operatorname{Hom}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)\big) \\ (f, f^b) & \mapsto & f^b(Y) \end{array}$$

bijektiv ist. In diesem allgemeinen Fall können wir keine offene affine Überdeckung für X benutzen, daher konstruieren wir eine Umkehrabbildung Ψ zu Φ. Sei also $\varphi : \mathcal{O}_Y(Y) \to \mathcal{O}_X(X)$ ein Ringhomomorphismus, dann definiere

$$f:\ X \longrightarrow Y \quad \text{durch} \quad x \;\mapsto\; \varphi^{-1}\Big(\operatorname{Ker}\big(\mathcal{O}_X(X) \to \kappa(x)\big)\Big)$$

wobei

$$\kappa(x) \; := \; {}^{\mathcal{O}_{X,x}}\!/\!_{\mathfrak{m}_x}$$

den Restklassenkörper des Halms von x bezeichne. Es wird sinvoll sein, dem in der Definition von f verwendeten Kern einen Namen zu geben, da wie ihn im Beweis oft brauchen werden. Wir führen also die Bezeichnung

$$\wp(x) \; := \; \operatorname{Ker}\big(\mathcal{O}_X(X) \to \kappa(x)\big) \; \lhd \mathcal{O}_X(X)$$

ein. Die so definierte Abbildung f ist stetig, denn für $g \in \mathcal{O}_Y(Y)$ gilt

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(D(g)\big) \; &= \; \big\{\, x \in X \,\big|\, f(x) \in D(g) \,\big\} \; = \; \big\{\, x \in X \,\big|\, g \notin \varphi^{-1}(\wp(x)) \,\big\} \\ &= \; \big\{\, x \in X \,\big|\, \varphi(g)(x) \neq 0 \,\big\} \end{aligned}$$

Hierbei bezeichne $\varphi(g)(x) \in \kappa(x)$ das Bild von $\varphi(g)$ unter

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_X(X) & \to & \mathcal{O}_{X,x} & \to & \kappa(x) \\ s & \mapsto & s_x & \mapsto & s(x) \end{array}$$

Die Menge $f^{-1}\big(D(g)\big)$ ist also offen, da aus $\varphi(g)(x) \neq 0$ folgt, dass $\varphi(g)_x$ eine Einheit im Halm von x ist. Damit gibt es aber (nach Konstruktion als Limes) eine offene Menge $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und

$$\varphi(g)_{|U} \; \in \; \mathcal{O}_X(U)^{\times}$$

Dann ist aber auch $\varphi(g)(y) \neq 0$ für alle $y \in U$ und somit

$$U \; \subseteq \; f^{-1}\big(D(f)\big)$$

Definiere nun $f^b : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$. Es genügt dazu f^b auf den ausgezeichneten offenen Mengen zu definieren Wegen $\mathcal{O}_Y(Y) = A$ betrachte das Diagramm für $g \in A$

$$\begin{tikzcd} A_g \arrow[r, "f^b(D(g))"] & \mathcal{O}_X\left(f^{-1}(D(g))\right) \\ A \arrow[u] \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[u, "\mathrm{res}"'] \end{tikzcd}$$

Nach obiger Rechnung gilt: $\mathrm{res}(\varphi(g))$ ist eine Einheit von $\mathcal{O}_X\left(f^{-1}(D(g))\right)$ und es gebit genau ein ein $f^b(D(g))$, so dass das Diagramm kommutiert.
Wir haben nun einen Morphismus

$$(f, f^b) : \; (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$$

von geringten Räumen konstruiert. Dieser ist lokal, denn für $x \in X$ mit $y = f(x)$ gib es ein $h_y \in \mathcal{O}_{Y,y}$ derart, dass dass Bild von h_y in $\kappa(y)$ Null ist. h_y ein Urbild in $\mathcal{O}_Y(Y)$. Es gibt ein $g \in A$, so dass $h \in \mathcal{O}_Y(D(g)) \; = \; A_g$ ist. Wir finden also ein $h' \in A$ mit $h = \frac{h'}{g^n}$. Auch h' wird in $\kappa(y)$ auf Null abgebildet, also ist

$$\varphi(h') \; \in \; \wp(x) \qquad \text{und damit} \qquad \varphi(h')_x \; \in \; \mathfrak{m}_x$$

Erhalte

$$\frac{\varphi(h')_x}{\varphi(g)_x^n} \; = \; \varphi\left(\frac{h'}{g^n}\right) \; = \; f^b(D(g))(h) \; \in \; \mathfrak{m}_x$$

Wir haben nun eine wohldefinierte Abbildung

$$\Psi : \operatorname{Hom}\big(\mathcal{O}_Y(Y), \mathcal{O}_X(X)\big) \longrightarrow \operatorname{Hom}\Big((X, \mathcal{O}_X), (Y, \mathcal{O}_Y)\Big)$$

konstruiert. Wir müssen noch zeigen, dass dies eine Umkehrabbildung zu Φ ist. Es ist dabei bereits klar, dass $\Phi \circ \Psi = id$ ist, denn genau so haben wir Ψ konstruiert. Für die andere Reihenfolge sei ein Morphismus (f, f^b) gegeben. Setze

$$\varphi := \Phi\big((f, f^b)\big) = f^b(Y)$$

Für $x \in X$ setze wieder $y := f(x)$ und erhalte ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{O}_X(X) \arrow[d] \\ A_{\wp_y} \arrow[r, "f^b(Y)"'] & \mathcal{O}_{X,x} \end{tikzcd}$$

Dann gilt $\wp_y = \varphi^{-1}\big(\wp(x)\big)$ und damit ist $f = \Psi(\varphi)$ als Abbildung topologischer Räume. Andererseits haben wir nach der vorangegangenen Konstruktion auch $\varphi_{\wp_y} : A_{\wp_y} \to \mathcal{O}_{X,x}$ so, dass das voranstehende Diagramm kommutiert. Damit folgt $f^b(Y) = \varphi_{\wp_y}$ und somit insgesamt $(f, f^b) = \Psi(\varphi)$. $\square$

Verkleben von Schemata

Definition 14.3 *(Verklebedatum von Schemata)*
Ein Verklebedatum von Schemata ist

- *eine Indexmenge I*
- *für alle $i \in I$ ein Schema U_i*
- *für alle $(i, j) \in I^2$ ein offenes Unterschema $U_{i,j} \subseteq U_i$*
- *für alle $(i, j) \in I^2$ ein Isomorphismus*

$$\varphi_{i,j} : U_{i,j} \xrightarrow{\sim} U_{j,i}$$

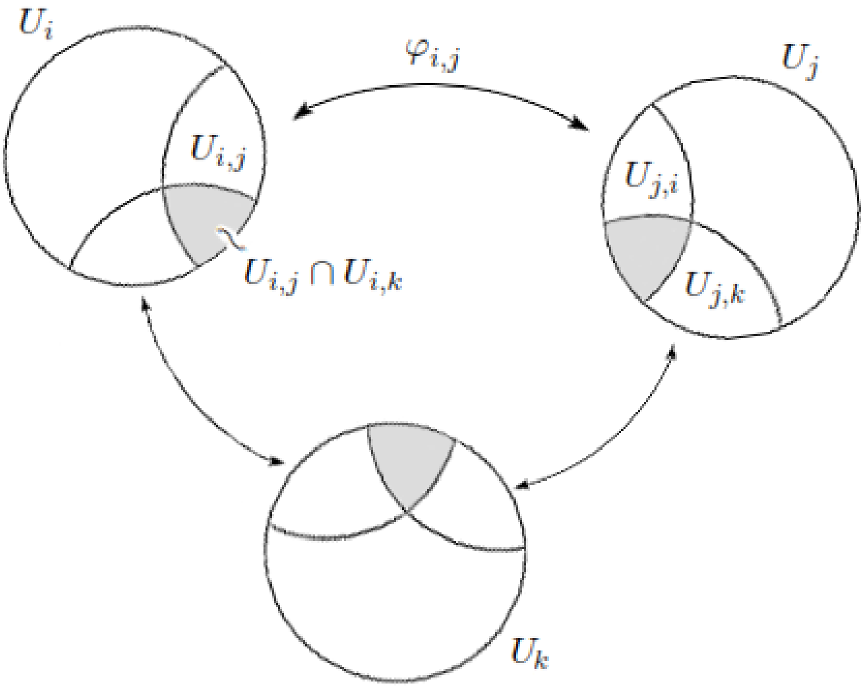
so dass gelten

(a) $U_{i,i} = U_i$ *für alle* $i \in I$

(b) *Für alle $(i, j, k) \in I^3$ gilt: Der Isomorphismus $\varphi_{i,j}$ beschränkt sich zu einem Isomorphismus*

$$\varphi_{i,j}^{(k)} : U_{i,j} \cap U_{i,k} \xrightarrow{\sim} U_{j,i} \cap U_{j,k}$$

mit $\varphi_{i,k}^{(j)} = \varphi_{j,k}^{(i)} \circ \varphi_{i,j}^{(k)}$.
Diese Eigenschaft nennen wir auch die Kozykelbedingung.



Grafische Darstellung der Kozykelbedingung

Satz 14.4 *(Verklebesatz für Schemata)*
Sei ein Verklebedatum nach Definition 14.3 gegeben, dann gibt es ein Schema X mit Morphismen

$$\psi_i : U_i \longrightarrow X$$

mit

- *Für alle $i \in I$ ist ψ ein Isomorphismus auf das offene Unterschema $\psi(U_i)$ von X.*
- *Die offenen Unterschemata $\psi_i(U_i)$ bilden eine offene Überdeckung von X.*
- *Für alle $i, j \in I$ gilt $\psi_j \circ \varphi_{i,j} \ = \ \psi_i$.*
- *Für alle $i, j \in I$ gilt $\psi_j(U_j) \cap \psi_i(U_i) \ = \ \psi_i(U_{ij}) \ = \ \psi_j(U_{ji})$.*

Diese Eigenschaften bestimmten das Tupel $\big(X, (\psi_i)_{i \in I}\big)$ bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig.

Beweis. Es sind ähnlich wie bei Übungsaufgabe 4 von 4. Blatt (Konstruktion topologischer Räume durch verkeleben) zwei Dinge zu zeigen.
Eindeutigkeit Der Verklebesatz für Morphismen 14.1 zeigt, dass das Tupel $\big(X, (\psi_i)_{i \in I}\big)$ die folgende universelle Eigenschaft besitzt:
Sei T ein weiteres Schema, dass zusammen mit Morphismen $\psi_i' : U_i \to T$ die obigen Eigenschaften erfüllt, dann gibt es einen eindeutig bestimmten Isomorphismus $\xi : X \to T$ mit $\xi \circ \psi_i = \psi_i'$ für alle $i \in I$. Mit anderen Worten: Das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\exists!\, \xi"] & & T \\ & U_i \arrow[ul, "\psi_i"] \arrow[ur, "\psi_i'"'] & \end{tikzcd}$$

Existenz Definiere auf dem Coprodukt der U_i eine Äquivalenzrelation wie folgt: Zwei Elemente $x_i \in U_i$ und $x_j \in U_j$ stehen genau dann in Relation $\sim$, wir schreiben $x_i \sim x_j$, wenn gelten

- $x_i \in U_{ij}$
- $x_j \in U_{ji}$
- $\varphi_{i,j}(x_i) = x_j$

Mithilfe der Kozykelbedingung lässt sich nachrechnen, dass diese Relation tatsächlich reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. Setze

$$X \ := \ \left(\coprod_{i \in I} U_i\right)\big/\sim$$

Für alle $i \in I$ gibt es eine kanonische Abbildung

$$\psi_i : U_i \xrightarrow{\iota} \coprod_{i \in I} U_i \xrightarrow{\pi} \left(\coprod_{i \in I} U_i\right)\big/\sim \ = \ X$$

Versehe nun X mit der feinsten Topologie, derart dass all diese ψ_i stetig sind. Dann sind die Abbildungen ψ_i Isomorphismen auf ihre offenen Bilder (Begründung analog zur Übungsaufgabe) und erfüllen die im Satz geforderten Bedingungen. Wir müssen nun noch eine Garbe von Ringen definieren, so dass wir X als ein Schema auffassen können. Definiere dazu $\mathcal{O}_X$ auf offenen Teilmengen $U \subseteq \psi_i(U_i)$ durch

$$\mathcal{O}_X(U) \ := \ \mathcal{O}_{U_i}\left(\psi_i^{-1}(U)\right)$$

Für offene Teilmengen $U \subseteq \psi_i(U_i) \cap \psi_j(U_j)$ identifiziere die Ringe $\mathcal{O}_{U_i}\left(\psi_i^{-1}(U)\right)$ und $\mathcal{O}_{U_j}\left(\psi_i^{-1}(U)\right)$ mittels $\varphi_{i,j}$. Die Wohldefiniertheit folgt auch hier wieder aus der Kozykelbedingung. Für beliebige $U \subseteq X$ offen wähle eine Überdeckung von U durch $(V_j)_{j \in J}$ mit

$$V_j \ \subseteq \ \psi_{i(j)}\big(U_{i(j)}\big)$$

und setze

$$\mathcal{O}_X(U) \ := \ \operatorname{Ker}\Big(\prod_{j \in J} \mathcal{O}_X(V_j) \rightrightarrows \prod_{j,j' \in J} \mathcal{O}_X(V_j \cap V_{j'})\Big)$$

$\square$

Beispiel 46 *(Disjunkte Vereinigung / Coprodukt von Schemata)*
Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie von Schemata mit

$$U_{ii} \ := \ U_i \quad \text{und} \quad U_{ij} \ := \ \varnothing$$

für alle $i, j \in I$ dann haben wir ein vollständiges Verklebedatum für Schemata und das Ergebnis dieses Verklebens bezeichnen wir mir

$$\coprod_{i \in I} U_i$$

da dieses verklebte Schema die universelle Eigenschaft der Coproduktes in der Kategorie der Schemata besitzt.

Beispiel 47 *(Vereinigung von zwei Schemata)*
Seien U_1, U_2 Schemata und $U_{12} \subseteq U_1$ sowie $U_{21} \subseteq U_2$ je offene Unterschemata. Sei weiter

$$\varphi : U_{12} \xrightarrow{\sim} U_{21}$$

ein Isomorphismus, dann erhalten wir ein vollständiges Verklebedatum, da alle Anforderungen an Verträglichkeit automatisch erfüllt sind.

Konkret *Sei k ein Körper. Dann seien*

$$U_1 := \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[T] \quad \text{und} \quad U_2 := \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[S]$$

Setze weiter

$$\begin{array}{rcll} U_{12} & := & D(T) & \left(\cong \operatorname{Spec} k[T]_T \right) \\ U_{21} & := & D(S) & \left(\cong \operatorname{Spec} k[S]_S \right) \end{array}$$

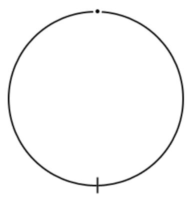
Wir haben nun die Möglichkeit zwischen verschiedenen Isomorphismen zwischen U_{12} und U_{21} zu wählen:

(i) *Wenn wir nach dem Isomorphismus $U_{12} \xrightarrow{\sim} U_{21}$, welcher durch*

$$\begin{array}{rcl} k[S]_S & \to & k[T]_T \\ S & \mapsto & T \end{array}$$

induziert wird, verkleben, so erhalten wir die „affine Gerade mit verdoppeltem Ursprung“. Dieses Schema verhält sich nicht gutartig. Zum Beispiel haben Folgen, die gegen den Ursprung konvergieren, keinen eindeutigen Grenzwert mehr. Es lässt sich zeigen, dass dieses Schema nicht affin ist.

(ii) *Wenn wir nach dem Isomorphismus $U_{12} \xrightarrow{\sim} U_{21}$, welcher durch*



$$\begin{array}{rcl} k[S]_S & \to & k[T]_T \\ S & \mapsto & T^{-1} \end{array}$$

induziert wird, verkleben, so erhalten wir eine Verallgemeinerung der projektiven Geraden. Wir können uns das Schema als eine zu einem Kreis gebogene Gerade vorstellen, wobei wir den Zusätzlichen Punkt benutzen um die $-\infty$ und ∞ Enden zu verkleben.

Das zweite Beispiel wollen wir nun auf beliebige Dimension verallgemeinern um den projektiven Raum zu konstruieren.

15 Der projektive Raum

Bei Prävarietäten haben wir $\mathbb{P}^n(k)$ über einem algebraisch abgeschlossenem Körper k als

$$\mathbb{P}^n(k) \quad := \quad {k^{n+1} \setminus \{0\}}\big/_{k^\times}$$

konstruiert. Eine solche direkte Beschreibung ist im Fall von allgemeinen Ringen nicht möglich, stattdessen werden wir auf die soeben erabeitete Technik des Verklebens von Schemata zurückgreifen.

Sei R ein Ring und sei $n \geq 0$. Für $i = 0, \ldots, n$ setze

$$U_i \;:=\; \mathbb{A}^n_R \;=\; \operatorname{Spec} R\Big[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\Big]$$

Diese Setzung ist wohldefiniert, denn es ist

$$\begin{aligned} R[T_1, \ldots, T_n] \;&\cong\; R\Big[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\Big] \;\subseteq\; R[X_0, \ldots, X_n]_{X_0 \cdots X_n} \\ &=\; R[X_0, X_0^{-1}, \ldots, X_n, X_n^{-1}] \;=:\; \widetilde{R} \end{aligned}$$

Weiter setze für alle $i, j \in \{0, \ldots, n\}$

$$U_{ij} \;:=\; \begin{cases} D\Big(\frac{X_j}{X_i}\Big) & \text{falls } i \neq j \\ D(1) \;=\; U_i & \text{falls } i = j \end{cases}$$

Zu diesen seien Isomorphismen $\varphi_{ji} : U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$ gegeben durch

$$R\Big[\frac{X_0}{X_j}, \ldots, \frac{X_n}{X_j}\Big]_{\frac{X_i}{X_j}} \;\xrightarrow{=}\; R\Big[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\Big]_{\frac{X_j}{X_i}}$$

Da beide Seiten genau den selben Unterring von $\widetilde{R}$ beschreiben ist die Abbildung genau die Identität. Mit der Identität als Grundlage der Isomorphismen φ_{ji} ist die Kozykelbedingung trivialerweise Erfüllt.

Definition 15.1 *(Der projektive Raum)*
Das Schema, dass wir aus dem obigen Verklebedatum durch Verkleben erhalten, nennen wir den projektiven Raum der relativen Dimension n über R. Wir bezeichnen dieses Schema mit $\mathbb{P}^n_R$.

Bemerkung 15.2 *Der projektive Raum $\mathbb{P}^n_R$ ist in natürlicher Weise ein* Spec *R-Schema (im Sinne von Definition 12.4), das heißt es gibt einen Morphismus*

$$\mathbb{P}^n_R \;\longrightarrow\; \operatorname{Spec} R$$

dieser wird durch verkleben aus den Morhismen

$$U_i \;\longrightarrow\; \operatorname{Spec} R$$

gebildet. Es gilt: Der Induzierte Ringhomomorphismus

$$R \;\longrightarrow\; \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}(\mathbb{P}^n_R)$$

ist ein Isomorphismus.
Insbesondere folgt für $n \geq 1$ und $R \neq 0$, dass $\mathbb{P}^n_R$ nicht affin ist.

Beweis. Nur zum Insbesondere, den Hauptteil lassen wir als Übungsaufgabe.
Wäre $\mathbb{P}^n_R$ für $n \geq 1$ und $R \neq 0$ affin, so gülte $\mathbb{P}^n_R \cong \operatorname{Spec} R$. Dies kann aber nicht sein, da jedes U_i (wegen $n \geq 1$ gibt es mindestens 2) bereits das Spektrum eines Polynomrings in n-Variablen enthält. $\square$

Nullstellenschema homogener Polynome

In desem Abschnitt wollen wir die analoge Konstruktion zu den V_+-Mengen in $\mathbb{P}^n(k)$ finden. Sei dazu $\mathcal{M} \subseteq R[X_0, \ldots, X_n]$ eine Menge homogener Polynome, dann setze

$$I \;:=\; (\mathcal{M}) \;\trianglelefteq\; R[X_0, \ldots, X_x]$$

Wir wollen nun das Schema $V_+(I)$ zusammen mit $\eta : V_+(I) \to \mathbb{P}^n_R$ zu dem von $\mathcal{M}$ erzeugten Ideal konstruieren.
Bezeichne ϕ_i die Dehomogenisierungsabbildung bezüglich X_i, also

$$\begin{aligned} \phi_i : R[X_0, \ldots, X_n]_d &\to R\Big[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\Big] \\ f &\mapsto X_i^{-d} \cdot f \end{aligned}$$

(Vergleiche Lemma 5.5 ff.)

Beispiel 48

$$\phi_0\big(X_0X_1 + X_2^2\big) \;=\; X_0^{-2} \cdot (X_0X_1 + X_2^2) \;=\; \frac{X_1}{X_0} + \Big(\frac{X_2}{X_0}\Big)^2$$

Da wir die Dehomogenisierung nur auf homogenen Polynomen defineirt haben setzen wir nun

$$\phi_i(I) \;:=\; \big\{\, \phi_i(f) \,\big|\, f \in I \text{ homogen } \big\} \;\subseteq\; R\Big[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\Big]$$

und damit definieren wir $V_i := V\big(\phi_i(I)\big) \subseteq U_i$ im Schema-Sinne, das heißt

$$V_i \;\cong\; \operatorname{Spec}{}^{\textstyle[}R\Big[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\Big]\Big/\big(\phi_i(I)\big) \qquad (=: \operatorname{Spec} \widehat{R}_i)$$

Weiter bezeichne

$$V_{ij} \;:=\; D\Big(\frac{X_j}{X_i}\Big) \qquad \text{(bezüglich des Rings } \widehat{R}_i)$$

Die Verklebeabbildungen $U_{ij} \xrightarrow{\sim} U_{ji}$, mit denen wir den projektiven Raum konstruiert haben, schränken sich ein zu Isomorphismen

$$V_{ij} \;=\; V_i \cap U_{ij} \xrightarrow{\sim} V_j \cap U_{ji} \;=\; V_{ji}$$

denn für ein homoegenes Polynom $f \in I$ von Grad d gilt

$$X_i^d \cdot \phi_i(f) \;=\; X_j^d \cdot \phi_j(f) \quad\Leftrightarrow\quad \Big(\frac{X_i}{X_j}\Big)^d \cdot \phi_i(f) \;=\; \phi_j(f)$$

und das Element $\frac{X_i}{X_j}$ ist eine Einheit in $\Gamma(U_{ij}, \mathcal{O}_{U_i}) \;=\; \mathcal{O}_{U_i}(U_{ij})$.
Da wir also nur einschränkungen betrachten, folgt die Kozykelbedingung für die Schemata V_i, V_{ij} aus der Kozykelbedingung für die Schemata U_i, U_{ij}.

Definition und Bemerkung 15.3 *(Nullstellenschema homogener Polynome)*
Durch verkleben nach obigen Verklebedatum erhalten wir $V_+(I)$ als das Nullstellenschema der Homogenen Polynome $\mathcal{M}$ mit $I = (\mathcal{M})$. Die Morphismen $V_i \to U_i \to \mathbb{P}^n_R$ induzieren einen Morphismus

$$\eta : V_+(I) \ \to \ \mathbb{P}^n_R$$

und die zugrundeliegende stetige Abbildung topologischer Räume ist ein Homöomorphismus von $V_*(I)$ auf eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{P}^n_R$, denn dies gilt lokal auf $\mathbb{P}^n_R$, das heißt auf allen U_i.

Beispiel 49 *Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper. In der projektiven Ebene $\mathbb{P}^2(k)$ haben wir die drei verschiedenen Fälle von Quadriken bestimmt:*

- $V_+(X_0) \ = \ V_+(X_0^2)$ *- „Gerade"*
- $V_+(X_0^2 - X_1^2)$ *- „Zwei Geraden, die sich schneiden"*
- $V_+(X_0^2 + X_1^2 + X_2^2)$ *- „Kreis, Hyperbel, … "*

Vergleiche dazu auch Beispiel 28. Im neu konstruierten projektiven Raum, haben wir eine bessere Unterscheidungsmöglichkeit, denn wegen

$$k\left[\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}\right] \Big/ \left(\frac{X_0}{X_1}\right) \quad \neq \quad k\left[\frac{X_0}{X_1}, \frac{X_2}{X_1}\right] \Big/ \left(\left(\frac{X_0}{X_1}\right)^2\right)$$

gilt auch

$$V_+(X_0) \ \neq \ V_+(X_0^2)$$

Definition 15.4 *(zusammenhängend, irreduzibel, quasi-kompakte Schemata)*
Ein Schema heißt zusammenhängend, irreduzibel oder quasi-kompakt, wenn der zugrunde liegende topologische Raum die entsprechende Eigenschaft hat.

Definition 15.5 *(injektive, surjektive, bijekive Morphismen)*
Sein Morphismus von Schemata heißt injektiv, surjektiv oder bijektiv, wenn die zugrunde liegende stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen die entsprechende Eigenschaft hat.

Definition 15.6 *(Monomorphismus, Epimorphismus)*
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $f : X \to Y$ ein Morphismus in dieser Kategorie. Wir sagen

- *f ist genau dann ein Monomorphismus, wenn für alle Morphismen $g, h : Z \to X$ gilt*

  $$f \circ g = f \circ h \ \Rightarrow \ g = h$$

  Wir nennen f dann auch „links kürzbar" und verbildlichen die Situation mit dem Diagramm

  $$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

- *f ist genau dann ein Epimorphismus, wenn für alle Morphismen $g, h : Y \to Z$ gilt*

$$g \circ f = h \circ f \quad \Rightarrow \quad g = h$$

Wir nennen f dann auch „rechts kürzbar“ und verbildlichen die Situation mit dem Diagramm

$$X \xrightarrow{f} Y \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} Z$$

Bemerkung 15.7 *Sei $f : X \to Y$ ein Morphismus von Schemata, dann gelten*

$$\begin{array}{rcl} f \text{ Isomorphismus} \Rightarrow f \text{ bijektiv} & \text{aber} & f \text{ bijektiv} \not\Rightarrow f \text{ Isomorphismus} \\ f \text{ Monomorphismus} \Rightarrow f \text{ injektiv} & \text{aber} & f \text{ injektiv} \not\Rightarrow f \text{ Monomorphismus} \\ f \text{ Epimorphismus} \not\Rightarrow f \text{ surjektiv} & \text{und} & f \text{ surjektiv} \not\Rightarrow f \text{ Epimorphismus} \end{array}$$

Beweis. Wir zeigen hier nur, dass die Warnung bezüglich der nicht geltenden Implikationen richtig ist. Als Gegenbeispiel für alle Fälle auf der rechten Seite betrachte

$$\operatorname{Spec} {}^{k[T]}\!/\!_{(T^2)} \longrightarrow \operatorname{Spec} k$$

für einen Körper k. Diese Abbildung ist offensichtlich bijektiv, denn die topologischen Räume sind jeweils einpunktig. □

** Die Vorlesung 26. wurde in Vertretung gehalten von Dr. Christian Kappen.*

16 Generische Punkte

Wir wissen, dass in topologischen Räumen eine Menge Y genau dann irreduzibel ist, wenn $\overline{Y}$ irreduzibel ist (Lemma 1.18). Insbesondere gilt dies natürlich auch für Einpunktmengen $\overline{\{x\}}$.
Für die Zariskitopologie auf $\operatorname{Spec} R$ (für einen Ring R) haben wir die Zuordnung

$$\operatorname{Spec}(R) \;=\; \big\{ \text{Primideale in } R \big\} \;\overset{1:1}{\longleftrightarrow}\; \big\{ \text{irred. abges. Teilmengen von } \operatorname{Spec}(R) \big\}$$

Diese Beobachtungen wollen wir nun für Schemata verallgemeinern.

Satz 16.1 *Sei X ein Schema, dann ist die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} X & \to & \big\{ Z \subseteq X \text{ irred. und abges.} \big\} \\ x & \mapsto & \overline{\{x\}} \end{array}$$

ist bijektiv. Mit anderen Worten: Jede irreduzible abgeschlossene Teilmenge von X besitzt genau einen generischen Punkt.

Beweis. Falls X ein affines Schema ist, haben wir dies bereits in Aufgabe 4 der 9-ten Übung gesehen. Diesen Spezialfall werden wir nun im Beweis verwenden. Sei $Z \subseteq X$ irreduzibel und abgeschlossen. Ist $\varnothing \neq Z$ so gibt es ein $U \subseteq X$ offen und affin mit $U \cap Z \neq \varnothing$ und es gilt

$$\overline{U \cap Z} \;=\; Z$$

Die Inklusion „$\subseteq$“ ist hierbei klar, für die andere Richtung sei $Z' \subseteq Z$ eine abgeschlossene Teilmenge mit

$$\overline{Z \cap U} \;\subseteq\; Z'$$

Betrachte nun die abgeschlossene Teilmengen Z' und $Z \setminus (Z \cap U)$ von Z. Da Z irreduzibel ist, gilt entweder $Z = Z'$ oder $Z = Z \setminus (Z \cap U)$. Im zweiten Fall wäre aber $Z \cap U = \varnothing$ und dies ist widersprüchlich. Also kann dieser Fall nicht auftreten und wir erhalten $Z' = Z$.

Insbesondere ist also $Z \cap U$ eine irreduzible und abgeschlossene Teilmenge im affinen Schema U. Damit gibt es einen generischen Punkt $\eta \in Z \cap U$ mit

$$\overline{\{\eta\}}^{U} \;=\; Z \cap U \quad\Rightarrow\quad \overline{\{\eta\}}^{X} \;=\; Z$$

Damit haben wir die Existenz eines generischen Punktes η von Z gezeigt. Wir müssen nun noch die Eindeutigkeit beweisen, diese folgt aber auch aus der bereits bekannten Eindeutigkeit im affinen Fall, denn ist η ein generischer Punkt von Z, dann ist $\eta \in U'$ für alle offenen affinen Teilmengen $U' \subseteq X$ mit $U' \cap Z \neq \varnothing$ denn für alle diese gilt

$$\overline{\{\eta\}}^{U} \;=\; \overline{\{\eta\}}^{X} \cap U' \;=\; Z \cap U'$$

In jedem dieser U' gibt es genau einen generischen Punkt, also ist η in X der einzige generische Punkt. $\square$

Anmerkung (Fakten, die wir nicht beweisen werden)
Sei X ein Schema und $x \in X$, dann gibt es einen maximalen Punkt η so dass $x \in \overline{\{\eta\}}$, also $x \prec \eta$, gilt. Im Allgemeinen gibt es aber keinen abgeschlossenen Punkt $y \in X$ mit $x \succ y$ bzw. $y \in \overline{\{x\}}$. Ist X allerdings quasi-kompakt oder von lokal endlichem Typ über einem Körper, so gibt es ein solches y.

Satz 16.2 *Sei $f : X \to Y$ ein offener Morphismus von Schemata*[1] *und Y irreduzibel mit generischem Punkt η. Es gilt*

$$X \text{ ist irreduzibel} \quad\Leftrightarrow\quad f^{-1}(\eta) \text{ ist irreduzibel}$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass aus der Offenheit von f die Gleichung

$$\overline{\{f^{-1}(\eta)\}} \;\overset{(*)}{=}\; f^{-1}\big(\overline{\{\eta\}}\big) \;=\; f^{-1}(Y) \;=\; X$$

gilt, denn dann folgt

$$f^{-1}(\eta) \text{ irreduzibel} \quad\Leftrightarrow\quad \overline{\{f^{-1}(\eta)\}} \text{ irreduzibel} \quad\Leftrightarrow\quad X \text{ irreduzibel}$$

und wir sind fertig. Es ist Nur die mit $(*)$ beschriebene Gleichung zu zeigen, dies erfolgt wie üblich durch Nachweis der beiden Inklusionen:

„$\subseteq$“: Wegen $\eta \in \overline{\{\eta\}}$ gilt auch $f^{-1}(\eta) \subseteq f^{-1}\big(\overline{\{\eta\}}\big)$ Wegen der Stetigkeit von f folgt die gewünschte Inklusion.

[1] Bilder offener Mengen unter offenen Morphismen sind wieder offen. Vergleiche mit Stetigkeit: Urbilder offener Mengen unter stetigen Morphismen sind wieder offen.

„$\supseteq$“: Da f offen ist, ist auch

$$f\big(X \setminus \overline{\{f^{-1}(\eta)\}}\big) \quad \subseteq \quad Y$$

offen. Das Komplement dieser Menge $Z := Y \setminus f\big(X \setminus \overline{\{f^{-1}(\eta)\}}\big)$ ist dann natürlich abgeschlossen in Y. Wäre nun $\eta \notin Z$, so gäbe es ein $x \in X \setminus \overline{\{f^{-1}(\eta)\}}$ mit $f(x) = \eta$. Dies ist aber widersprüchlich und somit muss $\eta \in Z$ sein. Da Z abgeschlossen ist, gilt dann auch $\overline{\{\eta\}} \subseteq Z$ und damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f^{-1}\big(\overline{\{\eta\}}\big) \quad &\subseteq \quad f^{-1}(Z) \quad = \quad X \setminus f^{-1}\big[f\big(\overline{\{f^{-1}(\eta)\}}\big)\big] \\ &\subseteq \quad X \setminus \big(X \setminus \overline{\{f^{-1}(\eta)\}}\big) \quad = \quad \overline{\{f^{-1}(\eta)\}} \end{aligned}$$

□

Definition und Satz 16.3 *(T_0-Raum)*
Sei X ein Schema, dann ist X ein T_0-Raum, das heißt für $x, y \in X$ mit $x \neq y$ gibt es eine offene Menge $U \subseteq X$ mit

$$x \in U \text{ und } y \notin U \quad \underline{\text{oder}} \quad x \notin U \text{ und } y \in U$$

Beweis. Wir dürfen ohne Einschränkung annehmen, dass X affin ist, denn wenn es keine affine offene Teilmenge $U \subset X$ mit $x, y \in U$ gibt, ist nichts zu zeigen.
Also ist $X = \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A und x, y korrespondieren zu Primidealen $\wp_x, \wp_y$. Ohne Einschränkung gelte $\wp_x \nsubseteq \wp_y$. Wähle ein $f \in \wp_y \setminus \wp_x$, dann gilt $y \notin D(f) \ni x$. □

17 Reduzierte und Integre Schemata

Definition 17.1 *(Reduziertes, Integres Schema)*
Sei X ein Schema, dann heißt X

(a) *reduziert, falls für alle $x \in X$ der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein reduzierter Ring ist.*

(b) *integer, falls X reduziert und irreduzibel ist.*

Da die Begriffe reduziert und integer in der Kategorie der Ringe schon besetzt sind müssen wir erklären, warum diese Definition hier sinnvoll ist, und wie diese Begriffe zusammen hängen. Dieses tut der folgende

Satz 17.2 *Sei X ein Schema, dann gelten die folgenden Äquivalenzen*

(1) *X ist reduziert $\Leftrightarrow$ Für alle offenen Mengen U der Ring $\Gamma(U\, \mathcal{O}_X)$ reduziert ist.*

(2) *X ist integer $\Leftrightarrow$ Für alle offenen und nicht-leeren Mengen U der Ring $\Gamma(U\, \mathcal{O}_X)$ integer ist.*

(3) *X ist integer $\Rightarrow$ Für alle $x \in X$ ist der Halm $\mathcal{O}_{X,x}$ ein Integritätsring.*

Beweis. Sei $x \in X$ und $f \in \Gamma(U\, \mathcal{O}_X)$ für ein $U \subseteq X$ offen mit $x \in U$, dann bezeichnen wir mit f_x das Bild von f unter der Abbildung $\mathcal{O}_X(U) \to \mathcal{O}_{X,x}$

(1) **„$\Rightarrow$“:** Sei $U \subseteq X$ offen und sei $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit $f^n = 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wäre $f \neq 0$ so gäbe es ein $x \in U$ mit $f_x \neq 0$. Wegen $f^n = 0$ gilt dann

$$0 \quad \neq \quad (f_x)^n \quad = \quad (f^n)_x \quad = \quad 0$$

also muss bereits $f = 0$ sein und damit ist $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ reduziert.

(1) „$\Leftarrow$“: Seien $x \in X$ und $f_x \in \mathcal{O}_{X,x}$ mit f_x^n. Es gibt eine offene Umgebung $U \subseteq X$ von x so dass f_x das Bild von $f \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist. Wegen $(f^n)_x = 0$ gilt (nach eventuellem Verkleinern von U) auch $f^n = 0$. Nach Voraussetzung ist $\Gamma(U\, \mathcal{O}_X)$ aber reduziert also gilt bereits $f = 0$ und somit auch für Bild $f_x = 0$.

(2) „$\Rightarrow$“: Es genÜgt zu zeigen, dass $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ ein integritätsring ist. Betrachte also $f, g \in \mathcal{O}_X(X)$ mit $f \cdot g = 0$ dann ist

$$X \;=\; V(f) \cup V(g)$$

Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $X = V(f)$ gilt, denn X ist nach Voraussetzung irreduzibel. Es genügt nun $f = 0$ zu zeigen. Hierfür sei X ohne Einschränkung affin, also $X = \operatorname{Spec} A$. Nach **(1)** ist $\mathcal{O}_X(X) = A$ reduziert und es gilt $V(f) = \operatorname{Spec}(A)$ also

$$f \;\in\; \bigcap_{\wp \in \operatorname{Spec} A} \wp \;=\; nil(A) \;=\; (0)$$

(2) „$\Leftarrow$“: Nach voraussetzung sind nun alle $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ integritätsringe, also insbesondere reduziert. Nach **(1)** ist dann auch X reduziert. Bleibt noch zu zeigen, dass X irreduzibel ist. Angenommen X wäre nicht irreduzibel, dann gäbe es offene affine nicht-leere Mengen $U_1, U_2 \subseteq X$ mit $U_1 \cap U_2 = \varnothing$ und es ist

$$\Gamma(U_1 \cup U_2, \mathcal{O}_X) \;=\; \Gamma(U_1, \mathcal{O}_X) \times \Gamma(U_2, \mathcal{O}_X)$$

Das Produkt von zwei Ringen ist jedoch nie integer, betrachte etwa $(1,0) \cdot (0,1) = (0,0)$.

(3): Dieser Punkt folgt aus **(2)**, denn zu $x \in X$ betrachte eine offene affine Umgebung $U \subseteq X$ von x, dann ist $U = \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A. Nach **(2)** ist A ein Integritätsring und es gilt $\mathcal{O}_{X,x} \cong A_{\wp_x}$. □

Definition 17.3 *(Funktionenkörper)*
Sei X ein integres Schema und $\eta \in X$ der generische Punkt, dann nennen wir

$$\kappa(X) \;:=\; \mathcal{O}_{X,\eta}$$

den Funktionenkörper von X.

Beispiel 50 *Im Affinen Fall kennen wir schon Beispiele, etwa*

- $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$. *Es ist* $\eta = (0)$ *und*

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z},(0)} \;=\; \mathbb{Z}_{(0)} \;\operatorname{Quot}(\mathbb{Z}) \;=\; \mathbb{Q}$$

- $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$. *Auch hier ist* $\eta = (0)$ *und wir erhalten*

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T],(0)} \;=\; \mathbb{Z}[T]_{(0)} \;\operatorname{Quot}(\mathbb{Z}[T]) \;=\; \mathbb{Q}(T)$$

- ...

Satz 17.4 *Sei X ein integres Schema. Bezeichne $\eta \in X$ den generischen Punkt und $\kappa(X)$ den Funktionenkörper.*

(1) *Sei $U \subseteq X$ eine affine offene nicht-leere Teilmenge von X, etwa $U = \operatorname{Spec} A$, dann ist*

$$\kappa(X) \quad = \quad \operatorname{Quot}(A)$$

Insbesondere für $x \in X$ gilt $\kappa(X) = \operatorname{Quot}(\mathcal{O}_{X,x})$.

(2) *Seien $U \subseteq V \subseteq X$ offene nicht-leere Teilmengen, dann sind die Abbildungen*

$$\Gamma(V, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\text{res}} \Gamma(U, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{f \mapsto f_\eta} \kappa(X)$$

injektiv.

(3) *Sei $U \subseteq X$ offen und nicht-leer. Sei die Famile $(U_i)_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von U, so gilt im Funktionenkörper $\kappa(X)$*

$$\Gamma\Big(\bigcup_{i \in I} U_i, \mathcal{O}_X\Big) \overset{(a)}{=} \bigcap_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \overset{(b)}{=} \bigcap_{x \in U} \mathcal{O}_{X,x}$$

Beweis. Zu **(1)** Sei $x \in U = \operatorname{Spec} A$. Es gilt

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_{X,\eta} \arrow[r, equal] & A_{\wp_\eta} \arrow[r, equal] \arrow[d, equal] & A_{(0)} \arrow[r, equal] & \operatorname{Quot}(A) \arrow[d, equal] \\
& \big(A_{\wp_x}\big)_{\wp_\eta A_{\wp_x}} \arrow[r, equal] & \big(A_{\wp_x}\big)_{(0)} \arrow[r, equal] & \operatorname{Quot}(A_{\wp_x})
\end{tikzcd}$$

Für **(2)** genügt es zu zeigen, dass aus $f_\eta = 0$ stets $f = 0$ folgt. Hierfür sei ohne Einschränukung U affin, etwa $U = \operatorname{Spec} A$ mit einem Ring A, dann kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(U) \arrow[r, "f \mapsto f_\eta"] \arrow[d, "\wr"'] & \kappa(X) \arrow[d, "\wr"] \\
A \arrow[r, hook, "f \mapsto \frac{f}{1}"'] & A_{(0)} = \operatorname{Quot}(A)
\end{tikzcd}$$

Zu **(3a)** betrachte das Garbendiagramm

$$\begin{tikzcd}
& & \kappa(X) & \\
\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \arrow[r] & \prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \arrow[ur, hook] \arrow[rr, hook, shift left] \arrow[rr, hook, shift right] & & \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X) \arrow[ul, hook']
\end{tikzcd}$$

Wegen der Injektivität der Restriktionsabbildungen gilt

$$\begin{aligned}
\Gamma(U, \mathcal{O}_X) \quad &= \quad \operatorname{Ker}\Big(\prod_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X) \rightrightarrows \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_X)\Big) \\
&= \quad \bigcap_{i \in I} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)
\end{aligned}$$

Für Teil **(b)** überdecke U offen affin mit Teil **(a)** und verwende die zu zeigende Aussage im affinen Fall (Diese haben wir auf Übungsblatt 11 gezeigt). □

18 Schemata und Prävarietäten

Wir wollen nun den Begriff des Schemas mit unserem Ursprünglichen Begriff der Prävarietäten vergleichen. Stellen wir die beiden Konstruktionen nebeneinander sehen wir einige Unterschiede

Schemata	Prävarietäten
	Fixiere einen alg. abges. Körper k
Sei R ein beliebiger Ring	Sei R eine endl. erz. integre k-Algebra
$\rightsquigarrow U := \operatorname{Spec} R$ affines Schema	$\rightsquigarrow U \subset \mathbb{A}^n(k)$ affine Varietät
Durch Verkleben affiner Schemata U_i erhalte ein Schema	Durch Verkleben affiner Varietäten U_i erhalte eine Prävarietät
$X := \bigcup_{i\in I} U_i$	$X := \bigcup_{i=0}^{m} U_i$

Damit wir Schemata und Prävarietäten sinnvoll vergleichen können, sollten wir also insbesondere nur quasi-kompakte irreduzible Schemata betrachten. Weiter müssen wir die Auswahlmöglichkeiten für die Ringe sinnvoll begrenzen.

Schemata lokal von endlichem Typ

Sei k ein (nicht notwendig algebraisch abgeschlossener) Körper.

Definition 18.1 *([lokal] von endlichem Typ)*
Sei X ein k-Schema, also ein Morphismus $X \to \operatorname{Spec} k$ von Schemata. Wir sagen X ist ein k-Schema lokal von endlichem Typ über k, falls eine Überdeckung

$$X = \bigcup_{i\in I} U_i \quad \text{mit } U_i \subseteq X \text{ affin offen}$$

so existiert, dass für alle $i \in I$ die k-Algebra $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ über k endlich erzeugt ist.

Wir sagen weiter X ist ein k-Schema von endlichem Typ (über k), falls X lokal von endlichem Typ und quasi-kompakt ist.

Anmerkung Das $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ eine k-Algebra ist, ist klar, denn wir erhalten für alle $i \in I$ die Abbildung

$$U_i \hookrightarrow X \to \operatorname{Spec} k$$

und damit auch eine korrespondierende Abbildung $k \to \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ auf dem Niveau der Ringe.

Satz 18.2 *Sei X ein k-Schema, dann sind äquivalent:*

(1) *X ist lokal von endlichem Typ über k.*

(2) *Für alle affinen offenen Teilmengen $U \subseteq X$ gilt: $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ ist eine endlich erzeugte k-Algebra.*

Beweis. Der Schluss von **(2)** auf **(1)** ist trivial, denn wenn alle affin offenen Teilmengen diese Eigenschaft haben, dann sicherlich auch jede beliebige Überdeckung mit affin offenen Teilmengen. Für die Gegenrichtung sei $U \subseteq X$ eine affin offene Teilmenge. Wir wollen zeigen, dass $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ eine endlich erzeugte k-Algebra ist. Nach Voraussetzung ist X lokal von endlichem Typ, also gibt es eine Überdeckung

$$X = \bigcup_{i \in I} U_i$$

mit affin offenen Teilmengen, derart dass alle $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ als k-Algebren endlich erzeugt sind.

- Für $f \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ ist auch $\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)_f$ eine endlich erzeugte k-Algebra, denn

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)_f & \xrightarrow{\sim} & \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)[T] / (1 - fT) \\ f^{-1} & \mapsto & T \end{array}$$

  ist ein Isomorphismus.

- Für jedes $x \in U$ gibt es ein $i \in I$ mit $x \in U_i$. Weiter gibt es $f \in \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)$ und $g \in \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ mit

$$x \in D_{U_i}(f) = D_U(g) \subseteq U \cap U_i$$

  Damit gibt es eine Überdeckung

$$U = \bigcup_{j \in J} V_j$$

  durch ausgezeichnete offene Teilmengen von U, so dass für alle $j \in J$ der Ring $\Gamma(V_i, \mathcal{O}_X)$ eine endlich erzeugte k-Algebra ist.
  Da U als affines Schema insbesondere quasi-kompakt ist, kann ohne Einschränkung noch angenommen werden, dass J endlich ist.

Mit dieses Überlegungen genügt es nun das folgende allgemeine Lemma zu zeigen.

Lemma 18.3 *Sei A ein Ring*[2] *und B eine A-Algebra. Seien weiter $f_1, \ldots, f_m \in B$ Elemente mit $(f_1, \ldots, f_m) = (1)$ also mit anderen Worten*

$$\operatorname{Spec} B = \bigcup_{i=1}^{m} D(f_i)$$

Falls für alle $i = 1, \ldots, m$ die A-Algebra B_{f_i} endlich erzeugt ist, so ist auch B als A-Algebra endlich erzeugt.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es Elemente $g_1, \ldots, g_m \in B$ mit

$$\sum_{i=1}^{m} g_i f_i = 1$$

Außerdem existieren zu jedem i endlich viele Elemente $b_{ij} \in B_{f_i}$ mit $B_{f_i} = A[b_{ij}]$. Etwa

$$\frac{c_{ij}}{f_i^n} = b_{ij} \quad \text{mit } c_{ij} \in B$$

Setze nun

$$C := A\big[f_i, g_i c_{ij}\big] \subseteq B$$

[2] Für den Beweis des Satzes nimm $A = k$.

Behauptung *Es gilt $C = B$ also ist B insbesondere endlich erzeugt über A.*

Begründung. Sei $b \in B$, dann gilt

$$\frac{b}{1} \;=\; \sum_{i,j} a_{ij}\, b_{ij} \qquad \text{in } B_{f_i}$$

Also gibt es ein $N \gg 0$ mit

$$f_i^N\, b \;\in\; A[f_i, c_{ij}] \;\subseteq\; C$$

Nun gilt aber auch $(f_1, \ldots, f_m) = (1)$ in C, denn die g_i liegen nach Konstruktion ebenfalls in C. Also gilt auch

$$\left(f_1^N, \ldots, f_m^N\right) \;=\; (1) \qquad \text{etwa } \sum_{i=1}^{m} a_i\, f_i^N \;=\; 1$$

Damit erhalten wir aber offensichtlich

$$b \;=\; \left(\sum_{i=1}^{m} a_i\, f_i^N\right) b \;=\; \sum_{i=1}^{m} a_i \left(f_i^N\, b\right) \;\in\; C$$

□

Satz 18.4 *Sei X ein k-Schema lokal von endlichem Typ und sei $x \in X$ ein Punkt. Es sind äquivalent:*

(1) *x ist ein abgeschlossener Punkt von X, das heißt $\{x\} \subseteq X$ ist abgeschlossen.*

(2) *Die Körpererweiterung $\kappa(x)/k$ ist endlich.*

(3) *Die Körpererweiterung $\kappa(x)/k$ ist algebraisch.*

Beweis. per Ringschluss

„(1)⇒(2)“ Sei $U \subseteq X$ eine affin offene Umgebung von x, dann ist $\Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ eine endlich erzeugte k-Algebra nach Satz 18.2. Da x nach Voraussetzung ein abgeschlossener Punkt von X ist, korresponiert x zu einem maximalen Ideal $\mathfrak{m} \lhd \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$ und insbesondere ist

$$\kappa(x) \;=\; \Gamma(U, \mathcal{O}_X)/\mathfrak{m}$$

und dies ist nach Hilberts Nullstellensatz 1.7 ein endlicher Erweiterungskörper von k.

„(2)⇒(3)“ klar.

„(3)⇒(1)“ Sei $U \subseteq X$ eine affin offene Umgebung von x, etwa $U = \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A. Dann ist A nach Satz 18.2 eine endlich erzeugte k-Algebra. Erhalte die folgende Abbildung

$$\begin{tikzcd} k \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\xi"'] & A \arrow[r] & A/\wp_x \arrow[r, hook] & \operatorname{Quot}\left(A/\wp_x\right) = \kappa(x) \end{tikzcd}$$

Nach Voraussetzung ist $\kappa(x)/k$ algebraisch und somit ist ξ ein injektiver ganzer Ringhomomorphismus. Damit ist der Faktorring $A/\wp_x$ ein Körper und somit ist $\wp_x$ ein maximales Ideal in A und x ein abgeschlossener Punkt von U.

Da U eine beliebige offene affine Teilmenge von X mit $x \in U$ war, ist x nach obiger Rechnung in allen affin offenen Teilmengen, die x enthalten, ein abgeschlossener Punkt. Da die affin offenen Teilmengen X überdecken ist x auch ein abgeschlossener Punkt von X. □

Folgerung 18.5 *Sei X ein Schema lokal von endlichem Typ über k. Seien weiter $U \subseteq X$ eine offene Teilmenge und $x \in U$ ein Punkt. Genau dann ist x ein abgeschlossener Punkt von U, wenn x ein abgeschlossener Punkt von X ist.*

Anmerkung Dies ist wirklich eine Besonderheit. Betrachte zum Beispiel die folgende Situation:
Sei R ein diskreter Berwertungsring, dann ist $\operatorname{Spec} R = \{(0),\, \mathfrak{m}\}$. Sei $U = \{(0)\}$ und $x = (0)$, so ist x abgeschlossen in U, aber nicht in $\operatorname{Spec} R$.

Definition und Lemma 18.6 *(sehr dicht)*
Sei X ein topologischer Raum und $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir sagen Y liegt sehr dicht in X, falls die folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \{\, U \subseteq X \text{ offen} \,\} & \to & \{\, V \subseteq Y \text{ offen} \,\} \\ U & \mapsto & U \cap Y \end{array}$$

ist bijektiv.

(ii) *Die Abbildung*

$$\begin{array}{ccc} \{\, F \subseteq X \text{ abgeschlossen} \,\} & \to & \{\, G \subseteq Y \text{ abgeschlossen} \,\} \\ F & \mapsto & F \cap Y \end{array}$$

ist bijektiv.

(iii) *Für alle abgeschlossenen Teilmengen $F \subseteq X$ gilt: $\overline{F \cap Y}^X \;=\; F$*

(iv) *Für alle nicht-leeren lokal abgeschlossenen Teilmengen $Z \subseteq X$, das heißt $Z = U \cap F \subseteq X$ mit einer offenen Menge U und einer abgeschlossenen Menge F, gilt: $Z \cap Y \;\neq\; \varnothing$*

Beweis. Die Äquivalez von **(i)**, **(ii)** und **(iii)** ist klar (gehe jeweils zum Komplement über), den Rest lassen wir als Übungsaufgabe.

Satz 18.7 *Sei X ein k-Schema lokal von endlichem Typ, dann gilt*

$$\{\, x \in X \mid x \text{ abges. Punkt} \,\} \;\subseteq\; X$$

liegt sehr dicht in X.

Beweis. Wir Prüfen den Punkt **(iv)** der vorangegnangenen Definition nach. Sei also $Z \subseteq X$ lokal abgeschlossen und nicht leer. Durch eventuelles verkleinern von Z kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass

$$Z \overset{\text{abges.}}{\subseteq} U \overset{\text{offen affin}}{\subseteq} X$$

etwa mit $U = \operatorname{Spec} A$ für einen Ring A. Dann ist $Z \subseteq V(\mathfrak{a})$ für ein echtes Ideal $\mathfrak{a} \lhd A$. Jedes echte Ideal von A ist in einem Maximalen Ideal enthalten, so also etwa $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ für ein maximales Ideal $\mathfrak{m} \lhd A$. $\mathfrak{m}$ korrespondiert zu einem abgeschlossenen Punkt von U, welcher wegen $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ in Z liegt.
Nach Folgerung 18.5 ist dieser Punkt dann auch abgeschlossen in X, da wir X als Schema lokal von endlichem Typ über k vorausgesetzt haben. □

Folgerung 18.8 *Sei k hier ein algebraisch abgeschlossener Körper und X ein k-Schema lokal von endlichem Typ, dann gelten*

$$\left\{ x \in X \,\middle|\, x \text{ abges. Pkt.} \right\} \;=\; \left\{ x \in X \,\middle|\, \kappa(x) = k \right\} \;=\; \mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} k, X) \;=:\; X(k)$$

wobei genau dann $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(\operatorname{Spec} k, X)$ ist, wenn dass Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\operatorname{Spec} k \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "id"'] & & X \arrow[dl, "\rightsquigarrow k\text{-Schema Morph.}"] \\
& \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Diesem Diagramm entspricht auf übliche Weise

$$\begin{tikzcd}
k & & \kappa(x) \arrow[ll, hook'] \\
& k \arrow[ul, equal] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Vergleich von Schemata und Prävarietäten

Sei k nun wieder ein algebraisch abgeschlossener Körper. In den letzten Abschnitten haben wir uns die folgenden Äquivalenzen von Kategorien erarbeitet:

$$\begin{pmatrix} \text{integre affine} \\ k \text{ Schemata von} \\ \text{endlichem Typ} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \text{integre endlich} \\ \text{erzeugte } k \text{ Algebren} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \begin{pmatrix} \text{affine Varietät} \\ \text{über } k \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \longmapsto & \Gamma(X, \mathcal{O}_X) & & \Gamma(X) & \longleftarrow\!\!\shortmid & X \\
\operatorname{Spec} R & \longleftarrow\!\!\shortmid & R & & & & \\
X & & \longmapsto & & & & X(k)
\end{array}$$

Für den nicht affinen Fall können wir nun formal argumentieren, dass diese Äquivalenzen für die affinen „Bausteine“ gilt und wir durch Verkleben eine Äquivalenz von Kategorien erhalten, wir können aber auch konstruktiv vorgehen und einen Funktor angeben, der uns eine Äquivalenz von Kategorien liefert: Konstruiere also

$$\begin{pmatrix} \text{integre } k \text{ Schemata} \\ \text{lokal von endlichem Typ} \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{Prävarietäten} \\ \text{über } k \end{pmatrix}$$

Bilde dazu ein integres k Schema lokal von endlichem Typ $(X, \mathcal{O}_X)$ auf einen Raum mit Funktionen über k gegeben durch den topologischen Raum $X(k)$ und ein zugehöriges System von Funktionen $\mathcal{O}_{X(k)}(U) := \mathcal{O}_X(V)$, mit $U = V \cap X(k)$ für eine eindeutig bestimmte offene Teilmenge $V \subseteq X$, ab.

Bemerkung 18.9 *Die Abbildung*

$$\begin{array}{rcl} j : \mathcal{O}_X(V) & \to & \mathrm{Abb}(U,k) \\ f & \mapsto & \big[U \ni u \mapsto \overline{f_u} \in \kappa(u) = k\big] \end{array}$$

wobei $\overline{f_u}$ *das Bild von* f *im Restklassenkörper von* u *unter der Abbildung*

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_X(V) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{X,u} & \longrightarrow & \kappa(u) \\ f & \longmapsto & f_u & \longmapsto & \overline{f_u} \end{array}$$

sei, ist injektiv.

Beweis. Der Kern der Abbildung j ist

$$\mathrm{Ker}(j) \;=\; \bigcap_{\mathfrak{m} \overset{max}{\lhd} \mathcal{O}_X(V)} \mathfrak{m} \overset{(1)}{=} \bigcap_{\mathfrak{p} \overset{prim}{\lhd} \mathcal{O}_X(V)} \mathfrak{p} \overset{(2)}{=} (0)$$

denn (1) ist $\mathcal{O}_X(V)$ als endlich erzeugte k-Algebra ein Jacobsen Ring und (2) ist X reduziert. □

Weiter können wir einen quasi-inversen Funktor angeben:

$$\begin{pmatrix} \text{Prävarietäten} \\ \text{über } k \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \text{integre } k \text{ Schemata} \\ \text{lokal von endlichem Typ} \end{pmatrix}$$

Hierbei werde eine Prävarietät $(X, \mathcal{O}_X)$ vermöge der Abbildung

$$\begin{array}{rcl} X & \hookrightarrow & \big\{\, Z \subseteq X \text{ irred. und abges.} \,\big\} =: \widetilde{X} \\ x & \mapsto & \{x\} \end{array}$$

die Menge $\widetilde{X}$ aller irreduziblen abgeschlossenen Teilmengen von X (sobrification) abgebildet. In den Übungen haben wir gesehen, dass X sehr dicht in $\widetilde{X}$ liegt. Die Strukturgarbe setze als

$$\mathcal{O}_{\widetilde{X}}(U) \;:=\; \mathcal{O}_X(U \cap X)$$

wie auch bei der Gegenrichtung.

Kapitel IV

Faserprodukte

19 Schemata als Funktor

Sei R ein Ring und seien $f_1, \ldots, f_m \in R[T_1, \ldots, T_n]$ Polynome. In der Einleitung haben wir das Ziel erklärt, dass wir die Lösungsmenge von $f_1 = \ldots = f_m = 0$ verstehen wollen. Bisher haben wir dies für Punkte aus dem affinen Raum betrachtet. Dieses wollen wir nun och allgemeiner betrachten, denn wir würden gerne diese Menge unabhängig vom affinen Raum untersuchen, betrachte dazu für eine R-Algebra A den Übergang

$$\begin{aligned} \left\{ x \in \mathbb{A}_R^n \mid f_1(x) = \ldots = f_m(x) = 0 \right\} &= \operatorname{Hom}_R\left(R[\underline{\mathrm{T}}]/_{(f_i)}, A \right) \\ &= \operatorname{Hom}_{\operatorname{Spec} R}\left(\operatorname{Spec} A, \operatorname{Spec} R[\underline{\mathrm{T}}]/_{(f_i)} \right) \end{aligned}$$

Definition 19.1 *(Gegenüberliegende Kategorie)*
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, dann definieren wir die gegenüberliegende Kategorie $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}$ durch

$$Ob\,\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \;:=\; Ob\,\mathcal{C} \quad \text{und} \quad \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}}(X, Y) \;:=\; \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

Anmerkung Mit diese Definition werden kontravariante Funktoren $F : \mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}_2$ zu kovarianten Funktoren $F : \mathcal{C}_1{}^{\mathrm{opp}} \to \mathcal{C}_2$.

Definition 19.2 *(Funktor der T wertigen Punkte)*
Sei X ein Schema. Wir definieren den Funktor der T wertigen Punkte

$$\mathfrak{h}_X : (Sch)^{\mathrm{opp}} \to (Sets)$$

für ein Schemata T durch

$$\mathfrak{h}_X(T) \;:=\; \operatorname{Hom}_{(Sch)}(T, X)$$

und für Morphismen $f : T' \to T$ von Schemata durch

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_X(f) : \operatorname{Hom}_{(Sch)}(T, X) &\to \operatorname{Hom}_{(Sch)}(T', X) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

Wir sagen auch $\mathfrak{h}_X(T)$ sind die T-Wertigen Punkte von X. Verkürzt schreiben wir auch oft:

$$\begin{aligned} X(T) &:= \mathfrak{h}_X(T) \\ X(A) &:= X(\operatorname{Spec} A) \quad \text{für einen Ring } A \end{aligned}$$

Ist S ein Schema und X ein S-Schema, dann haben wir analog den Funktor

$$\mathfrak{h}_{X/S} : (Sch/S)^{\text{opp}} \;\to\; (Sets)$$

mit

$$\mathfrak{h}_{X/S}(T) \;:=\; \mathrm{Hom}_{(Sch)}(T, X)$$

für ein S-Schemata T und

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{h}_{X/S}(f) : \mathrm{Hom}_{(Sch)}(T, X) & \to & \mathrm{Hom}_{(Sch)}(T', X) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

für Morphismen $f : T' \to T$ von S-Schemata. Auch hier schreiben wir oft kürzer

$$X(T) \;:=\; X_S(T) \;=\; \mathfrak{h}_{X/S}(T)$$

wobei wir den Hinweis auf das Schema S nur weglassen, wenn klar ist, dass wir uns im Kontext der S-Schemata bewegen. Weiter haben wie für Ringe A, B und S-Schemata T die Kurzschreibweisen

$$\begin{array}{rcl} X(A) & := & X_S(T) \;:=\; \mathfrak{h}_{X/S}(\mathrm{Spec}\, A) \\ X_R(T) & := & X_{\mathrm{Spec}\, R}(T) \end{array}$$

Im Sinne dieser neuen Definition können wir die adhoc-Definition von $X(k)$ aus dem letzten Abschnitt von Kapittel III auch verstehen als

$$X(k) \;=\; \mathfrak{h}_{X/\,\mathrm{Spec}\, k}(\mathrm{Spec}\, k) \;=\; \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}\, k}(\mathrm{Spec}\, k, X)$$

Beispiel 51 *Seien $X = \mathbb{A}^n := \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}} = \mathrm{Spec}\, \mathbb{Z}[T_1, \ldots, T_n]$ und Y ein Schema, dann ist*

$$\begin{array}{rcl} X(Y) & = & \mathrm{Hom}(Y, X) \;=\; \mathrm{Hom}\left(\mathbb{Z}[\underline{T}], \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)\right) \\ & = & \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^n \end{array}$$

Speziell ist also $X(A) \;=\; A^n$ falls A ein Ring ist. Ähnliche Ergebnisse erhalten wir für

$$X \;=\; \mathrm{Spec}\, {}^{R[\underline{T}]}\!/\!_{\mathfrak{a}} \qquad \text{mit } \mathfrak{a} \lhd R[\underline{T}]$$

und X-Schemata

Beispiel 52 *Sei $X = R[T, T^{-1}] = R[T]_T$, dann ist für ein Schema Y*

$$X_R(Y) \;=\; \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)^\times$$

Um nun das naheliegende nächste Beispiel $X = \mathbb{P}^n$ betrachten zu können benötigen wir noch mehr Theorie.

Das Yoneda-Lemma

Das Yoneda-Lemma können wir in unserem Fall mit dem Slogan „Ein Schema X ist durch den Funktor $\mathfrak{h}_X$ eindeutig bestimmt.“ parafrasieren. Das Lemma gilt aber allgemein für alle Kategorien. Dazu verallgemeinern wir den Funktor $\mathfrak{h}_X$ wie folgt:

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X ein Objekt von $\mathcal{C}$, dann definiere

$$\mathfrak{h}_X : \mathcal{C}^{\text{opp}} \to \mathcal{C}$$

durch

$$\mathfrak{h}_X(T) \;=\; \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X)$$

für $T \in Ob\,\mathcal{C}$ und

$$\begin{aligned} \mathfrak{h}_X(f) : \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) &\to \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(T', X) \\ g &\mapsto g \circ f \end{aligned}$$

für einen Morphismus $f : T' \to T$ in der Kategorie $\mathcal{C}$.

Definition 19.3 *(Morphismus von Funktoren)*
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ Kategorien und seien $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ Funktoren der Kategorien. Ein Morphismus $F \to G$ von Funktoren ist gegeben durch Morphismen

$$F(S) \to G(S) \qquad \text{für alle } S \in Ob\,\mathcal{C}$$

in $\mathcal{D}$, so dass für alle Morphismen $S' \to S$ in $\mathcal{C}$ das Diagramm

$$\begin{tikzcd} F(S') \arrow[r] \arrow[d] & G(S') \arrow[d] \\ F(S) \arrow[r] & G(S) \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiel 53 *Sei K ein Körper und bezeichne (VR/K) die Kategorie der Vektorräume über K. Sei*

$$D : (VR/K)^{\text{opp}} \to (VR/K)$$

der Funktor, der jedem Vektorraum seinen Dualraum zuordnet. Sei nun V ein beliebiger K-Vektorraum, dann ist

$$\begin{aligned} V &\to D\big(D(V)\big) \\ v &\mapsto \big[\lambda \mapsto \lambda(v)\big] \end{aligned}$$

damit haben wir einen Morphismus von Funktoren

$$id_{(VR/K)} \to D \circ D$$

Schränken wir uns auf endliche Vektorräume über K ein, ist dies sogar ein eindeutiger Isomorphismus.

Mit dieser Definition erhalten wir eine neue Kategorie

$$\widehat{\mathcal{C}} \;:=\; \mathrm{Fun}\left(\mathcal{C}^{\mathrm{opp}}, (Sets)\right)$$

wobei die Objekte dieser Kategorie Funktoren $\mathcal{C}^{\mathrm{opp}} \to (Sets)$ sind und die Morphismen die soeben definierten Morphismen von Funktoren. Damit erhalten wir auch einen Funktor

$$\begin{array}{rccc} \mathfrak{h}: & \mathcal{C} & \to & \widehat{\mathcal{C}} \\ & X & \mapsto & \mathfrak{h}_X \\ & (f : X \to Y) & \mapsto & (\mathfrak{h}_X \to \mathfrak{h}_Y) \text{ gegeben durch } \begin{array}{ccc} \mathfrak{h}_X(T) & \to & \mathfrak{h}_Y(T) \\ g & \mapsto & f \circ g \end{array} \end{array}$$

Wir werden im weiteren verlauf sehen, dass dieser Funktor volltreu ist, das heißt für alle $X, Y \in Ob\,\mathcal{C}$ ist

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \;\to\; \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathfrak{h}_X, \mathfrak{h}_Y)$$

bijektiv. Genau so wollen wir auch den eingangs erwähnten Slogan „Ein Schema X ist durch den Funktor $\mathfrak{h}_X$ eindeutig bestimmt.“ verstehen, das heißt X und Y sind genau dann isomorph, wenn $\mathfrak{h}_X$ und $\mathfrak{h}_Y$ isomorph sind:

Lemma 19.4 *(Yoneda-Lemma)*
Seien $X \in Ob\,\mathcal{C}$ und $F \in Ob\,\widehat{\mathcal{C}}$, dann ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathfrak{h}_X, F) & \to & F(X) \\ (\alpha : \mathfrak{h}_X \to F) & \mapsto & \alpha(X)(id_X) \quad \text{mit } \alpha(X) : \mathfrak{h}_X \to F(X) \end{array}$$

bijektiv und funktoriell in X, das heißt für Morphismen $X \to Y$ in $\mathcal{C}$ kommutiert das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathfrak{h}_X, F) \arrow[r] & F(X) \\ \mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathfrak{h}_Y, F) \arrow[r] \arrow[u] & F(Y) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Wenden wir das Lemma auf den Fall $F = \mathfrak{h}_Y$ an, dann erhalten wir

$$\mathrm{Hom}_{\widehat{\mathcal{C}}}(\mathfrak{h}_X, \mathfrak{h}_Y) \;\xrightarrow{\sim}\; \mathfrak{h}_Y(X) \;=\; \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Im Beweis des Lemmas werden wir sehen, dass dies auch die richtige Abbildung ist.

Beweis. Definiere die Umkehrabbildung wie folgt: Sei $\xi \in F(X)$, dann definiere einen Morphismus von Funktoren $\mathfrak{h}_X \to F$ durch

$$\mathfrak{h}_X(T) \to F(T) \quad \text{mit} \quad (f : T \to X) \mapsto \big(F(f)(\xi)\big)$$

Überprüfe nun, dass dies tatsächlich die gewünschte Umkehrabbildung liefert.

Wir führen dies nur im Spezialfall $F = \mathfrak{h}_Y$ aus, in diesem Fall ist $F(X) = \mathfrak{h}_Y(X)$ und damit ist ξ ein Morphismus von X nach Y in $\mathcal{C}$. Für $f \in \mathfrak{h}_X(T)$ ist nun

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{h}_Y(f) : \mathrm{Hom}(X, Y) & \to & \mathrm{Hom}(T, Y) \\ g & \mapsto & g \circ f \end{array}$$

und damit ist $\mathfrak{h}_Y(f)(\xi) = \xi \circ f$. □

Folgerung 19.5 *Sei S ein Schema und seien X, Y zwei S-Schemata. Dann ist die Vorgabe von Daten der folgenden Arten äquivalent:*

1. *Ein Morphismus $f : X \to Y$ von S-Schemata.*

2. *Für alle S-Schemata T eine Abbildung*

$$X_S(T) \to Y_S(T)$$

   die funktoriell in T ist.

3. *Für alle affinen S-Schemata T eine Abbildung*

$$X_S(T) \to Y_S(T)$$

   die funktoriell in T ist.

Beweis. Die Äquivalenz von 1. und 2. liefert das Yoneda-Lemma 19.4 für die Kategorie $\mathcal{C} = (Sch/S)$. Der Schritt von 2. auf 3. ist klar, nur der Schluss von 3. auf 2. bedarf noch einer Erklärung: Sei dazu T ein S-Schema, dann gibt es eine Überdeckung mit affin offenen Mengen $(T_i)_{i \in I}$. Aus 3. erhalte Abbildungen $X_S(T_i) \to Y_S(T_i)$ für alle i. Verklebe Diese zu einer Abbildung $X_S(T) \to Y_S(T)$. □

20 Faserprodukte

Definition und Eigenschaften

Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und X, Y zwei Objekte dieser. Dann ist das Produkt $X \times Y$ charakterisiert durch eine universelle Eigenschaft: Für alle $T \in Ob\,\mathcal{C}$ zusammen mit Abbildungen $T \to X$ und $T \to Y$ existiert eine eindeutig bestimmte Abbildung $T \to X \times Y$ so, dass das Diagramm kommutiert (wo es kommutieren kann).

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "\exists!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\
& X \times Y \arrow[r] \arrow[d] & X \\
& Y &
\end{tikzcd}$$

Diese Konstruktion wollen wir nun etwas verallgemeinern:

Definition 20.1 *(Faserprodukt)*
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Objekt in $\mathcal{C}$ sowie $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ Morphismen in $\mathcal{C}$. Dann heißt ein Objekt Z in $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ Faserprodukt von X und Y (wir schreiben $Z = X \times_S Y$ oder genauer $Z = X \times_{f,S,g} Y$) bezüglich f und g über S, wenn gilt

- *Es gilt $f \circ p = g \circ q$, das heißt, dass das untere Quadrat kommutiert.*
- *Für alle $T \in Ob\,\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen $p' : T \to X$ und $q' : T \to Y$ mit $f \circ p' = g \circ q'$ existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $h : T \to Z$ mit $p' = p \circ h$ und $q' = q \circ h$*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "p'"] \arrow[ddr, bend right, "q'"'] & & \\
& Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "g"] \\
& Y \arrow[r, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

Anmerkung Das Faserprodukt von X und Y in der Kategorie $\mathcal{C}$ ist, sofern es existiert, bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig durch die universelle Eigenschaft bestimmt.

Bemerkung 20.2 *Alternative Sichtweisen des Faserproduktes*

(i) *Die Objekte $X, Y, X \times_S Y, \ldots$ sind via $f, g, f \circ p, \ldots$ Objekte in der relativen Kategorie $(\mathcal{C}\,/S)$, die gegeben ist durch*

- *Objekte von $(\mathcal{C}\,/S)$ sind Morphismen $A \to S$ in $\mathcal{C}$.*
- *Morphismen in $(\mathcal{C}\,/S)$ sind kommutative Dreiecke*

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr] \arrow[dr] & & B \arrow[dl] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Dann ist das Faserprodukt in $\mathcal{C}$ das selbe wie das bereits bekannte Produkt in der relativen Kategorie $(\mathcal{C}\,/S)$.

(ii) *Ist $X \times_S Y$ das Faserprodukt von X und Y über S bezüglich f und g, so gilt*

$$\mathrm{Hom}(T, X \times_S Y) \;\cong\; \left\{ (p', q') \in \mathrm{Hom}(T, X) \times \mathrm{Hom}(T, Y) \,\middle|\, f \circ p' = g \circ q' \right\}$$

Die Bijektion zwischen diesem Mengen ist gegenen durch

$$h \;\mapsto\; (p \circ h, q \circ h)$$

Mit anderen Worten: Wir können die universelle Eigenschaft des Faserproduktes als Beschreibung des Funktors $\mathfrak{h}_{X \times_S Y}$ verstehen.

Beispiel 54 *(Faserprodukt von Mengen)*
Sei $\mathcal{C} = (Sets)$ die Kategorie der Mengen und seien $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ Abbildungen von Mengen. Wir suchen ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

Setze dazu

$$X \times_S Y \;:=\; \left\{ (x, y) \in X \times Y \,\middle|\, f(x) = g(y) \right\}$$

dann ist diese Menge zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} p : X \times_S Y \to X \quad &\text{mit} \quad (x, y) \mapsto x \\ q : X \times_S Y \to Y \quad &\text{mit} \quad (x, y) \mapsto y \end{aligned}$$

ein Faserprodukt von X und Y (und als solches bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig).

Beweis. *Wir müssen zeigen, dass $X \times_S Y$ zusammen mit p und q die universelle Eigenschaft besitzt. Sei dazu T eine Menge mit zugehörigen Abbildungen*

$$p' : T \to X \qquad \text{und} \qquad q' : T \to Y$$

so dass $f \circ p' = g \circ q'$ gilt. Dann setze

$$\begin{aligned} h : T \;&\to\; X \times_S Y \\ t \;&\mapsto\; \big(p'(t), q'(t)\big) \end{aligned}$$

dann kommutiert

$$\begin{tikzcd} T \arrow[dr, dashed, "h"] \arrow[drr, bend left, "p'"] \arrow[ddr, bend right, "q'"'] & & \\ & X \times_S Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & X \arrow[d, "g"] \\ & Y \arrow[r, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

□

Wir erhalten also eine Bijektion

$$X \times_S Y \quad \cong \quad \coprod_{s \in S} f^{-1}(s) \times g^{-1}(s)$$

und damit auch eine Erklärung des Namens „Faserprodukt“, da es sich um das Produkt der Fasern von f und g handelt. Insbesondere gilt für beliebige Faserprodukte in einer beliebigen Kategorie $\mathcal{C}$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X \times_S Y) \quad = \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \times_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T,S)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y)$$

bezüglich der Abbildungen $p' \mapsto f \circ p'$ und $q' \mapsto g \circ q'$.

Bemerkung 20.3 *(Rechenregeln für Faserprodukte)*
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und S ein Objekt von $\mathcal{C}$. Seien weiter X, Y, Z Objekte von $\mathcal{C}$ zusammen mit Morphismen nach S. Wir haben natürliche Isomorphismen

- $X \times_S Y \xrightarrow{\sim} X$
- $X \times_S Y \xrightarrow{\sim} Y \times_S X$
- $(X \times_S Y) \times_S Z \xrightarrow{\sim} X \times_S (Y \times_S Z)$

Beweis. Entweder konstruiere Morphismen und Umkehrmorphismen mittels der universellen Eigenschaft des Faserproduktes, oder führe alternativ die Aussage mit Hilfe des Yoneda-Lemmas auf den Fall $\mathcal{C} = (Sets)$ zurück.

Definition 20.4 *(kartesisches Quadreat)*
Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und seien X, Y, Z, S Objekte von $\mathcal{C}$. Ein Diagramm

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & S \end{tikzcd}$$

heißt kartesisch oder kartesisches Quadrat, falls es kommutativ ist und Z zusammen mit den gegebenen Morphismen $p : Z \to X$ und $q : Z \to Y$ ein Faserprodukt bezüglich der gegebenen Morphismen $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ in $\mathcal{C}$ ist.
Wir kennzeichnen kartsische Quadrate mit einem kleinen Quadrat im innern.

Bemerkung 20.5 *Ein Diagramm wie in Definition 20.4 ist genau dann kartesisch, wenn für alle Objekte T von $\mathcal{C}$ das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Z) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, X) \arrow[d] \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(T, S) \end{tikzcd}$$

kartesisch in der Kategorie der Mengen ist.

Folgerung 20.6 *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und sei*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & C \arrow[d] \\ D \arrow[r] & E \arrow[r] & F \end{tikzcd}$$

ein kommutatives Diagramm in $\mathcal{C}$, dessen rechtes Quadrat kartesisch ist, dann gilt: Das linke Quadrat mit den Eckpunkten A, B, D und E ist genau dann kartesisch, wenn das äußere Rechteck mit den Eckpunkten A, C, D und F kartesisch ist.

Beweis. Nach der vorangegangen Bemerkung genügt es die Aussage für die Kategorie der Mengen zu beweisen. Dort ist sie (leicht) nachzurechnen.

Beispiel 55 *(Spezialfälle von Faserprodukten)*

- *Sei $\mathcal{C} = (Sets)$ die Kategorie der Mengen und sei $f : X \to S$ eine Abbildung in $\mathcal{C}$. Die Quadrate*

  $$\begin{tikzcd} f^{-1}(s) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ s \arrow[r] & S \end{tikzcd} \quad \text{und allgemeiner} \quad \begin{tikzcd} f^{-1}(S') \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ S' \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

  sind für $s \in S$ und $S' \subseteq S$ kartesisch.

- *Sei $\mathcal{C} = (Sets)$ die Kategorie der Mengen und sei S eine Menge. Sind X, Y Teilmengen von S, dann ist das Quadrat der natürlichen Inklusionen*

  $$\begin{tikzcd} X \cap Y \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, hook] \\ Y \arrow[r, hook] & S \end{tikzcd}$$

  kartesisch.

- *Sei $\mathcal{C}$ die Kategorie der Gruppen, der R-Moduln (für einen Ring R) etc. und sei $f : G \to H$ ein Gruppenhomomorphismus, dann ist*

  $$\begin{tikzcd} \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G \arrow[d, "f"] \\ \{e\} \arrow[r, hook] & H \end{tikzcd}$$

  ein kartesisches Quadrat.

- *Sei $\mathcal{C}$ eine beliebige Kategorie und seien X, Y Objekte von $\mathcal{C}$. Das kartesische Produkt $X \times Y$ ist ein Faserprodukt, denn*

  $$\begin{tikzcd} X \times Y \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & \{pt\} \end{tikzcd}$$

  ist ein kartesisches Diagramm.

Faserprodukte in der Kategorie der Schemata

Wir wollen nun zeigen, dass in der Kategorie (Sch) der Schemata alle Faserprodukte existieren. Damit können wir dann in sinnvoller Weise über Durchschnitte, Produkte und Urbilder in der Kategorie der Schemata sprechen.

Erinnerung. *Das Tensorprodukt in der Kategorie der Ringe wird durch die folgende universelle Eigenschaft Charakterisiert: Sei R ein Ring und seien A, B zwei R-Algebren, dann existiert für alle R-Algebren C zusammen mit Abbildungen $p' : A \to C$ und $q' : B \to C$ genau eine Abbildung $h : A \otimes_R B \to C$ mit $h(a \otimes b) = p'(a) \cdot q'(b)$. Mit anderen Worten, das folgende Diagramm kommutuert:*

$$\begin{tikzcd}
C & & \\
& A \otimes_R B \arrow[ul, dashed, "h"'] & A \arrow[l] \arrow[ull, bend right, "p'"'] \\
& B \arrow[u] \arrow[uul, bend left, "q'"] & R \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Wir konstruieren das Faserprodukt zunächst im affinen Fall über das Tensorprodukt. Dies ist in sofern vielversprechend, da sich bei Anwendung des Spec-Funktors alle Pfeilrichtungen umkehren.

Satz 20.7 *Sei R ein Ring und seien A, B zwei R-Algebren, dann ist* $\operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$ *zusammen mit den Abbildungen*

$$\operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \to \operatorname{Spec}(A) \quad \text{und} \quad \operatorname{Spec}(A \otimes_R B) \to \operatorname{Spec}(B)$$

die induziert werden von

$$\begin{aligned} A &\to A \otimes_R B \quad \text{mit} \quad a \mapsto a \otimes 1 \\ B &\to A \otimes_R B \quad \text{mit} \quad b \mapsto b \otimes 1 \end{aligned}$$

ein Faserprodukt von $\operatorname{Spec}(A)$ *und* $\operatorname{Spec}(B)$ *über* $\operatorname{Spec}(R)$*, also*

$$\operatorname{Spec}(A) \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec}(B) \cong \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)$$

in der Kategorie der Schemata.

Beweis. Sei T ein affines Schema mit Abbildungen nach $\operatorname{Spec}(A)$ und $\operatorname{Spec}(B)$ so folgt die universelle Eigenschaft aus der universellen Eigenschaft des Tensorproduktes. Ist T nun ein beliebiges Schema mit Abbildungen nach $\operatorname{Spec}(A)$ und $\operatorname{Spec}(B)$ so gilt

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}\big(T, \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)\big) &= \operatorname{Hom}\big(A \otimes_R B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)\big) \\ &= \operatorname{Hom}\big(A, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)\big) \times_{\operatorname{Hom}\left(R, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)\right)} \operatorname{Hom}\big(B, \Gamma(T, \mathcal{O}_T)\big) \\ &= \operatorname{Hom}\big(T, \operatorname{Spec} A\big) \times_{\operatorname{Hom}\left(T, \operatorname{Spec} R\right)} \operatorname{Hom}\big(T, \operatorname{Spec} B\big) \end{aligned}$$

in der Kategorie der Mengen. □

Satz 20.8 *Sei S ein Schema und seien $f : X \to S$ und $g : Y \to S$ Morphismen von Schemata, dann existiert das Faserprodukt $X \times_S Y$ in der Kategorie der Schemata.*

Beweis. *(Skizze)* Versuche Rückführung auf den affinen Fall. Sei dazu

$$S \;=\; \bigcup_{i \in I} S_i \qquad \text{mit } S_i \subseteq S \text{ affin offen}$$

eine Überdeckung von S durch affine Schemata. Setze für alle $i \in I$

$$X_i \;:=\; f^{-1}(S_i) \qquad \text{und} \qquad Y_i \;:=\; g^{-1}(S_i)$$

Zu jedem Schema X_i und Y_i finden wir wieder eine Familie affin offener Mengen $(X_{ij})_{j \in J}$ beziehungsweise $(Y_{ik})_{k \in K}$, welche X_i bzw. Y_i überdecken. Konstruiere nun $X \times_S Y$ durch verkleben der affinen Schemata $X_{ij} \times_{S_i} Y_{ik}$. Hierzu erhalte die Verklebe-Morphismen aus den universellen Eigenschaften der affinen Faserprodukte.
Das Ergebnis dieses Verklebens ist ein Schema $X \times_S Y$ mit einer affin offenen Überdeckung der Form

$$X \times_S Y \;=\; \bigcup X_{ij} \times_{S_i} Y_{ik}$$

$\diamond$

Beispiel 56 *Die Inklusion $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ liefert eine Abbildung $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec}\mathbb{R}$ und es gilt:*

$$\begin{aligned}
\operatorname{Spec}\mathbb{C} \times_{\operatorname{Spec}\mathbb{R}} \operatorname{Spec}\mathbb{C} &= \operatorname{Spec}(\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \\
&= \operatorname{Spec}\left({}^{\mathbb{R}[X]}\!\big/_{(X^2 * 1)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} \right) \\
&= \operatorname{Spec}\left({}^{\mathbb{C}[X]}\!\big/_{(X+i)(X-i)} \right) \\
&= \operatorname{Spec}(\mathbb{C} \times \mathbb{C}) \\
&= \operatorname{Spec}\mathbb{C} \amalg \operatorname{Spec}\mathbb{C}
\end{aligned}$$

Beispiel 57 *Ist $f : R \to R'$ ein Ringhomomorphismus und $\mathbb{A}^n_R = \operatorname{Spec} R[T_1, \ldots, T_n]$, dann gilt*

$$\mathbb{A}^n_R \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R' \;=\; \mathbb{A}^n_{R'}$$

ist weiter $\mathfrak{a} \lhd R[\underline{T}]$ ein Ideal, dann gilt

$$\operatorname{Spec} {}^{R[\underline{T}]}\!\big/_{\mathfrak{a}} \times_{\operatorname{Spec} R} \operatorname{Spec} R' \;=\; \operatorname{Spec} {}^{R'[\underline{T}]}\!\big/_{(f(\mathfrak{a}))}$$

Allgemein gilt für einen Morphismus $S' \to S$ von Schemata und ein S-Schema $X \to S$:

$$X \times_S S' \;\to\; S' \quad \text{ist ein } S'\text{-Schema}$$

Damit erhalte den Basiswechsel-Funktor

$$(Sch/S) \;\to\; (Sch/S')$$

Beispiel 58 *(Schnitte von Schemata)*

(1) *Sei S ein Schema und seien $U, V \subseteq S$ offene Teilmengen, des zugrunde liegenden topologischen Raums S, dann können wir, durch einschränken der Strukturgarbe, U und V als offene Unterschemata verstehen. In diesem Sinne ist auch $V \cap U$ mit $\mathcal{O}_{S|V \cap U}$ ein Schema. Mit unserer neuen Theorie können wir diesen Schnitt aber auch als ein Faserprodukt von U und V über S und damit ebenfalls als ein Schema verstehen, denn das Quadrat*

$$\begin{tikzcd} U \cap V \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\square"] & U \arrow[d, hook] \\ V \arrow[r, hook] & S \end{tikzcd}$$

ist kartesisch.

(2) *Sei k ein Körper und $S = \operatorname{Spec} k[x, y]$ ein affines Schema. Wir wollen nun wieder das Schema, welches wir als Schnittpunkt des Achsenkreuzes erhalten mit dem Schema, welches wir als den Berührpunkt der Normalparabel mit einer Achse erhalten, vergleichen. (Vergleiche Beispiel 45)*

(i) *Bezeichne $Z_1 = \operatorname{Spec} k[y]$, dann induziert der Ringhomomorphismus*

$$\begin{array}{ccc} k[x,y] & \to & k[y] \\ y & \mapsto & y \\ x & \mapsto & 0 \end{array}$$

einen Morphismus $Z_1 \to S$ von Schemata. Sei weiter $Z_2 := \operatorname{Spec} k[X]$ und erhalte einen Morphismus nach S wie oben. Wir definieren den Schnittpunkt des Achsenkreuzes $Z_1 \cap Z_2$ als Schema durch

$$\begin{aligned} Z_1 \cap Z_2 \quad &:= \quad Z_1 \times_S Z_2 \quad = \quad \operatorname{Spec}\Big(k[y] \otimes_{k[x,y]} k[x]\Big) \\ &= \quad \operatorname{Spec} k \end{aligned}$$

(ii) *Bezeichne weiter*

$$Z_3 = \operatorname{Spec} k[x,y] / (y - x^2)$$

und erhalte wie oben einen Morphismus $Z_3 \to S$ von Schemata. Den Berührpunkt der Normalparabel definieren wir ebenfalls als Faserprodukt:

$$\begin{aligned} Z_1 \cap Z_2 \quad &:= \quad Z_1 \times_S Z_2 \quad = \quad \operatorname{Spec}\Big(k[y] \otimes_{k[x,y]} k[x,y]/(y - x^2)\Big) \\ &= \quad \operatorname{Spec} k[x]/(x^2) \end{aligned}$$

An diesem Beispiel sehen wir zum einen, dass uns die Konstruktion des Faserproduktes Verallgemeinerungen bestimmter Konstruktionen erlaubt (Bsp. Durchschnitte) und zum anderen, dass wir mit den Schnittpunkten als Faserprodukt tatsächlich Informationen behalten, die uns bei anderen Konstruktionen (z.B. nur auf Grundlage der topologischen Räume) verloren gingen.

Fasern von Morphismen von Schemata

In Beispiel 55 haben wir Spezialfälle von Faserprodukten betrachtet. Insbesondere haben wir in der Kategorie der Mengen das Urbild eines Punktes als Faserprodukt ausgewiesen: Seien S, X Mengen und $s \in S$, dann gilt

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(s) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d] \\ s \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

Mit einer analogen Konstruktion wollen wir nun Fasern von Morphismen von Schemata definieren. Dazu benötigen wir noch einmal ein paar Begriffem, die wir uns bereits erarbeitet haben:

Sei S ein Schema. Zu jedem Punkt $s \in S$ des topologischen Raums haben wir einen Halm $\mathcal{O}_{S,s}$. Dieser ist ein lokaler Ring. Wenn wir das maximale Ideal $\mathfrak{m}_s$ in diesem Ring heraus teilen erhalten wir den Restklassenkörper von s

$$\kappa(s) \quad := \quad {}^{\mathcal{O}_{S,s}}\!/\!_{\mathfrak{m}_s}$$

Wir erhalten einen natürlichen Morphismus

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Spec} \kappa(s) & \to & S \\ pt & \mapsto & s \end{array}$$

Damit definieren wir:

Definition 20.9 *(Faser von Morphismen)*
Sei $f : X \to S$ ein Morphismus von Schemata und $s \in S$ ein Punkt im topologischen Raum. Dann heißt

$$X_s \quad := \quad f^{-1}(s) \quad = \quad X \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s)$$

die Schema-theoretische Faser von f in s.

Satz 20.10 *In der Situation der vorangegangen Definition ist der zugrunde liegende topologische Raum X_s gerade die Faser der stetigen Abbildung $f : X \to S$ topologischer Räume über $s \in S$.*

Beweis. Wir reduzieren zunächst auf den Fall, dass sowohl X als auch S affine Schemata sind:

- Die Faser der stetigen Abbildung f ändert sich beim Übergang zu einer offenen s-Umgebung $V \subseteq S$ und gleichzeitigem ersetzen von X durch $f^{-1}(V)$ nicht. Außerdem gilt

  $$X \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s) \quad \cong \quad f^{-1}(V) \times_V \operatorname{Spec} \kappa(s)$$

  Benutze zum Nachweis die universelle Eigenschaft des Faserproduktes und die Projektionen

  $$p : f^{-1}(V) \times_V \operatorname{Spec} \kappa(s) \ \to \ f^{-1}(V) \subseteq X \quad \text{und} \quad q : f^{-1}(V) \times_V \operatorname{Spec} \kappa(s) \ \to \ \operatorname{Spec} \kappa(s)$$

  Wir können also ohne Einschränkung annehmen, dass S ein affines Schema ist.

- Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie (affin) offener Mengen, die X überdecken. Dann gilt

  $$X \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s) \quad = \quad \bigcup_{i \in I} \Big(U_i \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s) \Big)$$

ist eine (affin) offene Überdeckung. Daher genügt es, den Satz für alle Morphismen

$$U_i \hookrightarrow X \to S$$

z zu zeigen. Damit können wir ebenfalls ohne Einschränkung annehmen, dass auch X ein affines Schema ist.

Seien also etwa $S = \operatorname{Spec} A$ und $X = \operatorname{Spec} B$ für Ringe A und B und sei $\varphi : A \to B$ der zu f gehörige Ringhomomorphismus, das heißt

$$\begin{aligned} f : \operatorname{Spec} B &\to \operatorname{Spec} A \\ \mathfrak{q} &\mapsto \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \end{aligned}$$

Sei weiter $\mathfrak{p} \lhd A$ das zu s korrespondierende Primideal, dann gelten

$$\kappa(s) = A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} \qquad \text{und} \qquad X \times_S \operatorname{Spec} \kappa(s) = \operatorname{Spec} \left(B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} \right)$$

Dieses Tensorprodukt können wir ausrechnen und erhalten

$$B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} = \left(\varphi(A \setminus \mathfrak{p})\right)^{-1} B / \varphi(\mathfrak{p})$$

Damit erhalten wir nun einen Homöomorphismus

$$\operatorname{Spec} \left(B \otimes_A A_{\mathfrak{p}} / \mathfrak{p} A_{\mathfrak{p}} \right) \cong \left\{ \mathfrak{q} \lhd B \text{ prim} \;\middle|\; \mathfrak{q} \cap \varphi(A \setminus \mathfrak{p}) = \varnothing \;\wedge\; \varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q} \right\}$$

Diese Menge charakterisiert aber, da f die zu φ assoziierte Abbildung und $\mathfrak{p}$ das zu s gehörige Primideal ist, gerade die Faser von f in s. □

Anmerkung Eine analoge Aussage lässt sich auch für die, nur im Beispiel angerissene, Verallgemeinerung des Schnittes von Schemata formulieren und Beweisen.

Philosophie *(Grothendiek)*
Ein Morphismus $f : X \to S$ von Schemata liefert eine Familie X_s von $\kappa(s)$-Schemata, also von Schemata über einem Körper.

Beispiel 59 *Es gibt Morphismen von Varietäten, über deren Fasern wir nur mit Hilfe der Sprache von Schemata sinnvoll sprechen können. Sei k ein algebraisch abgeschlossener Körper.*

(i) *Betrachte den Morphismus*

$$X := \operatorname{Spec} k[S,T,U] / (UT - S) \longrightarrow \operatorname{Spec} k[S] = \mathbb{A}^1_k =: Y$$

Sei $s \in k$, dann ist das korrespondierende Primideal ein maximales Ideal und da k algebraisch abgeschlossen ist von der Form $(S - s) \lhd k[S]$. Es gilt in dieser Situation also

$$\kappa(s) = k[S] / (S - s)$$

und damit für die Schema-theoretische Faser von f in s:

$$X_s = \operatorname{Spec} \left(k[S,T,U] / (UT - S) \otimes_{k[S]} k[S] / (S - s) \right) = \operatorname{Spec} k[U,T] / (UT - s)$$

Die Fasern für $s \neq 0$ entsprechen Hyperbeln und sind irreduzibel. Die Faser für $s = 0$ ist (sozusagen der „Grenzwert“ der Hyperbeln) die Vereinigung der U-Achse mit der T-Achse und somit insbesondere nicht irreduzibel.

(ii) *Betrachte den Morphismus*

$$X := \operatorname{Spec} k[S,T,U]/_{(U^2 - ST^2)} \longrightarrow \operatorname{Spec} k[S] = \mathbb{A}^1_k =: Y$$

Sei wieder $s \in k$, dann erhalten wir, sofern die Charakteristik von k nicht 2 ist, wie oben

$$X_s = \operatorname{Spec} k[U,T]/_{(U^2 - sT^2)}$$

Für $s \neq 0$ erhalte hier die Vereinigung zweier sich schneidender Geraden und für $s = 0$ entspricht die Faser der Vereinigung zweier aufeinander liegender Geraden. Die Fasern für $s \neq 0$ sind reduziert, die Faser für $s = 0$ ist es nicht.

Beispiel 60 *Sei X ein Schema und $X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ ein Morphismus von Schemata. Erhalte eine Familie von Schemata über den Körpern $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{F}_p$ für Primzahlen $p \in \mathbb{Z}$.*

Als Motivation wollen wir hier noch einen Satz angeben, der zum einen zeigt, dass wir mit der Sprache der Fasern tatsächlich etwas gewonnen haben und zum anderen Anknüpfpunkte zum Beispiel an die Zahlentheorie nahe legt:

Satz 20.11 *Sei $f : X \to S$ ein Morphismus von Schemata mit einem integren Schema S, das heißt S ist reduziert und irreduzibel und besitzt insbesondere genau einen generischen Punkt η.*
Ist $S = \operatorname{Spec} R$ das Spectrum eines noetherschen Rings R und $f : X \to S$ ein S-Schema von endlichem Typ, dann gilt:
X_η ist genau dann reduziert, wenn es eine nicht-leere offene Teilmenge $U \subseteq S$ so gibt, dass für alle $s \in U$ die Faser X_s reduziert ist.

Beispiel 61 *Sei $S = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ und $X = V(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{A}^n_{\mathbb{Z}}$ oder $X = V_*(f_1, \ldots, f_m) \subseteq \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}}$ dann ist + $\eta = (0)$ und der Satz übersetzt sich zu:*
$X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ ist genau dann reduziert, wenn $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{Q}$ und fast alle $X \times_{\operatorname{Spec} \mathbb{Z}} \operatorname{Spec} \mathbb{F}_p$ reduziert sind.

Anhang A

Lizenz

Die jeweils aktuelle Version dieses Dokuments kann stets von meiner Homepage

`http://uni.johoelken.de`

bezogen werden. Für Rückfragen aller Art erreichen Sie mich unter der eMail-Adresse:

`johannes.hoelken@stud.uni-due.de`

Anhang B

Register

Literaturverzeichnis

[L1] **Görtz, Wedhorn**, Algebraic Geometry I, Vieweg
[L2] **Mumford**, The Red Book of Varieties and Schemes, Springer
[L3] **Görtz**, Notizen zur Vorlesung Algebra II (kommutative Algebra), elektronisch verfügbar
`http://www.uni-due.de/~hx0050/ss12/kommutative_algebra.pdf`

Bildnachweise

Sofern nicht anders angegeben sind alle Zeichnungen in diesem Dokument von mir mit GIMP erstellt worden. Ausnahmen hiervon bilden:

Bsp. 1 Funktionsplot mit Maple, Johannes Hölken

Dank

Wie in fast all meinen Mitschriften möchte ich auch diesemal wieder Jann Behrendt danken, der mir seine Notizen von der 16. Vorlesung vom 4.12.12 zur Verfügung gestellt (Ab Seite 62) und mich auf einige (Tipp-)Fehler hingewiesen hat.

Stichwortverzeichnis