Zusammenfassung der Vorlesung Analysis III (WS 09/10)

(K.J. Witsch / N. Weck / D. Pauly)

Inhaltsverzeichnis

LaTeX-Umsetzung von Johannes Hölken.
Fehlermeldungen, Fragen oder Hinweise bitte an: uni @ johoelken.de

Nachtrag zum Skriptum der Analysis II

9 Strukturen der Analysis

9.2 Differentation in Banachrräumen

Im Folgenden seien X, Y und Z Bannachräume über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. In Analogie zu Definition 5.2 definiert man:

Definition 9.39 *(Differenzierbarkeit)*
Sei Ω eine offene Teilmenge von X und $f : \Omega \subset X \to Y$ eine Funktion, die jedem $x \in \Omega$ ein $y := f(x) \in Y$ zuordnet. f heißt differenzierbar in $\hat{\mathrm{x}} \in \Omega$, wenn eine stetige lineare Abbildung $A \in \mathfrak{L}(X, Y)$ von X nach Y existiert, so dass gilt:
Ist mit $\delta > 0$ die Umgebung $U_\delta(\hat{\mathrm{x}})$ ganz in Ω enthalten, so gilt für alle $h \in U_\delta(0)$

$$f(\hat{\mathrm{x}} - h) = f(\hat{\mathrm{x}}) + Ah + \| h \| \varphi(h) \tag{1}$$

mit einer in 0 stetigen Funktion $\varphi : U_\delta(0) \to Y$ mit Wert $\varphi(0) = 0$.

Man erkennt direkt

Satz 9.40 *In der Situation aus Definition 9.39 ist f in $\hat{\mathrm{x}}$ stetig* □

Definition und Satz 9.41 *(Die Ableitung einer d'baren Funktion)*
In der Situation aus Definition 9.38 ist die lineare Abbildung A eindeutig bestimmt. Sie heißt Ableitung von f in $\hat{\mathrm{x}}$, und wir schreiben $f'(\hat{\mathrm{x}}) := A$.

Beweis. Sei $B \in \mathfrak{L}(X, Y)$ eine weitere lineare Abbildung und $\sigma : \mathrm{U}_\delta(0) \to Y$ eine in 0 stetige Funktion mit $\sigma(0) = 0$ derart, dass für alle $h \in \mathrm{U}_\delta(0)$ gilt

$$f(\hat{\mathrm{x}} - h = f(\hat{\mathrm{x}}) + Bh + \| h \| \sigma(h) \tag{2}$$

Dann implizieren (1) und (2) für jedes $\zeta \in X \backslash \{0\}$ und $t \in (0, \| \zeta \|^{-1} \delta)$ die Gleichung

$$f(\hat{\mathrm{x}}) + tB\zeta + t \| \zeta \| \sigma(t\zeta) = f(\hat{\mathrm{x}}) - tA\zeta + t \| \zeta \| \varphi(t\zeta)$$

und nach Substraktion von $f(\hat{\mathrm{x}})$ und Division durch t folgt

$$B\zeta - A\zeta = \| \zeta \| \Big(\sigma(t\zeta) - \varphi(t\zeta) \Big) \xrightarrow{\text{für t} \to 0} 0$$

Wir erhalten $B\zeta = A\zeta$ für alle $\zeta \in X$ □

Beispiel 1 *(Differenzierbarkeit und Ableitung der Normfunktion)*
Die Norm in X wurde durch ein Skalarprodukt $< \cdot, \cdot >$ definiert:

$$\| x \| =< x, x >^{\frac{1}{2}} \qquad \text{frr alle } x \in X$$

Dann ist auch $X \times X$ ein Bannachraum mit der Norm

$$\| (x, y) \| := \Big(\| x \|^2 + \| y \|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}$$

Weiter ist die Funktion

$$\begin{aligned} f : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \ < x, y > \end{aligned}$$

im festen Punkt $(x, y) \in X \times X$ *differenzierbar. Mit* $h := (k, l)$ *ist nämlich*

$$f\Big((x, y) + h\Big) =< x + k, y + l >=< x, y > + < k, y > + < x, l > + < k, l >$$

Nun ist

$$\begin{aligned} A : X \times X &\rightarrow \mathbb{R} \\ (k, l) &\mapsto \ < k, y > + < x, l > \end{aligned}$$

eine stetige lineare Abbildung und für alle $(k, l) \in X \times X \backslash \{(0, 0\}$ *gilt*

$$< k, l >= \frac{< k, l >}{\|(k, l)\,\|} \cdot \|(k, l)\,\| \qquad \text{mit}$$

$$\left| \frac{< k, l >}{\|(k, l)\,\|} \right| \leq \frac{\|\, k\,\| \cdot \|\, l\,\|}{(\|\, k\,\|^2 + \|\, l\,\|^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{1}{2} \frac{\|\, k\,\|^2 + \|\, l\,\|^2}{(\|\, k\,\|^2 + \|\, l\,\|^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \|\, h\,\| \xrightarrow{\text{für } h \rightarrow 0} 0$$

Satz 9.42 *(Metrische Kettenregel)*
Seien $\Xi \subset X$ *und* $\Omega \subset Y$ *offene Teilmengen. Weiter seien* $x \in \Xi$ *und* $y \in \Omega$ *Elemente sowie* $f : \Xi \subset X \rightarrow Y$ *und* $g : \Omega \subset Y \rightarrow Z$ *Funktionen derart, dass* $f(x) = y$ *ist. Ist* f *differenzierbar in* x *und* g *differenzierbar in* y*, so ist* $g \cdot f : D \subset X \rightarrow Z$ *mit* $D := \{\, \tilde{\mathrm{x}} \in \Xi \,|\, f(\tilde{\mathrm{x}}) \in \Omega \,\}$*, differenzierbar in* x *mit der Ableitung*

$$\big(g \cdot f\big)'(x) = g'(y) f'(x)$$

Beweis. Da f stetig in x ist gibt es zu der Offenen Umgebung Ω von $y = f(x)$ eine Umgebung $U \subset \Xi$ von x mit $f(U) \subset \Omega$. Insbesondere ist also x ein innerer Punkt von D, das heißt, dass es ein $\delta > 0$ mit $udelte(x) \subset D$ gibt. Dann gilt für jedes $h \in \mathrm{U}_\delta(0)$

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + r(h) \cdot \|\, h\,\| \qquad \text{mit } r(h) \rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0$$

Und mit genügend kleinem ε gilt für jedes $k \in \mathrm{U}_\varepsilon(0)$

$$g(y + k) = g(y) + g'(y)k + s(k) \cdot \|\, k\,\| \qquad \text{mit } s(k) \rightarrow 0 \text{ für } k \rightarrow 0$$

Für $h \in \mathrm{U}_\delta(0)$ folgt dann

$$\begin{aligned} g \circ f(x + h) &= g\Big(f(x) + f'(x)h + r(h)\,\|\, h\,\|\Big) \\ &= g\Big(y + f'(x)h + r(h)\,\|\, h\,\|\Big) \\ &= g(y) + g'(y) f'(x) h \\ &= \quad + \|\, h\,\| \Big(g'(y) r(h) + s(k)\big(f'(x) \frac{h}{\|\, h\,\|} + r(h)\big)\,\|\, h\,\|\Big) \end{aligned}$$

Hierbei ist $g'(y) f'(x)$ eine stetige Lineare Abbildung von X nach Z und der Ausdruck in der großen Klammer geht für $h \rightarrow 0$ gegen 0. $\square$

Definition und Satz 9.43 *(Richtungsableitung)*
Sei $\Omega \subset X$ eine offene Teilmenge und die Funktion $f : \Omega \to Y$ sei differenzierbar in $x \in \Omega$. Dann gilt für jedes $\zeta \in X \backslash \{0\}$

$$f'(x)\zeta = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\zeta) - f(x)}{t}$$

Sofern der Grenzwert

$$\frac{\partial}{\partial \zeta} f(x) = f'(x)\zeta := \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t\zeta) - f(x)}{t}$$

existiert, nennt wir ihn die Richtungsableitung zum Richtungsvektor ζ.

Insbesondere nennt man im Fall $X = \mathbb{R}^N$ die Richtungsableitung von f zum n-ten Einheitsvektor e^n die *partielle Ableitung von f (in die n-te Richtung)* und schreibt:

$$\partial n\, f(x) := \frac{\partial}{\partial e^n} f(x)$$

Ist nun auch $Y = \mathbb{R}^M$, so lässt sich f schreiben in der Form

$$\begin{array}{ccc} f : \Omega \subset \mathbb{R}^N & \to & \mathbb{R}^M \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ldots, x_N) \\ \vdots \\ f_M(x_1, \ldots, x_N) \end{pmatrix} \end{array}$$

Die Matrix, die bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^N$ bzw. $\mathbb{R}^M$ die ableitung von f in x beschreibt, nennt man die *Jacobi-Matrix*. Sie ist gegeben durch

$$f'(x) \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x) & \partial_2 f_1(x) & \ldots & \partial_N f_1(x) \\ \partial_1 f_2(x) & \partial_2 f_2(x) & \ldots & \partial_N f_2(x) \\ \vdots & & & \vdots \\ \partial_1 f_M(x) & \partial_2 f_M(x) & \ldots & \partial_N f_M(x) \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(N, M) \tag{3}$$

Man beachte: Wenn f in x differenzierbar ist, so ist die Ableitung von f im Punkt x durch (3) bezüglich der kanonischen Basen in $\mathbb{R}^N$ und $\mathbb{R}^M$ gegeben.
Uns interessiert nun die Umkehrung, und diese ist nicht ohne zusätzliche Voraussetzungen richtig.

Definition 9.44 *(Mehrfach stetig differenzierbar)*
Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und existieren zu gegebenen $x \in \Omega$ die partiellen Ableitungen von $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ und sind diese stetig in Ω, so nennt man f einmal stetig differenzierbar in Ω. Wir schreiben $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$.
Sei $k \in \mathbb{N}$. Sind $f, \partial_1 f, \ldots, \partial_N f \in C^k(\Omega)$ so nennt man f (k+1)-mal stetig differenzierbar und schreibt $f \in C^{k+1}(\Omega, \mathbb{R}^M)$.

Satz 9.45 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ offen und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$, dann ist f in jedem Punkt $x \in \Omega$ differenzierbar und die Ableitung ist durch die Jacobimatrix (3) gegeben.*

Lemma 9.46 *Seien (X, d_x) und (Y, d_y) metrische Räume und die Funktion $f : X \to Y$ sei stetig. Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig, also*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0 \;\; \forall x_1, x_2 \in X \;:\; d_x(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_y\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$$

Definition 9.47 *((Parametrisierung von) Kurven)*
Sei X ein Banachraum und $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall . Eine stetige Funktion $\gamma : I \to X$ nennt man (Parametrisierung einer) stetigen Kurve. Ist $\gamma \in C^1(I, X)$ so spricht man von einer Parametrisierung einer stetig diff'baren Kurve. Ist $\gamma \in C^1(I, X)$ und gilt $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so nennt man γ Parametrisierung einer glatten Kurve.

Satz 9.48 *Sei $I := [a, b]$ ein kompaktes Intervall und $f \in C^0(I, \mathbb{R}^N)$ sei in (a, b) diff'bar. Dann gilt:*

$$\left(\frac{2}{b-a}\right) |f(b) - f(a)| \leq \sup_{t \in (a,b)} |f'(t)|$$

Definition 9.48 *((lokale) Extrema)*
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $f : M \to \mathbb{R}$ eine Funktion auf M. Wir sagen
- f nimmt genau dann in $\hat{x} \in M$ ihr Maximum an, wenn $f(\hat{x}) \geq f(x)$ für alle $x \in M$ gilt.
- f nimmt genau dann in $\hat{x} \in M$ ein lokales Maximum an, wenn es eine offene Umgebung U von $\hat{x}$ gibt, so dass für alle $x \in U$ gilt: $f(\hat{x}) \geq f(x)$.
Analog definieren wir (lokale) Minima.

Satz 9.49 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offene Teilmenge und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ diff'bar ind $\hat{x} \in \Omega$. Besitzt f in $\hat{x}$ ein lokales Extremum, so ist $\nabla f(\hat{x}) = 0$.*

Definition 9.50 *(Fixpunkt)*
Sei (M, d) ein metrischer Raum und $\Phi : M \to M$ eine Abbildung von M in sich. Ein Element $x \in M$ heißt Fixpunkt von Φ, wenn $\Phi(x) = x$ ist.

Satz 9.51 *(Banachscher Fixpunktsatz)*
Sei (M, d) ein vollständig metrischer Raum und $\Phi : M \to M$ eine kontrahierende Abbildung von M in sich, d.h. mit einer Konstanten $q \in (0, 1)$ gilt:

$$\forall_{x,y \in M} \quad d(\Phi(x), \Phi(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$

Dann besitzt Φ genau einen Fixpunkt $\hat{x}$, und für jedes $x_0 \in M$ konvergiert die durch $x_{n+1} := \Phi(x_n)$ rekursiv gegebene Folge gegen $\hat{x}$. Des weiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung

$$d(\hat{x}, x) \leq \frac{q^n}{1-q} d(x_1, x_0)$$

Beweis. (Skizze)
1) Eindeutigkeit: Nimm an es gäbe zwei Fixpunkte $\hat{x}$ und $\tilde{x}$ von Φ, dann betrachte

$$d(\hat{x}, \tilde{x}) = d(\Phi(\hat{x}), \Phi(\tilde{x})) \leq q \cdot d(\hat{x}, \tilde{x})$$

und erhalte $\hat{x} = \tilde{x}$.
2) Existenz: Betrachte die im Satz definierte Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und zeige

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \quad d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n \cdot d(x_1, x_0)$$

per Induktion. Betrachte anschließend $d(x_n, x_{n+m})$. Mit der oben gezeigten Regel folgt, dass $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist. Diese konvergiert, denn M ist ein vollständiger metrischer Raum. Nenne den Grenzwert $\hat{x}$. Betrachte nun

$$\Phi(\hat{x}) = \lim_{n \to \infty} \Phi(x_n) = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \hat{x}$$

3. Abschätzung: Betrachte den Grenzwert von $d(\hat{x}, x_{n+m}) = 0$ für $m \to \infty$ und festes n. □

Definition und Lemma 9.52 *Sei $\gamma \in C^0([0,1],\mathbb{R}^N)$, dann definieren wir*

$$\int_0^1 \gamma(t)dt := \begin{pmatrix} \int_0^1 \gamma_1(t)dt \\ \vdots \\ \int_0^1 \gamma_N(t)dt \end{pmatrix}$$

Es gilt

$$\| \int_0^1 \gamma(t)dt \| \;\le\; \left(\int_0^1 \| \gamma(t) \|^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Satz 9.53 *(Satz von der Umkehrfunktion)*
Sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Ist $f'(\hat{\mathrm{x}}) = J_f(\hat{\mathrm{x}})$ für ein $\hat{\mathrm{x}} \in \Omega$ invertierbar (d.h. $J_f(\hat{\mathrm{x}}) \in \mathrm{GL}_N(\mathbb{R})$), so gibt es offene Umgebungen U von $\hat{\mathrm{x}}$ und V von $\hat{\mathrm{y}} := f(\hat{\mathrm{x}})$ derart, dass U via f bijektiv auf V abgebildet wird und es gibt eine Funktion $g : V \to U$ mit $g \circ f_{|U} = \mathrm{id}_U$ sowie $f_{|U} \circ g = \mathrm{id}_V$. Weiter ist g diff'bar in $\hat{\mathrm{y}}$ mit $g'(\hat{\mathrm{y}}) = (J_f(\hat{\mathrm{x}}))^{-1}$.

Beweis. (Skizze)
Zunächst muss die Gleichung $f(x) = y$ bei gegebenem y nahe bei $\hat{\mathrm{y}} := f(\hat{\mathrm{x}})$ aufgelöst werden. Mit $B := J_f(\hat{\mathrm{x}})^{-1}$ ist diese Gleichung äquivalent zu

$$x = \Psi(x) \qquad \text{mit } \Psi(x) := x - B(f(x) - y)$$

1. Zeige zunächst, dass es ein $\rho_0 > 0$ gibt, so dass gilt

$$\forall_{0<\rho<\rho_0} \forall_{x,z \in \mathrm{K}_\rho(\hat{\mathrm{x}})} \qquad \| \Psi(x) - \Psi(z) \| \;\le\; \frac{1}{2} \, \| x - z \|$$

2. Zeige nun, dass für y hinreichend nahe bei $\hat{\mathrm{y}}$ Ψ die abgeschlossene Kugel um $\hat{\mathrm{x}}$ in sich abbildet, also dass $\Psi\Big(\mathrm{K}_\rho(\hat{\mathrm{x}}) \Big) \subseteq \mathrm{K}_\rho(\hat{\mathrm{x}})$ gilt. Und erhalte $y \in \mathrm{U}_\delta(2 \| B \|)$ mit $\delta := \frac{\rho}{2 \| B \|}$. Bezeichne nun F die Einschränkung von f auf $\mathrm{K}_\rho(\hat{\mathrm{x}})$, so ist

$$U := F^{-1}\Big(\mathrm{U}_\delta(\hat{\mathrm{y}}) \Big)$$

eine offene Umgebung von $\hat{\mathrm{x}}$ und f bildet U bijektiv auf $\mathrm{U}_\delta(\hat{\mathrm{y}})$ ab. **3.** Frr den Abstand von $F^{-1}(y) =: x = x - B(f(x) - y)$ und $F^{-1}(\hat{\mathrm{y}}) =: \hat{\mathrm{x}} = \hat{\mathrm{x}} - B(f(\hat{\mathrm{x}}) - \hat{\mathrm{y}})$ berechne die Abschätzung

$$\| x - \hat{\mathrm{x}} \| \;\le\; 2 \cdot \| B \| \cdot \| y - \hat{\mathrm{y}} \|$$

und erhalte die diff'barkeit von F^{-1} in $\hat{\mathrm{y}}$ durch

$$\begin{aligned} y - \hat{\mathrm{y}} &= F(x) - F(\hat{\mathrm{x}}) = J_f(\hat{\mathrm{x}})(x - \hat{\mathrm{x}}) + r(x - \hat{\mathrm{x}}) \cdot \| x - \hat{\mathrm{x}} \| \\ \Rightarrow \quad F^{-1}(y) - F^{-1}(\hat{\mathrm{y}}) &= x - \hat{\mathrm{x}} = J_f(\hat{\mathrm{x}})^{-1}(y - \hat{\mathrm{y}}) + J_f(\hat{\mathrm{x}})^{-1} \cdot r(x - \hat{\mathrm{x}}) \cdot \| x - \hat{\mathrm{x}} \| \end{aligned}$$

Mit der obigen Abschätzung strebt x gegen $\hat{\mathrm{x}}$, wenn y gegen $\hat{\mathrm{y}}$ strebt, also geht auch der Restterm $r(x - \hat{\mathrm{x}})$ gegen Null. □

Satz 9.56 *Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ und $k \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und sei weiter $\Phi \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$ ein Diffeomorphismus (d.h.Φ ist eine bijektive stetig differenzierbare Abbildung, deren Umkehrabbildung auch stetig differenzierbar ist.) von Ω auf $\Phi(\Omega) =: \Xi$. Dann ist $\Phi^{-1} \in C^k(\Xi, \mathbb{R}^N)$.*

Beweis. Da Φ ein Diffeomorphismus ist gilt $\Phi^{-1} \in C^1(\Xi, \mathbb{R}^N)$ und es gilt

$$\left(\Phi^{-1}\right)' = (\Phi')^{-1} \circ \Phi^{-1}$$

Per Induktionsannahme sei $\Phi^{-1} \in C^{k-1}(\Xi, \mathbb{R}^N)$, dann gilt sofort $\Phi \in C^k(\Xi, \mathbb{R}^N)$, denn $(\Phi')^{-1} \circ \Phi^{-1}$ muss $k-1$-mal stetig diff'bar sein. Nach Induktionsannahme ist Φ^{-1} $(k-1)$-mal stetig diff'bar und nach Voraussetzung ist Φ k-mal stetig diff'bar. Dann ist $(\Phi')^{-1}$ k-mal stetig diff'bar. □

Satz 9.57 *(Satz von der impliziten Funktion)*
Seien $N, M \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \mathbb{R}^{N+M}$ eine offenen Teilmenge und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ mit $f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) = 0$ für $(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) \in \Omega$ mit $\hat{\mathrm{x}} \in \mathbb{R}^N$ und $\hat{\mathrm{t}} \in \mathbb{R}^M$. Weiter besitze die die Abbildung $f'(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) := J_f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}})$ besitze Höchstrang N. Insbesondere sei

$$D_x f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) := \Big(\partial_1 f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}), \ldots, \partial_N f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}})\Big)$$

invertierbar (d.h. $\det(D_x) \neq 0$). Dann gibt es Umgebungen X von $\hat{\mathrm{x}}$ und T von $\hat{\mathrm{t}}$ sowie eine Funktion $g \in C^1(T, X)$ derart, dass gilt

$$\forall_{(x,t) \in X \times T} \qquad f(x, t) = 0 \Leftrightarrow x = g(t)$$

Ist mit $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^N)$, so ist $g \in C^k(T, \mathbb{R}^N)$

Beweis. (Skizze)
Definiere zunächst eine Hilfsfunktion

$$\begin{array}{cccc} \tilde{\phi}: & \Omega & \to & \mathbb{R}^{N+M} \\ & \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} f(x,t) \\ t \end{pmatrix} \end{array}$$

Betrachte nun die Ableitung von $\tilde{\phi}$

$$J_{\tilde{\phi}}(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) = \begin{pmatrix} \partial_1 f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) & \ldots & \partial_N f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) & \partial_{N+1} f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) & \ldots & \partial_{N+M} f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) \\ 0 & \ldots & 0 & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \ldots & 0 & & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_x & D_t \\ 0 & \mathrm{id}_M \end{pmatrix}$$

mit $D_t := D_t f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}) := \Big(\partial_{N+1} f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}}), \ldots, \partial_{N+M} f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}})\Big)$ und $D_x := D_x f(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}})$. Die Ableitung ist Invertierbar

$$\left(J_{\tilde{\phi}}(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}})\right)^{-1} = \begin{pmatrix} D_x^{-1} & -D_x^{-1} D_t \\ 0 & \mathrm{id}_M \end{pmatrix}$$

Wende nun den Satz von der Umkehrfunktion an, und erhalte Umgebungen $U, V \subset \mathbb{R}^{N+M}$ von $(\hat{\mathrm{x}}, \hat{\mathrm{t}})$ bzw. von $(0, \hat{\mathrm{t}})$. Weiter gibt es Umgebungen $X \in \mathbb{R}^N$ von $\hat{\mathrm{x}}$ und $\hat{T} \in \mathbb{R}^M$ von $\hat{\mathrm{t}}$ mit $X \times \hat{T} \subset U$ derart, dass $X \times \hat{T}$ Diffeomorph via $\tilde{\phi}_{|U}$ auf eine Umgebung $\hat{V} \in \mathbb{R}^M$ von $(0, \hat{\mathrm{t}})$ abgebildet wird. Mit der Projektion $\pi : \mathbb{R}^{N+M} \to \mathbb{R}^M$ erhalte eine Umgebung $T \subset \mathbb{R}^M$ derart, dass $T \subset \hat{T} = \pi(\hat{V})$ und

$\{0\} \times T \subset \hat{V}$ gelten. Bezeichne ϕ die Einschränkung von $\tilde{\phi}$ auf $X \times T$, so gibt es eine einmal stetig diff'bare Umkehrabbildung ϕ^{-1} und wir erhalten für $(x,t) \in X \times T$:

$$\begin{aligned} f(x,t) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad \phi(x,t) = (0,t) \Leftrightarrow (x,t) = \phi^{-1}(0,t) \\ &\Leftrightarrow \quad x = p \circ \phi^{-1} \circ \iota(t) \end{aligned}$$

mit

$$\iota : \mathbb{R}^M \xrightarrow{t \mapsto (0,t)} \mathbb{R}^{N+M} \qquad p : \mathbb{R}^{N+M} \xrightarrow{(x,t) \mapsto x} \mathbb{R}^N$$

Erhalte also $g := p \circ \phi^{-1} \circ \iota$. $\square$

Folgerung 9.58 *Mit den Bezeichnungen aus 9.57 ist für $t \in T$*

$$g'(t) := J_g(t) = -\Big(D_x f\big(g(t),t\big)\Big)^{-1} D_t f\big(g(t),t\big)$$

Begin der Vorlesung Analysis III

10 Extrema

Definition 10.1 *(Extrema unter Nebenbedingungen)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ eine offenen Teilmenge und $u : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Weiter sei $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^M)$ mit $0 < M < N$ gegeben. Wir sagen: In $\hat{x} \in \Omega$ liegt ein (lokales) Maximum von u unter der Nebenbedingung $f(x) = 0$ vor, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
(1) $f(\hat{x}) = 0$
(2) $\exists_{\mathrm{U}_\delta(\hat{x})\subset\Omega} \quad u(\hat{x}) \geq u(x)$ für alle $x \in \mathrm{U}_\delta(\hat{x})$ Analog definieren wir (lokale) Minima.

Definition und Satz 10.2 *(Lagrange Multiplikatorenregel)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{M}})$ mit $0 < M < N$ gegeben. Weiter sei $u : \Omega \to \mathbb{R}$ diff'bar in einem Punkt $\hat{x} \in \Omega$ und besitze dort ein Extremum unter der Nebenbedingung $f(x) = 0$. Dann sind die Vektoren $\nabla u(\hat{x}), \nabla f_1(\hat{x}), \ldots, \nabla f_M(\hat{x})$ linear abhänging. Sind insbesondere $\nabla f_1(\hat{x}), \ldots, \nabla f_M(\hat{x})$ linear unabhängig, so gibt es $\lambda_1, \ldots, \lambda_M \in \mathbb{R}$ derart, dass

$$\nabla u(\hat{x}) = \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \cdot \nabla f_m(\hat{x})$$

Diese λ_m heißen die Lagrangeschen Multiplikatoren.

Beweis. (Skizze)
1. O.B.d.A. liege in $\hat{x}$ ein lokales Maximum unter der Nebenbedingung $f(\hat{x}) = 0$ vor. Dann gelten (1) und (2) aus Def. 10.1. Betrachte die Ableitung von f

$$J_f(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} f_1(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial}{\partial \hat{x}_N} f_1(\hat{x}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \hat{x}_1} f_M(\hat{x}) & \ldots & \frac{\partial}{\partial \hat{x}_N} f_M(\hat{x}) \end{pmatrix}$$

Da $M < N$ suche nach M-Spalten, so dass die zugehörige $M \times M$-Matrix $A(\hat{x})$ invertierbar ist. $A(\hat{x})$ existiert, da nach Voraussetung die Gradienten von f linear unabhängig sind.
2. Numeriere $\hat{x}$ entsprechend um und setze $\hat{x}' := (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_M)$ und $\hat{x}'' := (\hat{x}_{M+1}, \ldots, \hat{x}_N)$. Wende den Satz von der impliziten Funktion an und erhalte Umgebungen X' von $\hat{x}'$ und X'' von $\hat{x}''$ sowie eine Funktion $g \in C^1(X'', \mathbb{R}^{\mathrm{M}})$ mit

$$f\big(g(\hat{x}''), \hat{x}''\big) = 0$$

3. Definiere $v := u \circ \phi$ mit

$$\begin{array}{rcl} \phi : X'' & \to & \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ x'' & \mapsto & \big(g(x''), x''\big) \end{array}$$

Es gilt: v hat in $\hat{x}''$ eine (lokale) Maximalstelle und ist diff'bar in $\hat{x}''$ also ist

$$0 = \nabla v(\hat{x}'') = (\phi')^T(\hat{x}'') \cdot \nabla u(\hat{x}) = 0$$

Betrachte die Ableitung von ϕ

$$\phi'(\hat{x}'') := J_\phi(\hat{x}'') = \begin{pmatrix} \partial_{M+1}\, g(\hat{x}'') & \ldots & \partial_{M+K}\, g(\hat{x}'') \\ e''_{M+1} & \ldots & e''_{M+K} \end{pmatrix}$$

mit $K = N - M$ und e_i der i-te Einheitsvektor des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Es gilt

$$\nabla v(\hat{\mathrm{x}}'') = 0 \;\Leftrightarrow < \begin{pmatrix} \partial_{M+i}\, g(\hat{\mathrm{x}}'') \\ e''_{M+i} \end{pmatrix} =: a_i, \nabla u(\hat{\mathrm{x}}) >= 0 \qquad \forall_{i=1...K}$$

Daher ist $\nabla u(\hat{\mathrm{x}}) \in T^{\perp}$ mit $T^{\perp} := \mathrm{span}\{a_i | i = 1...K\}$ und $\dim(T^{\perp}) = N - K = M$.
4. Da die Wahl von g nicht kanonisch ist finde basis von $T^{\perp}$ unabhängig von g. Es gilt:

$$\dim\Big(\mathrm{span}\{\nabla f_1(x), \dots, \nabla f_M(x)\}\Big) = M = \dim(T^{\perp})$$

Da nach Vor. alle Gradienten linear unabhängig sind, bilden diese eine Basis von $T^{\perp}$, damit folgt die Behauptung. □

Satz 10.3 *(Spektralsatz)*
Jede reelle, symmetrische $N \times N$-Matrix A beitzt ein vollständiges Orthogonalsystem $\{x^{(1)}, \dots, x^{(N)}\}$ von Eigenvektoren zu Eigenwerten $\{\lambda_1, \dots, \lambda_N\}$ von A. Diese sind die einzigen Eigenwerte von A.

Beweis. (Idee)
Definiere

$$\begin{aligned} u : \mathbb{R}^{\mathrm{N}} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto < x, Ax > \end{aligned}$$

und suche für $k = 1...N$ die Maxima unter den Nebenbedingungen

$$f_1(x) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_{i=2...k}\; f_i(x) =< x, x^{(i-1)} >= 0$$

mit $x^{(i)}$ sind die zuvor gefundenen Maximalstellen und λ_i die Lagrangeschen Multiplikatoren.

11 Der Satz von Taylor

Lemma 11.1 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(\Omega)$ eine Funktion auf Ω. Weiter existiere $\partial_1\partial_2 f$ in Ω und sei stetig, dann existiert auch $\partial_2\partial_1 f$ in Ω und beide sind einander gleich.*

Beweis. (Skizze)
Idee: Zeige die Existenz von $\partial_2\partial_1 f$ und die Gleichheit mit $\partial_1\partial_2 f$ in einem beliebigen Punkt von Ω. O.B.d.A. sei dies $x := (0, 0) \in \Omega$.
1. Wähle δ hinreichend klein, so dass $[-\delta, \delta] \times [-\delta, \delta] \subset \Omega$ gilt. Betrachte nun

$$A := \frac{1}{hk}\Big(f(h, k) - f(h, 0) - f(0, k) + f(0, 0)\Big) \qquad \text{mit } h, k \in (-\delta, \delta)$$

und erhalte

$$\frac{1}{k}\cdot\int_0^k \frac{1}{h}\big[\partial_2 f(h, s) - \partial_2 f(0, s)\big]ds \;= A =\; \frac{1}{k}\cdot\big[\partial_1 f(\theta h, k) - \partial_1 f(\theta h, 0)\big] \;\text{ mit } \theta := \theta(h, k) \in (0, 1)$$

2. Betrachte den Grenzwert für $h \to 0$

$$\frac{1}{k}\cdot\int_0^k \partial_1\partial_2 f(0, s)ds = \frac{1}{k}\cdot\big[\partial_1 f(0, k) - \partial_1 f(0, 0)\big]$$

Durch den Grenzübergang von $k \to 0$ folgt die Aussage für den Punkt $(0, 0) \in \Omega$ □

Definition 11.2 *(Multiindex)*
Ein Multiindex α der Länge N ist ein Element von $\mathbb{N}_0^N$, also ein Vektor des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ mit ganzzaligen, nicht negativen Komponenten. Für $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ definieren wir

$$x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_N^{\alpha_N} = \prod_{i=1}^N x_i^{\alpha_i}$$

Analog definieren wir ∂^α. Die Ordnung von α definieren wir durch

$$|\alpha| := \sum_{i=1}^N \alpha_i$$

Die Fakultät von α definieren wir als

$$\alpha! := \prod_{i=1}^N (\alpha_i!)$$

Für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^N$ definieren wir weiter

$$\begin{aligned}
\alpha \leq \beta \quad &:\Leftrightarrow \quad \forall_{i=1\ldots N}\ \alpha_i \leq \beta_i \\
\alpha < \beta \quad &:\Leftrightarrow \quad \alpha \leq \beta \text{ und } \exists_{i \in \{1,\ldots,N\}}\ \alpha_i < \beta_i \\
&\quad\ \ \Leftrightarrow \alpha \leq \beta \text{ und } |\alpha| < |\beta|
\end{aligned}$$

Falls $\alpha \leq \beta$ definieren wir

$$\binom{\beta}{\alpha} := \frac{\beta!}{\alpha! \cdot (\beta - \alpha)!} = \prod_{i=1}^N \binom{\beta_i}{\alpha_i}$$

Dabei sind die Summe und die Differenz von α, β wie in $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ erklärt, es ist jedoch klar, dass $\alpha - \beta$ nur für $\beta \leq \alpha$ ein Multiindex ist.

Satz 11.3 *(Polynomische Formel)*
Für alle $p \in \mathbb{N}$ und für alle $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ gilt

$$\left(\sum_{n=1}^N x_n\right)^p = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha!} \cdot x^\alpha$$

Beweis. Induktiv über die Dimension N. Hierbei ist der Induktionsanfang $N = 1$ trivial. Für den Schluss von N auf $N + 1$ betrachte

$$\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{N+1} x_n\right)^p &= \left(x_{N+1} + \sum_{n=1}^N x_n\right)^p \\
&= \sum_{q=1}^p \binom{p}{q} \cdot \left(\sum_{n=1}^N x_n\right)^q \cdot \left(x_{N+1}\right)^{p-q} \quad =: R
\end{aligned}$$

mit $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ und $\hat{\mathrm{x}} = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ mit $(\hat{\mathrm{x}}, x_{N+1}) = x$ gilt dann nach Induktionsannahme

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{q=0}^p \frac{p!}{(p-q)! \cdot q!} \left(\sum_{|\beta|=q} \frac{q!}{\beta!}\, \hat{\mathrm{x}}^\beta\right) \left(x_{N+1}\right)^{p-q} \\
&= \sum_{q=0}^p \sum_{|\beta|=q} \frac{p!}{(p-q)! \cdot \beta!}\, \hat{\mathrm{x}}^\beta \left(x_{N+1}\right)^{p-q}
\end{aligned}$$

Fasse nun β und $(p-q)$ zusammen zu $\alpha \in \mathbb{N}_0^{N+1}$, dann gilt $|\alpha| = p$ und es folgt die Behauptung $\square$

Definition 11.4 *(k-mat stetig diff'bar)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Menge und $u \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{M}})$ sowie $k \in \mathbb{N}$. Wir nennen u k-mal stetig diff'bar, wenn sämtliche partiellen Ableitung von u bis zur Ordnung k existieren und stetige Funktionen auf Ω sind. Wir schreiben dann

$$u \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{M}})$$

Satz 11.5 *Seien Ω, N, M, u wie in Definition 11.4 gegeben. Weiter möge $\partial^\alpha u$ für alle $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ mit $|\alpha| \leq p$ in Ω existieren. Dann ist $u \in C^p(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{M}})$ und alle partiellen Ableitungen der selben Ordnung sind einander gleich.*

Beweis. (Idee)
Verwende Lemma 10.1 um die Differentationsreihenfolge sukzessive zu vertauschen.

Definition und Satz 11.6 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Menge und für $p \in \mathbb{N}$ sei $f \in C^p(\Omega)$. Ferner sei $\hat{\mathrm{x}} \in \Omega$. Dann gibt es genau ein Polynom P im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ der mit Grad $\deg(P) \leq p$ und der Eigenschaft:*

$$\forall_{|\alpha| \leq p} \quad \partial^\alpha P(\hat{\mathrm{x}}) = \partial^\alpha f(\hat{\mathrm{x}})$$

Dieses Polynom ist gegeben durch

$$P(x) = \sum_{|\alpha| \leq p} \frac{1}{\alpha!} \Big(\partial^\alpha f(\hat{\mathrm{x}})\Big)(x - \hat{\mathrm{x}})^\alpha$$

Dieses Polynom heißt p-tes Taylorpolynom von f in $\hat{\mathrm{x}}$.

Beweis. Setze

$$P(x) := \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha (x - \hat{\mathrm{x}})^\alpha$$

Bilde nun $\partial^\beta P(\hat{\mathrm{x}}) = a_\alpha \cdot \alpha!$ und wähle a_α so, dass $a_\alpha \cdot \alpha! = \partial^\beta f(\hat{\mathrm{x}})$ also

$$a_\alpha := \frac{1}{\alpha!} \partial^\beta f(\hat{\mathrm{x}})$$

$\square$

Lemma 11.7 *Mit einem $\rho > 0$ sei $U := \mathrm{U}_\rho(0)$. Dann gilt für alle $m \in \mathbb{N}$ und $f \in C^m(U)$ sowie für alle $x \in U$ und $t \in (-1, 1)$ die Formel*

$$f_x^{(m)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha| = m} \frac{m!}{\alpha!} \cdot \big(\partial^\alpha f(tx)\big) \cdot x^\alpha$$

Beweis. (Skizze)
Zeige zunächst per Induktion, dass mit von f unabhängigen Konstanten a_α für alle $t \in (-1, 1)$ gilt:

$$f_x^{(m)}(t) \;=\; \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \partial^\alpha f(tx) x^\alpha$$

Bestimme nun die a_α durch berechnung dieser für geeignete Funktionen. Setze $p(x) := x^\alpha$ mit $|\alpha| = m$ und betrachte

$$p_x(t) \;=\; x^\alpha t^m \quad \text{also } p_x^{(m)}(t) = m! \cdot x^\alpha$$

sowie für $|\beta| = m$

$$\partial^\beta p(x) = \begin{cases} \alpha! & \text{falls } \beta = \alpha \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Also ist für jedes $x \in U$ und für alle $t \in (-1, 1)$ folgende Gleichung richtig:

$$m! \cdot x^\alpha \;=\; p_x^{(m)}(t) \;=\; \sum_{|\beta|=m} a_\alpha \cdot \big(\partial^\beta p(tx)\big) \cdot x^\beta \;=\; a_\alpha \cdot \alpha! \cdot x^\alpha$$

□

Ist nun $f \in C^{m+1}\big(\operatorname{U}_\rho(0)\big)$ so liefert der Satz von Taylor aus dem vergangenen Semester (mit Lagrangeschem Restglied) für $x \in \operatorname{U}_\rho(0)$ und einem $t \in (0, 1)$ die folgende Gleichung

$$f(x) = f_x(1) = \sum_{n=0}^{m} \frac{1}{n!} f_x^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!} f_x^{(m+1)}(t)$$

Mit Lemma 11.7 und einem $t \in (0, 1)$ folgt nun

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{m} \sum_{|\alpha|=n} \frac{1}{\alpha!}\big(\partial^\alpha f(0)\big) \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha}\big(\partial^\alpha f(tx)\big) \cdot x^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\big(\partial^\alpha f(0)\big) \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha}\big(\partial^\alpha f(tx)\big) \cdot x^\alpha \end{aligned}$$

Es ergibt sich der folgende

Satz 11.8 *(Satz von Taylor)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Teilmenge und m eine natürliche Zahl. Weiter sei f eine $(m+1)$-mat stetig diff'bare Funktion auf Ω. Sind $\hat{\mathrm{x}}, x \in \Omega$ derart, dass die Strecke $\{\, tx + (1-t)\,\hat{\mathrm{x}} \mid t \in [0,1] \,\}$ ganz in Ω liegt, so gibt es ein $t \in (0, 1)$ derart, dass gilt:

$$f(x) \;=\; \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!}\big(\partial^\alpha f(0)\big) \cdot x^\alpha + \sum_{|\alpha|=m+1} \frac{1}{\alpha}\big(\partial^\alpha f(tx)\big) \cdot x^\alpha$$

Definition und Satz 11.9 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ offen und $f \in C^2(\Omega)$, dann definieren wir für $x \in \Omega$*

$$f''(x) = H_f(x) \;=\; \big(\partial_i \partial_j f(x)\big)_{0<i,j\le 2} \;=\; \begin{pmatrix} \partial_1\partial_1 f(x) & \partial_2\partial_1 f(x) \\ \partial_1\partial_2 f(x) & \partial_2\partial_2 f(x) \end{pmatrix}$$

die Hessematrix von f. Die Hessematrix ist symmetrisch. Sei nun $\hat{\mathrm{x}} \in \Omega$ ein kritischer Punkt von f, also gelte $\nabla f(\hat{\mathrm{x}}) = 0$, dann liegt in $\hat{\mathrm{x}}$ ein lokales Minimum (Maximum) vor, wenn $H_f(\hat{\mathrm{x}})$ positiv (negativ) definit ist. Eine symmetrische Matrix $A \in \operatorname{Mat}(n, n)$ heißt positiv (negativ) definit, wenn eine Konstante $\gamma > 0$ existiert mit

$$\forall_{\zeta \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \quad < A\zeta, \zeta > \ge \; \gamma \,\|\, \zeta \,\|^2 \qquad \Big(< A\zeta, \zeta > \le \; -\gamma \,\|\, \zeta \,\|^2\Big)$$

Beweis. Betrachte das zweite Taylorpolynom von f

$$\begin{aligned} T_{2,f}(x) &= f(\hat{\mathrm{x}}) + \sum_{j=1}^{N} \partial_j f(\hat{\mathrm{x}}) \cdot (x_j - \hat{\mathrm{x}}_j) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{N} \big(\partial_i \partial_j f\big)(\hat{\mathrm{x}}) \cdot (x_i - \hat{\mathrm{x}}_i)(x_j - \hat{\mathrm{x}}_j) \\ &= f(\hat{\mathrm{x}}) + < \nabla f(\hat{\mathrm{x}}), x - \hat{\mathrm{x}} > + \frac{1}{2} < H_f(\hat{\mathrm{x}})(x - \hat{\mathrm{x}}), x - \hat{\mathrm{x}} > \end{aligned}$$

O.B.d.A. sei die Hessematrix $H_f(\hat{\mathrm{x}})$ positiv definit, dann gilt mit $\gamma > 0$ aus der Definition und einem $\delta > 0$ für alle $x \in \mathrm{U}_\delta(0) \subset \Omega)$

$$\begin{aligned} f(x) &= f(\hat{\mathrm{x}}) + \frac{1}{2} < H_f(\hat{\mathrm{x}}) \cdot (x - \hat{\mathrm{x}}), x - \hat{\mathrm{x}} > + \frac{1}{2}\Big(H_f\big(\,\hat{\mathrm{x}} + t(x - \hat{\mathrm{x}})\big)\Big) \\ &\geq f(\hat{\mathrm{x}}) + \frac{\gamma}{2} \cdot \| \, x - \hat{\mathrm{x}} \, \|^2 - \frac{1}{2} \| \, H_f\big(\,\hat{\mathrm{x}} + t(x - \hat{\mathrm{x}})\big) - H_f(\hat{\mathrm{x}}) \, \| \cdot \| \, x - \hat{\mathrm{x}} \, \|^2 \end{aligned}$$

Ist δ hinreichend klein, so gilt für $y \in \mathrm{U}_\delta(\hat{\mathrm{x}})$ die Abschätzung

$$\| \, H_f(y) - H_f(\hat{\mathrm{x}}) \, \| \leq \frac{\gamma}{2}$$

Und somit für alle $\hat{\mathrm{x}} \neq x \in \mathrm{U}_\delta(\hat{\mathrm{x}})$

$$f(x) \geq f(\hat{\mathrm{x}}) + \frac{\gamma}{4} \cdot \| \, x.\hat{\mathrm{x}} \, \|^2 > f(\hat{\mathrm{x}})$$

Es liegt also in $\hat{\mathrm{x}}$ ein lokales Minimum von f vor. □

Satz 11.10 *Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ ist genau dann positiv (bzw negativ) definit, wenn ihre sämtlichen Eigenwerte positiv (bzw. negativ) sind.*

Beweis. (Idee)
Verwende die Funktion aus dem Beweis von Satz 10.3 (Spektralsatz)

Bemerkung (Kriterium für positive/negative Definitheit)
Eine symmetrische Matrix $A \in \mathrm{Mat}(n, n)$ ist genau dann
- positiv definit, wenn die Determinanten aller Untermatritzen positiv sind.
- negativ definit, wenn $a_{1,1} < 0$ ist und die Unterdeterminanten alternierende Vorzeichen haben

Satz 11.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Teilmenge und $f \in C^2(\Omega)$ eine Funktion mit kritischem Punkt $\hat{\mathrm{x}} \in \Omega$. Dann gelten*

1. *Ist $H_f(\hat{\mathrm{x}})$ positiv definit, so hat f in $\hat{\mathrm{x}}$ ein lokales Minimum*

2. *Ist $H_f(\hat{\mathrm{x}})$ negativ definit, so hat f in $\hat{\mathrm{x}}$ ein lokales Maximum*

3. *Besitzt $H_f(\hat{\mathrm{x}})$ sowohl einen positiven als auch einen negativen Eigenwert, so hat f in $\hat{\mathrm{x}}$ einen Sattelpunkt, d.h. es gibt zwei orthogonale Graden durch $\hat{\mathrm{x}}$ derart, dass f längs der einen in $\hat{\mathrm{x}}$ minimal und längs der anderen in $\hat{\mathrm{x}}$ maximal wird.*

Beweis. 1. und 2. bereits in Satz 11.9 bewiesen. Zum Nachweis von 3. nimm an, dass $-\lambda$ und μ für $\lambda, \mu > 0$, Eigenwerte von $H_f(\hat{\mathrm{x}})$ seien. Hierzu seien u, v normierte, orthogonalisierte Eigenvektoren. Mit Satz 11.8 und $x := \hat{\mathrm{x}} + su$ und $|s|$ genügend klein erhält man

$$\begin{aligned} f(\hat{\mathrm{x}} + su) &= f(\hat{\mathrm{x}}) + \frac{1}{2}s^2 \cdot < H_f(\hat{\mathrm{x}})u, u > + \frac{1}{2}s^2 \cdot < \Big(H_f(\hat{\mathrm{x}} + tu) - H_f(\hat{\mathrm{x}})\Big)u, u > \\ &= f(\hat{\mathrm{x}}) - \frac{1}{2}\lambda s^2 \cdot \| u \|^2 + \frac{1}{2}s^2 \cdot \| H_f(\hat{\mathrm{x}} + tu) - H_f(\hat{\mathrm{x}}) \| \cdot \| u \|^2 \\ &\leq f(\hat{\mathrm{x}}) - \frac{1}{4}\lambda s^2 < f(\hat{\mathrm{x}}) \qquad \text{falls } s \neq 0 \end{aligned}$$

sofern $|s|$ so klein ist, dass für $|t| \leq |s|$ gilt

$$\| H_f(\hat{\mathrm{x}} + tu) - H_f(\hat{\mathrm{x}}) \| < \frac{\lambda}{2}$$

Analog erhalten wir für kleines $|s| \neq 0$

$$f(\hat{\mathrm{x}} + sv) \geq f(\hat{\mathrm{x}}) + \frac{1}{4}\mu s^2 > f(\hat{\mathrm{x}})$$

$\square$

12 K-Flächen im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$

Definition 12.1 *(Überdeckung)*
Sei K eine Telmenge eines metrischen Raums (M, d). Unter einer offenen Überdekung von K verstehen wir eine Familie $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ offener Mengen mit

$$K \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

Hier ist Λ eine Indexmenge. Eine endliche Teilüberdeckung von K ist eine endliche Teilfamilie

$$\{O_{\lambda_1}, \ldots, O_{\lambda_L}\} \;=\; \{O_{\lambda_l} | 1 < l < L \text{ und } \lambda_1, \ldots, \lambda_L \in \Lambda\}$$

die K bereits überdeckt, d.h.

$$K \subset \bigcup_{l=1}^{L} O_{\lambda_l}$$

Satz 12.2 *(Heine-Borellscher Überdeckungssatz)*
Eine Teilmenge K eines metrischen Raums (M, d) ist genau dann Kompakt, wenn jede offene Überdeckung von K eine endliche Teilüberdeckung enthält. D.h. in metrischen Räumen sind Folgen- und Überdeckungskompaktheit äquivalent.

Beweis. Zeige zunächst: Überdeckungskompaktheit impliziert Folgenkompaktheit.
Sei also $x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in K derart, dass $F := \{x_n | n \in \mathbb{N}\}$ eine unendliche Menge ist. Zeige $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält eine Teilfolge, die gegen ein Element aus K konvergiert. Wenn F keinen Häufungspunkt in K besitzt, so gibt es zu jedem $x \in K$ eine offene Umgebung U_x derart, dass $U_x \cap F$ endlich ist.

$$(U_x)_{x\in K}$$

ist eine offene Überdeckung von K und enthält nach Voraussetzung eine endliche Teilüberdeckung $(U_{x_l})_{l=1,\ldots,L}$ Damit ist aber

$$F = \bigcup_{l=1}^{L} (U_{x_l} \cap F)$$

endlich. Dies ist ein Wiederspruch.
Zeige nun: Folgenkompaktheit impliziert Überdeckungskompacktheit.
Sei $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine offene Überdeckung von K, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ so dass es für alle $x \in K$ ein $\lambda \in \Lambda$ gibt, so dass

$$\mathrm{U}_\varepsilon(x) \subset O_\lambda \quad \text{mit } \mathrm{U}_\varepsilon(x) := \{z \in M \,|\, d(x, z) < \varepsilon\}$$

Nimm nun an, K sei Folgen- aber nicht Überdeckungskompakt und betrachte $\Big(\mathrm{U}_\varepsilon(x)\Big)_{x\in K}$ als Folge sowie eine offene Überdeckung $(O_\lambda)_{\lambda_\Lambda}$ ohne endliche Teilüberdeckung von K mit $\varepsilon > 0$ wie oben. Die Familie $\Big(\mathrm{U}_\varepsilon(x)\Big)_{x\in K}$ bildet eine offene Überdeckung von K. Gäbe es nun eine endliche Teilüberdeckung $\Big(\mathrm{U}_\varepsilon(x_i)\Big)_{i=1\ldots n}$ von K so gäge es auch eine endliche Teilüberdeckung von $(O_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von K. Wähle $x_1 \in K$ beliebig, dann ist $K \not\subseteq \mathrm{U}_\varepsilon(x_1)$ wähle also $x_2 \in K \backslash \mathrm{U}_\varepsilon(x_1)$. Dann ist $K \not\subseteq \mathrm{U}_\varepsilon(x_1) \cap \mathrm{U}_\varepsilon(x_2)$ und nach n-Schritten gibt es ein

$$x_{n+1} \in K \backslash \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{U}_\varepsilon(x_i)$$

Für jedes Glied dieser Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt

$$x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} \mathrm{U}_\varepsilon(x_i)$$

Diese Folge enthält keine konvergente Teilfolge, denn für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt:
$x_n \notin \mathrm{U}_\varepsilon(x_m)$ Also ist $d(x_n, x_m) \geq \varepsilon$. Dann ist K aber nicht Folgenkompakt, was ein Wiederspruch zur Voraussetzung ist. □

Folgerung 12.3 *Sei (M, d) ein metrischer Raum und $K \subset M$ eine kompakte und $V \subset M$ eine offene Teilmenge mit $K \subset V$. Dann gibt es eine beschränkte offene Menge $U \subset M$ mit*

$$K \subset U \subset \bar{U} \subset V \qquad \text{mit } \bar{U} := U \cup \partial U$$

Beweis. Es gilt: Ist U beschränkt, so ist $\bar{U}$ beschränkt.
Zu jedem $x \in K$ gibt es eine offene Kugel B_x um x, die in V enthalten ist. Sei nun B'_x die offene Kugel um x mit halbem Radius und $\bar{B}'_x$ sei der Abschluss von B'_x. Dann gibt es endlich viele Punkte x_i, so dass

$$K \subset \bigcup_{n=1}^{N} B'_{x_n} \subset \bigcup_{x\in K} B'_x$$

und die $(B'_{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bilden eine endliche Teilüberdeckung von K. Setze nun

$$U := \bigcup_{n=1}^{N} B'_{x_n}$$

Dann ist $K \subset U$ und U ist offen. Weiter ist

$$U = \bigcup_{n=1}^{N} B'_{x_n} \subset \overline{\bigcup_{n=1}^{N} B'_{x_n}} = \bar{U}$$

und $\bar{U}$ ist abgeschlossen. □

Definition 12.4 *((Parameter-) Gebiet)*
Ein Gebiet $G \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ist eine offene zusammenhängende Teilmenge des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$.
Ein Parametergebiet im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ist ein beschränktes Gebiet $P \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ mit $\partial P \subset \partial\bar{P}$, d.h. jeder Randpunkt von P ist auch ein Randpunkt von $\bar{P}$.

Lemma 12.5 *Sei $P \subset \mathbb{R}^{\mathrm{K}}$ ein Parametergebiet, dann gelten*
(i) Jeder innere Punkt von $\bar{P}$ gehört zu P.
(ii) Jeder Punkt von ∂P ist Häufungspunkt von $\mathbb{R}^{\mathrm{K}} \setminus \bar{P}$.

Beweis. Zu (i): Sei $x_0 \in \mathrm{int}(\bar{P})$ ein innerer Punkt von $\bar{P}$. Falls $x_0 \notin P$ ist, so ist $x_0 \in \bar{P} \setminus P = \partial P$ Also liegen in jeder Umgebung von x_0 Punkte aus $\mathbb{R}^{\mathrm{K}} \setminus \bar{P}$ und damit ist x_0 kein innerer Punkt von $\bar{P}$. Wiederspruch.
Zu (ii): Sei $x \in \partial P$, dann ist $x \in \bar{P}$ und $x \in \partial\bar{P}$. In jeder Umgebung von x liegen Punkte aus $\mathbb{R}^{\mathrm{K}} \setminus \bar{P}$. Diese sind wegen $x \in \bar{P}$ von x verschieden. □

Definition 12.6 *(parametrisiertes K-Flächenstück)*
Seien $N, K \in \mathbb{N}$ mit $K < N$ und P ein parametergebiet im $\mathbb{R}^{\mathrm{K}}$. Ein parametrisiertes K-Flächenstück über P ist ein $\varphi \in C^1(P, \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ mit den Eigenschaften
1. *φ ist injektiv*
2. *Für alle $a \in P$ gilt: $\mathrm{rg}(J_\varphi(a)) = K$*
3. *$\varphi^{-1} : \mathrm{Im}(\varphi) \to \mathbb{R}^{\mathrm{K}}$ ist stetig*

Definition 12.7 *(K-Fläche)*
Seien $N, K \in \mathbb{N}$ mit $0 < K < N$. Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ heißt K-Fläche, wenn es zu jedem $x^0 \in M$ eine $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$-Umgebung U von x^0, ein Parametergebiet P so wie ein parametrisiertes K-Flächenstück $\varphi : P \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ mit $\varphi(P) = M \cap U$ gibt.

Satz 12.8 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Menge und $M \subset \Omega$ eine Teilmenge. Gibt es für $0 < L < N$ ein $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{L}})$ mit*
1. *$M := \{ x \in \Omega \mid f(x) = 0 \}$*
2. *$\mathrm{rg}\left(J_f(x)\right) = L$ für $x \in \Omega$*
Dann ist M eine $(N - L)$-Fläche.
Beachte: $\mathrm{rg}\left(J_f(x)\right) = L \Leftrightarrow \{\nabla f_1(x), \ldots, \nabla f_L(x)\}$ linear unabhängig sind.

Beweis. Fixiere $\hat{\mathrm{x}} \in M$. Es gilt $J_f(\hat{\mathrm{x}})$ besteht aus L Zeilen und N Spalten. Da der Rang der Jacobimatrix gleich L ist, existiert eine reguläre $L \times L$-Untermatrix. Nach geeigneter Umsortierung kann angenommen werden, dass die ersten L Spalten linear unabhängig sind. □

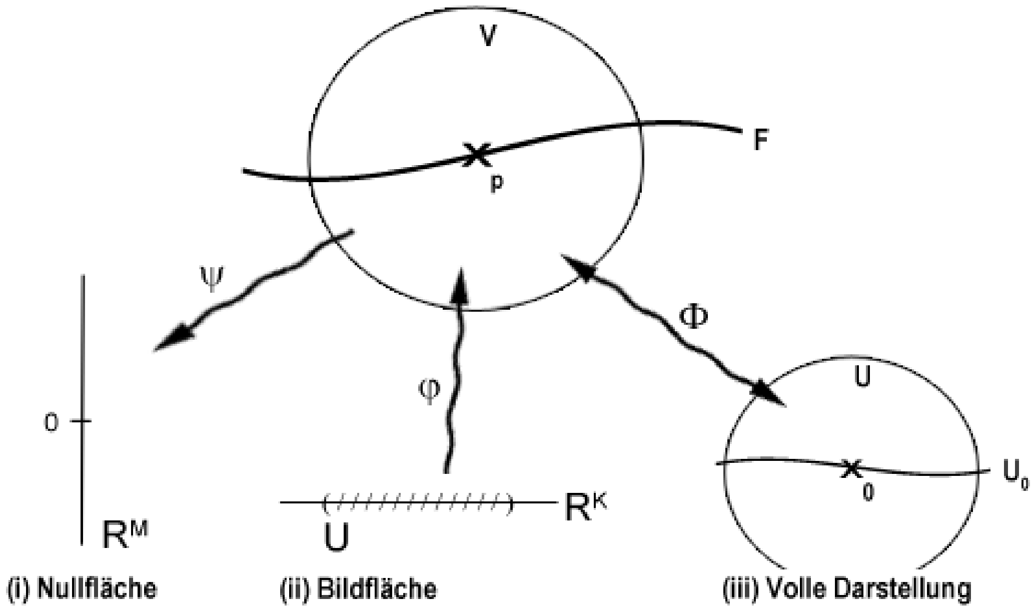
Generalvoraussetzungen
- $N \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ $\quad K \in \{1, \ldots, N-1\}$ $\quad M := N - K$
- $F \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$
- $U \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ist eine Umgebung von $p \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, wenn $p \in U$ und U offen ist.

Definition 12.9 ***i)*** *(K-Nullfläche)*
Wir nennen F eine K-Nullfläche, wenn es zu jedem $p \in F$ eine Umgebung V von p und ein $\psi \in C^1(V, \mathbb{R}^{\mathrm{M}})$ derart gibt, dass gelten
(a) *$V \cap F = \{x | \psi(x) = 0\}$* ***(b)*** *$J_\psi(x)$ hat für alle $x \in V$ Höchstrang M*

Definition 12.9 ***ii)*** *(K-Bildfläche)*
Wir nennen F eine K-Bildfläche, wenn es zu jedem $p \in F$ eine „Karte“ gibt, d.h. ein (U, V, φ) mit
- $U \subset \mathbb{R}^{\mathrm{K}}$ ist offen
- V ist eine Umgebung von p
- $\varphi \in C^1(U, \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$
so dass gelten
(a) *$V \cap F = \varphi(U)$*
(b) *$J_\varphi(u)$ hat für alle $u \in U$ den Höchstrang K*
(c) *$\varphi : U \to V \cap F$ ist ein Homöomorphismus, d.h. bijektiv und in beiden Richtungen stetig.*

Definition 12.9 ***iii)*** *(K-Fläche)*
Wir nennen F eine K-Fläche, wenn es zu jedem $p \in F$ Umgebungen V und U von p bzw. 0 und einen C^1-Diffeomorphismus $\Phi : U \to V$ gibt mit
(a) *$V \cap F = \Phi(U_0)$* mit $U_0 := \{u \in U | u_{k+1} = ... = U_N = 0\}$
(b) *$p = \Phi(0)$*

Verbildlichung der Definition 12.9



Satz 12.10 *Die Darstellungen (i) - (iii) aus Definition 12.9 sind äquivalent.*

Beweis. (Idee)
Diesen Satz beweisen wir in drei Schritten:
(1) F ist K-Fläche $\Rightarrow$ F ist K-Nullfläche und F ist K-Bildfläche.
(2) F ist K-Nullfläche $\Rightarrow$ F ist K-Fläche.
(3) F ist K-Bildfläche $\Rightarrow$ F ist K-Fläche.
Hierbei ist **(1)** leicht durch Untersuchen von Komponenten von $\Phi^{-1} := \Psi$ und Φ zu sehen. Für **(2)** und **(3)** benutze den Satz von der Umkehrfunktion.

Beweis. (Skizze)
Zu **(1)** sei $\Phi : U \to V$ der C^1-Diffeo aus (iii) und $\Psi := \Phi^{-1} : V \to U$, dann hat

$$\begin{aligned} \psi : V &\to \mathbb{R}^{\mathrm{M}} \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} \Psi_{K+1}(x) \\ \vdots \\ \Psi_{K+M}(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die in (i) (K-Nullfläche) geforderten Eigenschaften. Zur Darstellung als K-Bildfläche (ii) definiere

$$\tilde{U} := \{u \in \mathbb{R}^{\mathrm{K}} \mid \begin{pmatrix} u \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in U\}$$

dann ist $\tilde{U} \subset \mathbb{R}^{\mathrm{K}}$ offen und

$$\begin{aligned} \varphi : \tilde{U} &\to \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ u &\mapsto \Phi(u, 0) \end{aligned}$$

erfült die in (ii) geforderten Eigenschaften.
Zu **(2)**: Ist F eine K-Nullfläche nach (i), dann gibt es eine Umgebung V von p und eine Funktion $\psi \in C^1(C, \mathbb{R}^{\mathrm{M}})$ mit den in (i) beschriebenen Eigenschaften. Insbesondere sind die Gradienten der Komponenten von ψ linear unabhängig. Ergänze diese Vektoren durch $\{b^1, \ldots, b^K\}$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und definiere

$$\begin{aligned} \Psi : V &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ x &\mapsto \begin{pmatrix} < b^1, x - p > \\ \vdots \\ < b^K, x - p > \\ \ldots \\ \psi(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für $k = 1...K$ gilt dann $\nabla \Psi_k(x) = b^k$ und für $m = 1...M$ gilt $\nabla \Psi_{K+m}(x) = \nabla \psi_m(x)$ diese Vektoren sind für $x = p$ nach Konstruktion linear unabhängig, daher gilt $\det \Big(J_\Psi(p) \Big) \neq 0$ Nach dem Satz von der Umkehrfunktion ist dann ohne Beschränkung der Allgemeinheit (sonst verkleinere V) Ψ ein C^1-Diffeomorphismus auf $U := \Psi(V)$ und $\Phi := \Psi^{-1}$ hat die in (iii) geforderten Eigenschaften.
Zu **(3)**: Seien V_1 eine Umgebung von $p \in F$ und $U_1 \subset \mathbb{R}^{\mathrm{K}}$ eine offene Teilmenge sowie $\varphi \in C^1(U_1, \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ mit deb Eigenschaften (a) $V_1 \cap F = \varphi(U_1)$, (b) $\partial_i \varphi(u)$ sind für $i = 1...K$ und $u \in U_1$ linear unabhängig und (c) $\varphi : U_1 \rightarrow V_1 \cap F$ ist Homöomorph, gegeben. Es kann ohne Einschränkung angenommen werden, dass $0 \in U_1$ liegt und $\varphi(0) = p$ ist. Dann sind insbesondere $\partial_i \varphi(0)$ sind für $i = 1...K$ linear unabhängig und können mit $b^1, \ldots, b^M$ zu einer Baisi des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ergänzt werden. Definiere

$$\begin{aligned} \Phi_1 : U_1 \times \mathbb{R}^{\mathrm{M}} &\rightarrow \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ (u, s) &\mapsto \varphi(u) + \sum_{m=1}^{M} s_m \cdot b^m \end{aligned}$$

Dann ist Φ_1 einmal stetig diff'bar und die determinante der Jakobimatrix von Φ_1 ist im Punkte $(0, 0)$ nicht 0. Wende nun den Satz von der Umkehrfunktion an und erhalte eine Umgebung U_2 von 0 und $\delta > 0$ derart, dass

$$\Phi_2 := \Phi_{1|_{U_2 \times U_{\mathbb{R}^{\mathrm{M}}}(0,\delta)}}$$

ein C^1-Diffeomorphismus auf $V_2 := \Phi_2\big(U_2 \times U_{\mathbb{R}^{\mathrm{M}}}(0, \delta)\big)$ ist. Wegen (c) gibt es nun eine Umgebung V_3 von p so dass mit $U_3 := \varphi^{-1}(F \cap V_3)$ und $\tilde{\varphi} := \varphi_{|_{U_3}}$ weiterhin (a), (b) und (c) gelten. Insbesondere können also Elemente aus V_3 als $\tilde{\varphi}(u)$ dargestellt werden, wenn sie Elemente von F sind. Wähle nun $\rho > 0$ so, dass für $U := U_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}}(0, \rho)$ und $\Phi := \Phi_{2|_U}$ gilt:

$$V := \Phi_2(U) \subset V_2 \cap V_3$$

Dann ist Φ ein C^1-Diffeo, der die in (iii) geforderten Eigenschaften erfüllt. □

Satz 12.11 *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Teilmenge und $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$. Dann ist der Graph von f*

$$G_f := \left\{ \begin{pmatrix} u \\ \ldots \\ f(u) \end{pmatrix} \Big| \, u \in \Omega \right\}$$

eine N Fläche im $\mathbb{R}^{N+1}$

Beweis. Für $u \in \Omega$ liefert die Definition

$$\varphi(u) := \begin{pmatrix} u \\ \dots \\ f(u) \end{pmatrix}$$

eine C^1-Funktion von Ω in den $\mathbb{R}^{N+1}$ und es gilt

$$\partial_m \varphi(u) = \begin{pmatrix} e_n^m \\ \dots\dots \\ \partial_m f(u) \end{pmatrix}$$

mit e_n sind die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Diese Vektoren sind linear unabhängig im $\mathbb{R}^{N+1}$, da schon die e_n unabhängig im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ sind. Weiter ist φ injektiv und es gilt

$$\begin{pmatrix} u^k \\ \dots \\ f(u^k) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u \\ \dots \\ f(u) \end{pmatrix} \;\Rightarrow\; u^k \to u$$

daher ist die Umkehrfunktion von φ stetig also ein Homöomorphismus. Daher folgt die Behauptung aus Definition 12.9 (ii) □

Definition und Satz 12.12 *(Normal- und Tangentialraum)*
Sei F eine K-Fläche und $p \in F$ sowie

$$\psi : V \to \mathbb{R}^{\mathrm{M}} \quad \text{und} \quad \varphi : U \to \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$$

seien Darstellungen von F als Null- bzw. Bildfläche. Aus der Dartstellung als K-Nullfläche erhalte den Normalraum an F mit

$$N_pF = \operatorname{span}\{\nabla\, \psi_i | i = 1...M\}$$

und aus der Darstellung als K-Bildfläche erhalte den Tangentialraum an F mit

$$T_pF = \operatorname{span}\{\partial_i \varphi_i | i = 1...K\}$$

Diese Räume sind geometrische Größen, d.h. unabhängig von den gewählten Dartstellungen. Und es gelten

$$T_pF + N_pF = \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \quad \text{und} \quad T_pF \perp N_pF \qquad \text{kurz: } T_pF = (N_pF)^{\perp}$$

Beweis. Es gelten

$$\begin{aligned} \psi_m \circ \varphi(u) &= 0 \\ \partial_k\big(\psi_m \circ \varphi\big)(u) &= \sum_{n=1}^{N} \partial_n \psi_m\big(\varphi(u)\big) \cdot \partial_n \varphi(u) \;=\; 0 \end{aligned}$$

Damit gilt für $u = 0$

$$\begin{aligned} \partial_k\big(\psi_m \circ \phi\big)(0) &= \sum_{n=1}^{N} \partial_n \psi_m\big(\varphi(0)\big) \cdot \partial_n \varphi(0) \\ &= \sum_{n=1}^{N} \partial_n \psi_m(p) \cdot \partial_n \varphi(0) \\ &= \;<\nabla\, \psi_m(p), \partial_k \varphi_n >= 0 \end{aligned}$$

Also gilt $T_pF = (N_pF)^{\perp}$. Für festes ψ und verschiedene φ und $\tilde{\varphi}$ sind sowohl T_pF als auch $\tilde{T_p}F$ das orthogonale Komplement von N_pF und daher einander gleich. Argumentiere analog für N_pF. □

13 Maße

13.1 Mengenringe und additive Mengenfunktionen

Im Folgenden bezeichne
- X, Y beliebige Mengen
- $\mathfrak{P}(X)$ die Potenzmenge von X, d.h. $\mathfrak{P}(X)$ ist die Familie aller Teilmengen von X.
- $\mathfrak{F}(X, Y)$ die Menge aller Funktionen von X nach Y.

Definition 13.1 *(charakteristische Funktion)*
Für eine Menge $A \in \mathfrak{P}(X)$ nennen wir

$$\begin{aligned} \chi_A : X &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{für } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

die charakteristische Funktion von A.

Bemerkung Zu allen $f \in \mathfrak{F}(X, \{0,1\})$ gibt es ein $A \in \mathfrak{P}(X)$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} \iota : \mathfrak{P}(X) &\to \mathfrak{F}(X, \{0,1\}) \\ A &\mapsto \chi_A \end{aligned}$$

bijektiv.

Lemma 13.2 *(Eigenschaften der charakteristischen Funktion)*
Für $A, B \in \mathfrak{P}(X)$ gelten

$$\begin{aligned} \chi_\varnothing &= 0 \\ \chi_X &= 1 \\ \chi_A &= \chi_A^2 \\ \chi_{A\cap B} &= \chi_A - \chi_B \\ \chi_{A \dot\cup B} &= \chi_A + \chi_B \\ \chi_{A\cup B} &= \chi_A + \chi_B - \chi_A\chi_B \\ \chi_{A\setminus B} &= \begin{cases} \chi_A - \chi_B & \text{falls } B \subset A \\ \chi_A \cdot (1-\chi_B) & \text{sonst} \end{cases} \\ A \subset B &\Leftrightarrow \chi_A \le \chi_B \end{aligned}$$

Beweis. Nachrechnen für $x \in A$ und $x \notin A$. □

Definition 13.3 *((Mengen-)Ring, additive Funktion, symmetrische Differenz)*
Eine Familie $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ nenen wir einen (Mengen-)Ring, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ auch die Mengen $A \cup B$, $A \cap B$, $A\setminus B$ in $\mathfrak{R}$ enthalten sind.
Eine Funktion $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty)$ nennen wir additiv, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ mit leerem Schnitt gilt

$$\mu(A \dot\cup B) = \mu(a) + \mu(B)$$

Wir definieren die symmetrische Differenz durch

$$S(A, B) := (A\setminus B) \dot\cup (B\setminus A)$$

Bemerkung Wir verwenden die Bezeichungen aus Definition 13.3.
Für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ ist $S(A, B) \in \mathfrak{R}$, denn $A \cup B$ und $A \backslash B$ sind in $\mathfrak{R}$.
$\mathfrak{R}$ ist schon dann ein Ring, wenn für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ die Mengen $A \cup B$ und $A \backslash B$ in $\mathfrak{R}$ enthalten sind, denn $A \cap B = A \backslash (A \backslash B)$.

Lemma 13.4 *Sei $\mathfrak{R}$ ein Ring, $A, B \in \mathfrak{R}$ und μ eine additive Funktion, dann gelten*

$$\begin{aligned} A \subset B \quad &\Leftrightarrow \quad \mu(A) \leq \mu(B) && (1) \\ \mu(A \cup B) \quad &= \quad \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B) && (2) \\ \mu(A \backslash B) \quad &= \quad \begin{cases} \mu(A) - \mu(B) & \text{falls } B \subset A \\ \mu(A) - \mu(B) + \mu(B \backslash A) & \text{sonst} \end{cases} && (3) \end{aligned}$$

Beweis. Nachrechnen.

Definition und Satz 13.5 *(von einer Menge erzeugter Ring)*
Sei $M \subset \mathfrak{P}(X)$, dann ist der Durchschnitt aller Ringe die M als Teilmenge enthalten, selbst wieder ein Ring und wird der von M erzeugte Ring genannt. Notation $\mathfrak{R}_M$.

Beweis. Seien $A, B \in \mathfrak{R}_M$, dann ist $A \cup B \in \mathfrak{R}_M$ und $A \backslash B \in \mathfrak{R}_M$. □

Satz 13.6 *Sei $\mathfrak{I} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine Mengefamilie mit den Eigenschaften*

$$\text{(I1)} \quad \forall_{I,J \in \mathfrak{I}} \quad I \cap J \in \mathfrak{I}$$

$$\text{(I2)} \quad \forall_{I,J \in \mathfrak{I}} \quad I \backslash J = \dot{\bigcup_{k=1}^{K}} I_k \quad \text{mit } I_k \in \mathfrak{I}$$

Dann ist

$$\mathfrak{R} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{K} I_K \,\middle|\, I_k \in \mathfrak{I} \right\}$$

Der von $\mathfrak{I}$ erzeugte Ring und es gilt

$$\mathfrak{R} = \mathring{\mathfrak{R}} := \left\{ \dot{\bigcup_{l=1}^{L}} J_l \,\middle|\, J_l \in \mathfrak{I} \right\}$$

Ist weiterhin $\mu : \mathfrak{I} \to [0, \infty)$ additiv, so ist aucb

$$\begin{aligned} \hat{\mu} : \mathfrak{R} = \mathring{\mathfrak{R}} \quad &\to \quad [0, \infty) \\ \dot{\bigcup_{l=1}^{L}} I_l \quad &\mapsto \quad \sum_{l=1}^{L} \mu(I_l) \end{aligned}$$

wohldefiniert und additiv

Beweis. (Skizze)
(1) Um nachzuweisen, dass $\mathfrak{R}$ ein Ring ist müssen die Eigenschaften
(i) $A \cup B \in \mathfrak{R}$ und (ii) $A \backslash B \in \mathfrak{R}$

nachgewiesen werden. Hierbei ist (i) klar, denn eine Vereinigung von endlichen Vereinigungen ist selbst wieder endlich und (ii) folgt aus (I2) und den Demorganschen Regeln.

(2) Zeige nun $\mathfrak{R} = \mathring{\mathfrak{R}}$. Dazu sei

$$A = \bigcup_{k=1}^{K} I_k \in \mathfrak{R}$$

und beweise die Behauptung induktiv über K. Der Induktionsanfang $K = 1$ ist trivial und für den Schritt betrachte

$$A = \bigcup_{k=1}^{K} I_k \cup I_{K+1} \overset{I.A.}{=} \dot{\bigcup_{m=1}^{M}} J_m \cup I_{K+1} = \dot{\bigcup_{m=1}^{M}} (J_m \backslash I_{K+1}) \,\dot{\cup}\, I_{K+1} \in \mathring{\mathfrak{R}}$$

(3) Zur Wohldefiniertheit und Additivität von $\hat{\mu}$ betrachte eine Menge $A \in \mathring{\mathfrak{R}}$ mit den Darstellungen

$$\dot{\bigcup_{k=1}^{K}} I_k = A = \dot{\bigcup_{m=1}^{M}} J_m$$

und zeige unter Ausnutzung der Additivität von μ:

$$\sum_{k=1}^{K} \mu(I_k) = \sum_{m=1}^{M} \mu(J_m)$$

□

Definition und Satz 13.7 *(Ringe über dem karthesischen Produkt)*
Seien $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{P}(X)$ und $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{P}(Y)$ Ringe und $\alpha : \mathfrak{A} \to [0, \infty)$ sowie $\beta : \mathfrak{B} \to [0, \infty)$ additive Funktionen. Dann ist

$$\mathfrak{C} := \left\{ \bigcup_{k=1}^{K} A_k \times B_k \,\middle|\, A_k \in \mathfrak{A},\, B_k \in \mathfrak{B} \right\}$$

der von $\mathfrak{C}_0 := \{A \times B \,|\, A \in \mathfrak{A},\, B \in \mathfrak{B}\}$ erzeugte Ring und stimmt mit

$$\mathring{\mathfrak{C}} := \left\{ \dot{\bigcup_{l=1}^{L}} \tilde{A}_l \times \tilde{B}_l \,\middle|\, \tilde{A}_l \in \mathfrak{A},\, \tilde{B}_l \in \mathfrak{B} \right\}$$

überein. Weiter ist

$$\begin{aligned} \gamma : \mathfrak{C} = \mathring{\mathfrak{C}} &\to [0, \infty) \\ \dot{\bigcup_{l=1}^{L}} (A_l \times B_l) &\mapsto \sum_{l=1}^{L} \alpha(A_l) \cdot \beta(B_l) \end{aligned}$$

wohldefiniert und additiv.

Beweis. (Skizze)
Nach Satz 13.6 muss nur gezeigt werden, dass $\mathfrak{C}_0$ die Bedingungen (I1) und (I2) erfüllt und dass $\gamma_{|\mathfrak{C}_0}$ additiv ist. Die Bedingungen (I1) und (I2) können schnell mit $(A_1 \times B_1), (A_2 \times B_2) \in \mathfrak{C}_0$ nachgerechnet werden. Zur Additivität betrachte die Mengen $(A \times B), (A_1 \times B_1), (A_2 \times B_2) \in \mathfrak{C}_0$ mit

$$(A \times B) = (A_1 \times B_1) \,\dot{\cup}\, (A_2 \times B_2) \quad \text{und} \quad A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 \neq \varnothing$$

Zeige nun $A = A_1 \cup A_2$ und $B = B_1 \cup B_2$ dann ist entweder der Schnitt der A_i oder der Schnitt der B_i leer. Setze o.B.d.A. $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ dann folgt $A_1 = A_2$ und somit

$$\begin{aligned} \gamma(A \times B) &= \alpha(A) \cdot \beta(B) = \alpha(A) \cdot \big(\beta(B_1) + \beta(B_2)\big) \\ &= \alpha(A_1) \cdot \beta(B_1) + \alpha(A_2) \cdot \beta(B_2) \\ &= \gamma(A_1 \times B_1) + \gamma(A_2 \times B_2) \end{aligned}$$

□

Definition 13.8 *(Quader, Maß λ_N)*
Ein Quader im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ist das karthesische Produkt $Q := I_1 \times \ldots \times I_N$ von N Intervallen $I_n := [a, b]$. Wir definieren das Maß eines Quaders Q im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ durch

$$\lambda_N(Q) := \prod_{n=1}^{N} \lambda_1(I_n)$$

mit

$$\lambda_1\big([a, b]\big) := \lambda_1\big((a, b)\big) := \lambda_1\big([a, b)\big) := \lambda_1\big((a, b]\big) := b - a$$

Für $x, y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ schreiben wir $x \leq y \;:\Leftrightarrow\; \forall_n\ a_n \leq b_n$ und definieren damit

$$\begin{aligned} Q[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \mid \forall_n\ a_n \leq x_n \leq b_n\} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \mid a \leq x \leq b\} \\ Q(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \mid \forall_n\ a_n < x_n < b_n\} = \{x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \mid a < x < b\} \quad \text{sowie} \\ \mathbb{1} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Satz 13.9 *(Der Ring $\mathfrak{R}_N$)*
Die Familie $\mathfrak{R}_N$ aller endlichen Vereinigungen von Quadern im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ ist ein Ring und stimmt mit der Familie der $\mathring{\mathfrak{R}}_N$ aller endlichen disjunkten Vereinigungen von Quadern des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ überein. Weiter ist

$$\begin{aligned} \lambda_N : \mathfrak{R}_N = \mathring{\mathfrak{R}}_N &\to [0, \infty) \\ \dot{\bigcup_{k=1}^{K}} Q_k &\mapsto \sum_{k=1}^{K} \lambda_N(Q_k) \end{aligned}$$

additiv und wohldefiniert für Quader Q_k.

Beweis. Per Induktion über N.
Für den Anfang $N = 1$ sei $\mathfrak{I} \subset \mathbb{R}$ die Familie aller Intervalle und $I_1, I_2 \in \mathfrak{I}$. Dann gelten die

Bedingungen (I1) und (I2) aus Satz 13.6 und somit folgt die Behauptung für $N = 1$. Für den Schritt von N auf $N+1$ fasse $\mathbb{R}^{N+1}$ als $\mathbb{R}^{\mathrm{N}} \times \mathbb{R}$ auf und definiere

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} &:= \mathfrak{R}_N && \text{ist ein Ring nach Induktions Annahme} \\
\mathfrak{B} &:= \mathfrak{R}_1 && \text{ist ein Ring nach Induktions Anfang} \\
\alpha &:= \lambda_N && \text{ist additiv nach Induktions Annahme} \\
\beta &:= \lambda_1 && \text{ist additiv nach Induktions Anfang}
\end{aligned}$$

Für $Q_{N+1} := Q_N \times I_{N+1} = I_1 \times \ldots \times I_N \times I_{N+1}$ mit $I_n \in \mathfrak{I}$ gilt

$$\lambda_{N+1}(Q_{N+1}) = \lambda_N(Q_N) \cdot \lambda_1(I_{N+1})$$

und somit folgt die Behauptung aus den Sätzen 13.6 und 13.7. □

13.2 Maßräume

Nach wie vor bezeichne X eine beliebige Menge und $\mathfrak{R}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{P}(X)$.

Definition 13.10 *(σ-Ring, σ-Algebra, σ-Additiv, Maßraum)*

1. *$\mathfrak{R}$ heißt σ-Ring, wenn $\mathfrak{R}$ ein Ring ist und für alle $A_k \in \mathfrak{R}$ gilt:*

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_k, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{R}$$

2. *$\mathfrak{R}$ heißt Algebra [bzw. σ-Algebra], wenn $\mathfrak{R}$ ein Ring [bzw. σ-Ring] ist und $X \in \mathfrak{R}$ ist.*

3. *Eine Abbildung $\mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty]$ heißt σ–Additiv, wenn für $A_k \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} a_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Ist $\mathfrak{R}$ „nur“ ein Ring, so muss die unendliche disjungte Vereinigung der A_k in $\mathfrak{R}$ enthalten sein.

4. *$(X, \mathfrak{S}, \mu)$ heißt Maßraum. wenn $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{P}(X)$ eine σ-Algebra und $\mu\, \mathfrak{S} \to [0, \infty]$ σ-Additiv ist.*

5. *X heißt σ-endlich bezüglich $\mathfrak{R}$, wenn mit $X_k \in \mathfrak{R}$ gilt*

$$X = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} X_j'$$

6. *Als Konvention füren wir $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$ ein.*

Lemma 13.11 *Für $a_{kl} \in [0, \infty]$ gilt*

$$R := \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} =: L$$

Beweis. Der Sonderfall, dass es ein k_1 gibt, so dass die Summe über die l den Wert $+\infty$ annimmt und damit $L = +\infty$ gilt ist trivial denn es gilt

$$R \geq \sum_{l=1}^{\infty} a_{k_1 l} = +\infty = L$$

Im Hauptfall, dass es ein solches k_1 nicht gibt, die Summe über die l also für alle k kleiner als $+\infty$ ist, sei ein ε gegeben, dann gibt es ein K so dass

$$R \geq \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \geq \left\{ \begin{array}{cl} L - \varepsilon & \text{für } L < +\infty \\ \frac{1}{\varepsilon} & \text{für } L = +\infty \end{array} \right\} =: L_\varepsilon$$

Da ε beliebig war folgt $R \geq L$ und aus Symmetriegründen auch $L \geq R$. □

Im Folgenden setzen wir stets voraus:
V$_1$ $\quad \mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ ist ein Ring.
V$_2$ $\quad \mu : \mathfrak{R} \to [0, \infty)$ ist additiv.
V$_3$ $\quad X$ ist σ-endlich bzgl. $\mathfrak{R}$.

Definition 13.12 *(Äußeres Maß, Nullmenge)*
Für $M \in \mathfrak{P}(X)$ definieren wir das äußere Maß als

$$\mu^*(M) := \inf \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \,\middle|\, A_k \in \mathfrak{R} \text{ und } M \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right\}$$

Weiter heißt M Nullmenge, wenn $\mu^*(M) = 0$ ist.

Satz 13.13 *(Telmengen von Nullmengen sind Nullmengen)*
Sei $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}(X)$ die Familie aller Nullmengen, dann ist $\mathfrak{N}$ ein σ-Ring. Insbesondere gilt damit für alle $Z \in \mathfrak{P}(X)$ und für alle $N \in \mathfrak{N}$

$$Z \subset N \Rightarrow Z \in \mathfrak{N}$$

Beweis. Wir wollen zeigen, dass für $N_k \in \mathfrak{N}$ auch die unendliche Vereinigung über die N_k in $\mathfrak{N}$ enthalten ist. Wähle also zu jedem N_k Mengen $A_{kl} \in \mathfrak{R}$ mit den Eigenschaften

$$N_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl} \qquad \text{und} \qquad \sum_{l=1}^{\infty} A_{kl} < \varepsilon_k$$

Dann gilt

$$N := \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl}$$

und damit

$$\mu^*(N) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{kl}) < \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k$$

Wähle also $\varepsilon_k := \varepsilon \cdot 2^{-k}$, dann ist $\mu^*(N) = 0$. □

Lemma 13.14 *(Eigenschaften von μ^*)*
Für $M_i \in \mathfrak{P}(X)$ und $A \in \mathfrak{R}$ gelten

1. $\mu^*(\varnothing) = 0$
2. *Für $M_1 \subset M_2$ gilt $\mu^*(M_1) < \mu^*(M_2)$*
3. $\mu^*(A) = \mu(A)$
4. $\mu^*\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} M_k\right) \leq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_k)$

Beweis. 1. - 3. sind klar, zu 4. definiere

$$L := \mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} M_k\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(M_k) =: R$$

und betrachte den Sonderfall, dass es ein k_1 gibt so dass $\mu^*(M_{k_1}) = +\infty$ ist, dann ist $R = +\infty$.
Im Hauptfall, dass für alle k das äußere Maß der M_k nicht unendlich groß ist wähle $A_{kl} \in \mathfrak{R}$ mit den Eigenschaften

$$M_k \subset \bigcup_{l=1}^{\infty} A_{kl} \qquad \text{und} \qquad \mu^*(M_k) + \varepsilon_k > \sum_{l=1}^{\infty} A_{kl}$$

Dann gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} M_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} \mu(A_{kl}) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(M_k) + \varepsilon_k$$

□

Lemma 13.15 *(Eigenschaften der symmetrischen Differenz)*
Für $A, A_1, A_2, A_i, B, B_1, B_2, B_i, C \in \mathfrak{P}(X)$, I eine Indexmenge und die symmetrische Differenz $S(A,B) := (A \backslash B) \dot\cup (B \backslash A)$ gelten

1. $S(A,B) = S(B,A)$
2. $S(A,B) = S(X\backslash A, X\backslash B)$
3. $S(A_1\backslash A_2, B_1\backslash B_2), S(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2), S(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \subset S(A_1, B_1) \cup S(A_2, B_2)$
4. $S\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i\right), S\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i, \bigcap\limits_{i\in I} B_i\right) \subset \bigcup\limits_{i\in I} S(A_i, B_i)$
5. $S(A,B) \subset S(A,C) \cup S(C,B)$

Beweis. (Idee)
3. folgt aus 4. und 4. folgt aus 2. und Demorgan. Rest Nachrechnen.

Definition und Lemma 13.15 *′ (halbmetrik auf $\mathfrak{P}(X)$)*
Seien die Bezeichnungen wie grade. Die Abbildung

$$\begin{aligned} d : \mathfrak{P}(X) \times \mathfrak{P}(X) &\to [0, \infty] \\ (A,B) &\mapsto \mu^*\big(S(A,B)\big) \end{aligned}$$

ist fast eine Metrik, und es gelten

DIST 1' $d(A,B) = 0 \;\Leftrightarrow\; S(A,B) \in \mathfrak{N}$

DIST 2' $d(A,B) = d(B,A)$

DIST 3' $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$

Weiter gelten

$$\left.\begin{array}{r} d(A_1\backslash A_2, B_1\backslash B_2) \\ d(A_1 \cap A_2, B_1 \cap B_2) \\ d(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \end{array}\right\} \leq d(A_1,B_1) + d(A_2,B_2)$$

$$\left.\begin{array}{r} d\left(\bigcup\limits_{i\in I} A_i, \bigcup\limits_{i\in I} B_i\right) \\ d\left(\bigcap\limits_{i\in I} A_i, \bigcap\limits_{i\in I} B_i\right) \end{array}\right\} \leq \sum_{i\in I} d(A_i,B_i)$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus Lemma 13.15 □

Generalvoraussetzungen
Wir erweitern die bisherigen Generalvoraussetzungen
$\mathbf{V}_1$ $\mathfrak{R} \subset \mathfrak{P}(X)$ ist ein Ring.
$\mathbf{V}_2$ $\mu : \mathfrak{R} \to [0,\infty)$ ist additiv.
$\mathbf{V}_3$ X ist σ-endlich bzgl. $\mathfrak{R}$.
um eine Alternative
$\mathbf{V}_3'$ $X \in \mathfrak{R}$ und $\mu(X) < \infty$

Satz 13.16 *Unter den Voraussetzungen* $\mathbf{V}_1$*,* $\mathbf{V}_2$ *und* $\mathbf{V}_3'$ *ist*

$$\mathfrak{S} := \left\{\, S \in \mathfrak{P}(X) \,|\, d(S,A) \to 0 \quad \text{für eine Folge } (A_k) \text{ aus } \mathfrak{R} \,\right\}$$

eine σ-Algebra und $\mu^*_{|\mathfrak{S}}$ ist σ-additiv. Dabei gilt für alle $S \in \mathfrak{S}$

$$\mu^*(S) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k) \qquad \text{falls } d(A_k,S) \to 0$$

Beweis. (Skizze)
1. Zeige: $\mathfrak{S}$ ist ein Ring.
Für $S_1, S_2 \in \mathfrak{S}$ gibt es Folgen $(A_{1k}),\ (A_{2k}) \subset \mathfrak{R}$ mit $d(S_i, A_{ik}) \to 0$. Mit Lemma 13.15 gilt

$$d(S_1 \cap S_2, A_{1k} \cap A_{2k}) = d(S_1, A_{1k}) + d(S_2, A_{2k}) \to 0$$

2. μ^* ist σ-additiv auf $\mathfrak{S}$.
Seien $S = S_1 \dot\cup S_2 \in \mathfrak{S}$ mit $(A_{1k}),\ (A_{2k}) \subset \mathfrak{R}$ wie oben, dann betrachte

$$\Big|\mu^*(S) - \big[\mu^*(S_1) + \mu^*(S_2)\big]\Big| \leq d(A_{1k} \cup A_{2k}, S) + d(A_{1k}, S_1) + d(A_{2k}, S_2) + \mu(A_{1k} \cap A_{2k}) \to 0$$

Also gilt $\mu^*(S) = \mu^*(S_1 \dot\cup S_2) = \mu^*(S_1) + \mu^*(S_2)$ Hiermit verallgemeinere zu

$$S := \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} S_k \qquad \text{mit } S, S_k \in \mathfrak{S}$$

Es gelten

$$\begin{aligned}
\mu^*(S) &\geq \sum_{k=1}^{K} \qquad \text{denn } \dot{\bigcup_{k=1}^{K}} \subset S \\
\mu^*\left(\dot{\bigcup_{k=1}^{K}} S_k\right) &= \sum_{k=1}^{K} \mu^*(S_k)
\end{aligned}$$

Mit dem Grenzübergang $K \to \infty$ folgt die Behauptung.
3. Zeige: $\mathfrak{S}$ ist eine σ-Algebra. Definiere dazu

$$S = \bigcup_{k=1}^{\infty} S_k \qquad \text{mit } S_k \in \mathfrak{S} \text{ und } S \in \mathfrak{P}(X)$$

Wähle Hierzu $A_K \in \mathfrak{R}$ mit $d(A_K, S_K) < \varepsilon_k := \varepsilon \cdot 2^{-k}$ dann gilt

$$d\left(S, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = d(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} S_k, \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} d(S_k, A_K) < \varepsilon$$

Stelle S nun als disjunkte Vereinigung dar, via $S_1' := S_1$ und $S_{k+1}' := S_{k+1} \setminus \bigcup_{j \leq k} S_j'$ dann folgt aus der σ-Additivität von μ^* auf $\mathfrak{S}$

$$d\left(S, \dot{\bigcup_{k=1}^{K}} S_k'\right) = \mu^*\left(\dot{\bigcup_{k=K+1}^{\infty}} S_k'\right) \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \mu^*(S_k') < \varepsilon$$

□

Satz 13.17 *Unter den Voraussetzungen* $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ *und* $\mathbf{V}_3$ *lässt sich* $\mathfrak{R}$ *zu einer* σ*-Algebra erweitern, so dass* $\mu := \mu^*_{|\mathfrak{S}}$ *eine* σ*-Additive Abbildung ist. Dann ist* $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ *ein Maßraum. Genauer gilt*

$$\mathfrak{S} := \left\{ S \in \mathfrak{P}(X) \,\middle|\, \forall_j \ d(S \cap X_j, A_k) \to 0 \text{ für eine Folge } (A_k) \subset \mathfrak{R} \text{ mit } A_k \subset X_j \right\}$$

Mit den X_j *aus 13.10 (5) und weiter ist*

$$\mu(S) = \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(S \cap X_j)$$

Beweis. (Skizze)
nach Voraussetzung ist X σ-endlich bezüglich $\mathfrak{R}$, d.h. es gibt $X_j \in \mathfrak{R}$ so dass

$$X = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} X_j$$

Definiere den Ring $\mathfrak{R}_j$ sowie die σ-Algebra $\mathfrak{S}_j$ wie folgt

$$\begin{aligned}
\mathfrak{R}_J &:= \left\{ A \in \mathfrak{R} \,\middle|\, A \subset X_j \right\} \\
\mathfrak{S}_j &:= \left\{ S \in \mathfrak{P}(X) \,\middle|\, S \subset X_j \text{ und } d(A_k, S) \to 0 \text{ mit } A_k \in \mathfrak{R}_j \right\}
\end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass μ σ-additiv ist. Hierfür muss gezeigt werden, dass

$$\mu^*(S) = \sum_{J=1}^{\infty} \mu^*(S \cap X_j)$$

gilt, sei dazu $d(S \cap X_j, A_j) < \varepsilon \cdot 2^{-j}$ mit $A_j \subset X_j \in \mathfrak{R}$. Definiere $S \cap X_j =: B_j$ dann zeige via Abschätzung von

$$\left| \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{J} B_j \right) - \sum_{j=1}^{J} \mu^*(B_j) \right|$$

dass die Gleichung

$$\mu^*(S) = \mu^* \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \right) \leq \sum_{j=1}^{\infty} \mu^*(B_j)$$

gilt. Der Sonderfall $\mu^*(S) = +\infty$ ist trivial, betrachte also für den Hauptfall

$$\bigcup_{j=1}^{J} B_j \subset S$$

und führe den Grezübergang von $J \to \infty$ durch. □

Definition und Satz 13.18 *(Vollständiger Maßraum, σ-endlicher Maßraum)*
Ein Maßraum $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ heißt vollständig, wenn jede Teilmenge einer Nullmenge selbst eine Nullmenge ist. Wir definieren die Familie der Nullmengen in $\mathfrak{S}$ durch

$$\mathfrak{S}_0 := \{S \in \mathfrak{S} \mid \mu(S) = 0\}$$

Der Maßraum heißt σ-endlich, wenn

$$X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j \quad \text{mit } X_j \subset \mathfrak{S}_F := \{S \in \mathfrak{S} \mid \mu(S) < \infty\}$$

Hierbei ist $\mathfrak{S}$ die Familie der Mengen mit endlichem Maß bezüglich μ. Die nach Satz 13.17 konstruierten Maßräume sind vollständig und σ-endlich. □

Definition und Satz 13.19 *(Lebesgue-Maß, Lebesgue messbare Mengen)*
*Sei $X := \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, dann erfüllen $\mathfrak{R}_N = \mathring{\mathfrak{R}}_N$ und λ_N die Voraussetzungen **V**$_1$, **V**$_2$ und **V**$_3$. Die hieraus nach Satz 13.17 konstruierte σ-Algebra $\mathfrak{S}_N$ heißt Familie der Lebesque meßbaren Mengen im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $\lambda_N := \lambda_{N|_{FS_N}}$ heßt Lebesgeu-Maß. Der Maßraum $(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathfrak{S}_N, \lambda_N)$ ist vollständig und σ-endlich.*
□

Definition und Satz 13.20 *(Produkt von Maßräumen, Produktmaß)*
Seien $(X, \mathfrak{A}, \alpha)$ und $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$ vollständige und σ-endliche Maßräume, dann ist

$$\mathfrak{R} = \mathring{\mathfrak{R}} := \left\{ \dot{\bigcup_{k=1}^{K}} A_k \times B_k \,\middle|\, A_k \in \mathfrak{A}_F \text{ und } B_k \in \mathfrak{B}_F \right\}$$

ein Ring, $X \times Y$ ist σ-endlich bezüglich $\mathfrak{R}$ und

$$\begin{array}{rcl} \pi: \quad R = \overset{\circ}{\mathfrak{R}} & \to & [0,\infty) \\ \dot{\bigcup\limits_{k=0}^{K}} A_k \times B_k & \mapsto & \sum\limits_{k=1}^{K} \alpha(A_k) \cdot \beta(B_k) \end{array}$$

ist additiv. Damit sind die Voraussetzungen $\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{V}_2$ und $\boldsymbol{V}_3$ erfüllt, d.h. der nach Satz 13.17 konstruierte Maßraum $(X \times Y, \mathfrak{S}, \pi)$ mit $\pi := \pi_{|\mathfrak{S}}$ ist vollständig und σ-endlich und heißt das Produkt der Maßräume $(X, \mathfrak{A}, \alpha)$ und $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$ und π heißt das Produktmaß. □

Satz 13.21 *$(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathfrak{S}_N, \lambda_N)$ ist das Produkt der Maßräume $(\mathbb{R}^{N_1}, \mathfrak{S}_{N_1}, \lambda_{N_1})$ und $(\mathbb{R}^{N_2}, \mathfrak{S}_{N_2}, \lambda_{N_2})$ wenn $N = N_1 + N_2$ gilt.*

Beweis. (Idee)
Zeige $(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathfrak{S}_N, \lambda_N) = (\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathfrak{S}_\pi, \pi)$ durch den Nachweis von $\mathfrak{S}_N \subset \mathfrak{S}_\pi \subset \mathfrak{S}_N$ und $\lambda^* \leq \pi \leq \lambda^*$

Lemma 13.22 *Im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ sind alle offenen Mengen meßbar*

Beweis. Es gilt

$$\mathbb{R}^{\mathrm{N}} = \bigcup_{z \in \mathbb{Z}^N} W_z \qquad \text{mit } W_z := Q[z, z + \mathbb{1}]$$

Mit $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und der Gaussklammer gilt dann $x_n = [x_n] + \tau_n$ mit $\tau_n \in [0,1)$, daher ist $x \in W[x]$. Betrachte die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \tau: \mathbb{R}^{\mathrm{N}} & \to & \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ x & \mapsto & 2^{-m} \cdot x \end{array}$$

und definiere $W_{m,z} := Q[2^{-m}z, 2^{-m}(z - \mathbb{1})]$ für $z \in \mathbb{Z}^N$. Sei nun $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Teilmenge und $x \in \Omega$, dann gibt es ein $z \in \mathbb{Z}^N$ derart, dass für ein hinreichend großes m gilt: $x \in W_{m,z} \subset \Omega$. Daher

$$\Omega = \bigcup_{W_{m,z} \subset \Omega} W_{m,z}$$

□

Definition und Satz 13.23 *(Borell-Menge)*
Jedes $S \in \mathfrak{S}_N$ gilt

$$S = B \backslash N$$

mit einer Nullmenge $N \in \mathfrak{S}_0$ und $B \in \mathfrak{B}$. Dabei ist $\mathfrak{B}$ die von den offenen Mengen erzeugte σ-Algebra. $B \in \mathfrak{B}$ heißt Borell-Menge.

14 Integration

14.1 Meßbare Funktionen

Im Folgenden sei $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein vollständiger, σ-endlicher Maßraum und $f, g, f_k, g_k, \ldots \in \mathfrak{F}(X, \hat{\mathbb{R}})$.

Definition 14.1 *(Meßbare Funktion)*
Eine Funktion f heißt meßbar, wenn für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\{\, x \,|\, f(x) > \alpha \,\} \in \mathfrak{S}$$

Lemma 14.2 *Für eine Funktion f sind äquivalent*

1. *f ist meßbar*
2. *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\{\, x \,|\, f(x) \geq \alpha \,\} \in \mathfrak{S}$*
3. *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\{\, x \,|\, f(x) < \alpha \,\} \in \mathfrak{S}$*
4. *Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt: $\{\, x \,|\, f(x) \leq \alpha \,\} \in \mathfrak{S}$*
5. *Für alle Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ gilt: $f^{-1}(I) := \{\, x \,|\, f(x) \in I \,\} \in \mathfrak{S}$*

Beweis. (Ansatz)
Zu (1. $\Rightarrow$ 2.): Für alle $k \in \mathbb{N}_{>0}$ gilt $f(x) > \alpha - \frac{1}{k} \Leftrightarrow f(x) \geq \alpha$ und weiter ist

$$\{\, x \,|\, f(x) \geq \alpha \,\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}_{>0}} \{\, x \,|\, f(x) > \alpha - \frac{1}{k} \,\} \in \mathfrak{S}$$

denn $\mathfrak{S}$ ist eine σ-Algebra.
Für (2. $\Rightarrow$ 3.) betrachte

$$\{\, x \,|\, f(x) < \alpha \,\} = \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \{\, x \,|\, f(x) \geq \alpha \,\} \in \mathfrak{S}$$

usw... $\square$

Satz 14.3 *Alle $f \in C^0(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \mathbb{R})$ sind meßbar*

Beweis. Das Intervall (α, ∞) ist offen und es gilt

$$\{\, x \,|\, f(x) > \alpha \,\} = f^{-1}\Big((\alpha, \infty)\Big)$$

Unter stetigen Abbildungen sind Urbilder offener Mengen offen und diese sind nach 13.22 meßbar. $\square$

Lemma 14.4 *Seien für $k \in \mathbb{N}$ Funktionen f_k meßbar, dann sind auch*

$$\sup\{f_k\} \quad \inf\{f_k\} \quad \limsup\{f_k\} \quad \liminf\{f_k\}$$

meßbar. Insbesondere sind alle Funktionen f meßbar, die man als punktweisen Grenzwert meßbarer Funktionen schreiben kann.

Beweis. Für $x \in X$ gilt

$$\sup_k f_k(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \forall_{m \in \mathbb{N}}\ \exists_{k \in \mathbb{N}} f_k(x) > \alpha - \frac{1}{m}$$

und damit folgt, da $\mathfrak{S}$ eine σ-Algebra ist, folgende Gleichung

$$\{\, x \,|\, \sup f_k(x) \geq \alpha \} \;=\; \bigcap_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\, x \,|\, f(x) > \alpha - \frac{1}{m} \,\} \in \mathfrak{S}$$

Anlalog folgt die Aussage für $\inf f_k$und damit auch für

$$\limsup f_k(x) = \lim_{K \to \infty} \sup_{k \geq K} f_k(x) = \inf_{K \to \infty} \sup_{k \geq K} f_k(x)$$

und analog für $\liminf f_k$. □

14.2 Definition und grundlegende Eigenschaften des Integrals

Definition 14.5 *(Einfache Funktion, Standartdarstellung, Treppenfunktion, Integral)*
Eine Funktion$f \in \mathfrak{F}(X, \hat{\mathbb{R}})$ nennen wir einfach, wenn

$$\operatorname{Im}(f) = \{\, x \in \hat{\mathbb{R}} \,|\, \exists_{y \in X}\ f(x) = x \,\}$$

endlich ist. Sei nun $\sharp \operatorname{Im}(f) = K$, dann nennen wir

$$f = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \chi_{S_k} \quad \text{mit } S_k := \{ y \in X \mid f(y) = w_k \,\} \text{ und } \mu\big(\{y | f(y) \neq 0\}\big) < \infty$$

die Standartdarstellung von f. Eine einfache, meßbare Funktion mit $\operatorname{Im}(f) = f(X) \subset \mathbb{R}$ nennen wir eine Treppenfunktion t und definieren das Integral von t durch

$$\int_X t\, d\mu := \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \mu(S_k) \quad \text{mit } t = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \chi_{S_k} \text{ ist die Standartdarstellung von } t$$

Die Menge aller Treppenfunktionen bezeichnen wir mit $\mathfrak{T}$.

Satz 14.6 *(Eigenschaften von $\mathfrak{T}$)*

1. *Seien $T_l \in \mathfrak{S}_F$ und $v_l \in \mathbb{R}$, dann gehört*

$$t \;:=\; \sum_{l=1}^{L} v_l \cdot \chi_{T_l}$$

zum Raum $\mathfrak{T}$ der Treppenfunktionen und es gilt

$$\int_X t\, d\mu \;=\; \sum_{l=1}^{L} v_l \cdot \mu(T_l)$$

2. *Der Raum $\mathfrak{T}$ der Treppenfunktionen ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und das Integral*

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{T} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \int_X t \, d\mu \end{aligned}$$

ist linear und monoton.

Beweis. (Skizze)
Zu 1.) Im Allgemeinen gilt nicht $T_l \cap T_k = \varnothing$ jedoch ist t einfach. Weiter ist die Funktion, als Summe meßbarer Funktionen, meßbar und es gilt

$$M := \{ x \,|\, t(x) \neq 0 \} \subset \bigcup_{l=1}^{L} T_l$$

daher ist $\mu(M) < \infty$ und t ist eine Treppenfunktion. Es bleibt zu zeigen:

$$(1) \qquad \sum_{l=1}^{L} w_l \cdot \chi_{S_l} = \sum_{k=1}^{K} v_k \cdot \chi_{T_k} \overset{!}{\Rightarrow} \sum_{l=1}^{L} w_l \cdot \mu(S_l) = \sum_{k=1}^{K} v_k \cdot \mu(T_k) \qquad (2)$$

Betrachte den Sonderfall $K = 1$ und für alle l gilt $S_l \subset T_1 =: T$ dann ist zu Zeigen:

$$\sum_{l=1}^{L} w_l \cdot \chi_{S_l} = v \cdot \chi_T \overset{!}{\Rightarrow} \sum_{l=1}^{L} w_l \cdot \mu(S_l) = v \cdot \mu(T)$$

Beweise den SOnderfall nun per Induktion über L. Der Anfang für $L = 1$ ist klar, denn dann gelten $w_1 = v$ und $S_1 = T$. Für den Schritt von L auf $L + 1$ betrachte

$$\sum_{l=1}^{L} w_l \cdot \chi_{S_l} + w \cdot \chi_S \;=\; v \cdot \chi_T \qquad \text{mit } w := w_{L+1} \text{ und } S := S_{L+1}$$

Forme diese Aussage unter Ausnutzung der Induktionsannahme und der in Lemma 13.2 gezeigten Eigenschaften der charakteristischen Funktion um zu

$$\sum_{l=1}^{L+1} w_l \cdot \mu(S_l \cap S) = v \cdot \mu(T) \qquad \text{denn } \mu(S_l \cap S) = S_{L+1} =: S \text{ für } l = L + 1$$

Da μ additiv ist folgt die Aussage für den Sonderfall. Für den Hauptfall betrachte eine Umformung von Formel (1)

$$\sum_{l=1}^{L} w_l \cdot \chi_{S_l} + \sum_{k=1}^{K} (-v_k) \cdot \chi_{T_k} = 0 = 0 \cdot \chi_U \quad \text{mit } U := \bigcup_{l=1}^{L} S_l \cup \bigcup_{k=1}^{K} T_k$$

Mit dieser Umformung gilt der Sonderfall auch hier und wir erhalten die Aussage vom ersten Satzteil
Zu 2.) Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und $t, s \in \mathfrak{T}$ zwei Treppenfunktionen, dann gilt

$$\alpha \cdot t + \beta \cdot s \;=\; \sum_{l=1}^{L} (\alpha v_l) \cdot \chi_{T_l} + \sum_{k=1}^{K} (\beta w_k) \cdot \chi_{S_k} \in \mathfrak{T}$$

Damit ist $\mathfrak{T}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zur Linearität des Integrals betrachte

$$\begin{aligned}\int_X (\alpha t + \beta s)\, d\mu &= \alpha \cdot \sum_{l=1}^{L} v_l \cdot \chi_{T_l} + \beta \cdot \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \chi_{S_k} \\ &= \alpha \int_X t\, d\mu + \beta \int_X s\, d\mu\end{aligned}$$

Zum Nachweis der Momotonie gelte $t \leq s$. Definiere $p := s - t \geq 0$ mit der Standartdarstellung

$$p = \sum_{i=1}^{I} u_i \cdot \chi_{U_i}$$

Für alle i ist $u_i \geq 0$ und damit folgt

$$\begin{aligned}&\int_X s\, d\mu - \int_X t\, d\mu = \int_X p\, d\mu = \sum_{i=1}^{I} u_i \cdot \mu(U_i) \\ &\Rightarrow \int_X t\, d\mu \leq \int_X s\, d\mu\end{aligned}$$

□

Definition 14.7 *(Integral einer meßbaren Funktion)*
Für eine meßbare, nicht-negative Funktion $f : X \to [0, \infty]$ nennen wir

$$\int_X f\, d\mu \;:=\; \sup \Big\{ \int_X t\, d\mu \,\Big|\, f \geq t \text{ und } t \in \mathfrak{T} \Big\}$$

das Integral von f über X. Für eine meßbare Funktion $f : X \to \hat{\mathbb{R}}$ nennen wir

$$\int_X f\, d\mu \;:=\; \int_X f_+\, d\mu - \int_X f_-\, d\mu$$

mit $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ das Integral von f über X, falls die rechte Seite in $\hat{\mathbb{R}}$ definiert ist.

Lemma 14.8 *Seien $f, g : X \to \hat{\mathbb{R}}$ meßbare Funktionen, dann gelten:*
(1) $f = f_+ - f_-$
(2) $|f| = f_+ + f_-$
(3) Für $\alpha > 0$ gilt $(\alpha f)_\pm = \alpha \cdot f_\pm$
(4) Für $\alpha < 0$ gilt $(\alpha f)_\pm = |\alpha| \cdot f_\mp$
(5) Aus $f \leq g$ folgt $f_+ \leq g_+$ und $f_- \geq g_-$
(6) Das Integral über f ist monoton.

Beweis. Die Punkte (1), (2) und (5) sind klar. Zu (3) und (4) betrachte

$$\begin{aligned}\alpha > 0: &\qquad (\alpha f)_\pm = \max\{\alpha(\pm f), \alpha \cdot 0\} = \alpha \cdot \max\{\pm f, 0\} = \alpha \cdot f_\pm \\ \alpha < 0: &\qquad (-|\alpha| \cdot f)_\pm = |\alpha| \cdot \max\{\pm f, 0\}\end{aligned}$$

Die Monotonie des Integrals folgt aus Teil (5) und Satz 14.6. □

Definition und Lemma 14.9 *(Das Integral über einer Teilmenge)*
Sei $A \in \mathfrak{S}$ eine Teilmenge und f eine meßbare Funktion. Für $f : X \to \hat{\mathbb{R}}$ definieren wir

$$\int_A f\, d\mu \;=\; \int_X f \cdot \chi_A\, d\mu$$

Für $f : A \to \hat{\mathbb{R}}$ definieren wir

$$\int_A f\, d\mu \;=\; \int_X E_0 f\, d\mu$$

mit der Nullfortsetzung

$$\begin{array}{rcl} E_0 f : X & \to & \hat{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Die Menge $A \in \mathfrak{S}$ ist ein Maßraum mit den meßbaren Mengen

$$\mathfrak{S}' := \{S \in \mathfrak{S} \mid S \subset A\}$$

und $\mu'(S) := \mu(S)$ □

Satz 14.10 *(Satz von der monotonen Konvergenz [m.K.])*
Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer, nicht-negativer Funktionen von X nach $[0,\infty]$, die monoton steigt, d.h. für alle k gelte $0 \le f_k \le f_{k+1}$, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k\, d\mu \;=\; \int_X \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu$$

Beweis. (Skizze) Definiere

$$f := \lim_{k\to\infty} f_k$$

dann existiert $f : X \to [0,\infty]$ als meßbare Funktion und für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $f_k \le f$. Weiter gilt nach Lemma 14.8

$$\begin{array}{rcl} f_k \le f & \Rightarrow & \displaystyle\int_X f_k\, d\mu \;\le\; \int_X f\, d\mu \\ & \Rightarrow & \displaystyle\lim_{k\to\infty}\int_X f_k\, d\mu \le \int_X f := \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu \end{array}$$

Für die andere Relation ($\ge$) wähle $\tilde{t} \in \mathfrak{T}$ mit $f \ge \tilde{t}$, dann ist $f \ge t := \tilde{t}_+$, denn $f \ge 0$. Definiere nun

$$t_\varepsilon := t - \varepsilon \cdot \chi_S \quad \text{mit } S := \{x \in X \mid t(x) > 0\} \text{ und } \mu(S) < \infty$$

Definiere weiter $w_{\min} := \min\{t(x)\}$ und $w_{\max} := \max\{t(x)\}$. Für alle $x \in S$ gilt dann $0 \le w_{\min} \le t(x) \le w_{\max}$. Setze $\varepsilon \in (0, w_{\min})$ und

$$T_k := \{x | f_k(x) < t_{eps}(x)\}$$

Wegen $f_k \le f_{k+1}$ gilt $T_k \subset T_{k+1}$ also $T_k \subset S$. Bezeichne nun den Schnitt über alle T_k mit T und zeige T ist leer. Danach gilt

$$\lim_{k\to\infty} \mu(T_k) \;=\; \mu(T) \;=\; 0$$

Zeige damit

$$\int_X f_k \, d\mu \geq \int_X t \, d\mu - w_{\max} \cdot \mu(T_k) - \varepsilon \cdot \mu(S)$$

Mit den Grenzübergängen $k \to \infty$ und $\varepsilon \to 0$ auf der rechten Seite gilt dann

$$\lim_{k\to\infty} \int_X f_k \, d\mu \;\geq\; \int_X t \, d\mu - 0 - 0 \geq \int_X \tilde{t} \, d\mu$$

Die Aussage folgt dann aus

$$\sup\{\int_X \tilde{t} \, d\mu \,|\, \tilde{t} \in \mathfrak{T}\} = \int_X f \, d\mu$$

□

Bemerkung (Varianten vom Satz über die monotone Konvergenz)
Der Satz 14.10 gilt auch für Folgen $g \leq f_k \leq f_{k+1}$ mit

$$\int_X |g| \, d\mu \;<\; \infty$$

sowie für monoton fallende Folgen $g \geq f_k \geq f_{k+1}$. Seien für $i = 1 ... \infty$ Funktionen $0 \leq g_i$ meßbar, dann gilt auch

$$\sum_{i=1}^{\infty} \int_X g_i \, d\mu \;=\; \int_X \sum_{i=1}^{\infty} g_i \, d\mu$$

Lemma 14.11 *Jede meßbare Funktion $f : X \to [0, \infty]$ ist punktweiser Grenzwert einer aufsteigenden Folge $(t_k) \subset \mathfrak{T}$ von Treppenfunktionen. Ist f in $\mathbb{R}$ beschränkt, so ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.*

Beweis. Definiere $I_M := [0, 2^M)$ und $I_\infty := [2^M, \infty]$, dann bilden diese Intervalle eine Zerlegung von $[0, \infty] \;=\; I_M \,\dot{\cup}\, I_\infty$. Zerlege I_M nun in Teilintervalle der Länge 2^{-M} durch

$$I_{M,m} := [m \cdot 2^{-M}, (m+1) \cdot 2^{-M}) \quad \text{mit } 0 \leq m \leq 2^{2M} - 1$$

Mit dieser Zerlegung gilt

$$I_{M+1,2m} \,\dot{\cup}\, I_{M+1,2m+1} = [2m \cdot 2^{-(M+1)}, 2(m+1) \cdot 2^{-(M+1)}) = I_{M,m}$$

Wir haben unsere Zerlegung von $[0, \infty]$ also verfeinert zu

$$[0, \infty] \;=\; \dot{\bigcup_{m=1}^{2^{2M}-1}} I_{M,m} \,\dot{\cup}\, I_\infty$$

Definiere nun eine Folge $(t_k) \subset \mathfrak{T}$ durch

$$t_M(x) \;=\; \begin{cases} 2^M & \text{für } f(x) \in I_\infty \\ m \cdot 2^{-M} & \text{für } f(x) \in I_{M,m} \end{cases}$$

Für $f(x) \in I_{M,m}$ gilt nun $0 \leq f(x) - t_M(x) < 2^{-M}$ und somit bereits die gleichmäßige Konvergenz für beschränktes f. Betrachte nun die Fälle

1. $(f = +\infty)$: Nach Definition ist $t_M(x) = 2^M$. Durch den Grenzübergang $M \to \infty$ erhalte die Aussage.
2. $(f < +\infty)$: In diesem Fall gibt es ein $M_{1,x}$ so dass $f(x) < 2^{M_{1,x}}$ also gilt für alle $M \geq M_{1,x}$ die Ungleichung $0 \leq f(x) - t_M(x) < 2^{-M}$ und damit die Aussage. □

Satz 14.12 *Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei Riemann-Integrierbar, dann existiert auch das Lebesgue-Integral von f und beide sind einander gleich, d.h.*

$$\int_{[a,b]} f \, d\lambda_1 \; = \; \int_a^b f(t) \, dt$$

Beweis. (Idee)
Definiere Treppenfunktionen $\underline{t_m}$ und $\overline{t_m}$ deren Integrale mit der Ober- und Untersumme des Rieman-Integrals übereinstimmen und betrachte $\underline{t_m} \leq f \leq \overline{t_m}$.

Lemma 14.13 *Für $\alpha > 0$ und $f, g : X \to [0, \infty]$ gelten*

$$\int_X \alpha \cdot f \, d\mu \; = \; \alpha \int_X f \, d\mu \quad \text{und} \quad \int_X (f+g) \, d\mu \; = \; \int_X f \, d\mu + \int_x g \, d\mu$$

□

Satz 14.14 *Sei $S \subset X$ eine Teilmenge und $f : S \to \hat{\mathbb{R}}$ mit definiertem Integral, d.h. es gilt nicht*

$$\int_S f_+ \, d\mu = \int_S f_- \, d\mu = \infty$$

Dann gilt

$$\int_S f \, d\mu = \sum_{j=1}^{\infty} \int_{S_j} f \, d\mu \quad \text{,falls } S = \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j$$

Definition 14.15 *(Der Raum der integrierbaren Funktionen)*
Sei $A \in \mathfrak{P}(X)$ meßbar, dann definieren wir den Raum der über A integrierbaren Funktionen durch

$$\mathfrak{L}(A) \; := \; \left\{ f : A \to \mathbb{R} \mid f \text{ ist meßbar und } \int_X |f| \, d\mu < +\infty \right\}$$

Satz 14.16 *Der Raum $\mathfrak{L}(A)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und die Abbildung*

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{L}(A) \; &\to \; \mathbb{R} \\ f \; &\mapsto \; \int_A f \, d\mu \end{aligned}$$

ist monoton und linear.

Beweis. (Skizze)
Das $\mathfrak{L}(A)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist folgt aus Lemma 14.13 und die Linearität rechnet man mit $f_\pm$ leicht nach. Zum Nachweis der Monotonie definiere $h := -(f+g)$ und Zeige

$$f + g + h = 0 \overset{!}{\Rightarrow} \int_A f \, d\mu + \int_A g \, \mu + \int_A h \, d\mu = 0$$

Zerlege hierzu A nach Satz 14.14 in Teilgebiete auf denen f, g und h jeweils ein festes Vorzeichen haben. Unterscheide die folgenden Fälle:
Fall1: Eine der drei Funktionen ist gleich Null, dann folgt die Aussage sofort, denn o.B.d.A. sei $f = 0$, dann ist $g = -h$.
Fall2: Alle Funktionen haben ein gleiches Vorzeichen. Dieser Fall kann wegen $f + g + h = 0$ nicht eintreten.
Fall3: Zwei Vorzeichen positiv, eins negativ. Gelte o.B.d.A. $f, g > 0$ und $h < 0$ dann betrachte

$$\int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu + \int_A -(f+g)\,d\mu = 0 \overset{14.13}{\Rightarrow} \int_A f\,d\mu + \int_A g\,d\mu = \int_A (f+g)\,d\mu$$

somit folgt die Aussage aus der linearität.
Fall4: Zwei Vorzeichen negativ und eins positiv. Dieser Fall kann per Multiplikation mit -1 auf den Fall 3 zurückgeführt werden. $\square$

Definition und Lemma 14.17 *(fast immer / fast überall)*
Sei $A(x)$ eine Aussage über $x \in X$. Gibt es eine Nullmenge $N \in \mathfrak{S}_0$ so dass für alle $x \in X \backslash N$ die Aussage $A(x)$ gilt, dann sagen wir $A(x)$ gilt fast immer bzw. fast überall (f.ü.).
Das Integral über einer Nullmenge hat immer den Wert 0. Insbesondere gelten mit $f, g \in \mathfrak{L}(A)$

$$\begin{aligned} f = g \quad \text{f.ü.} \quad &\Rightarrow \quad \int_X f\,d\mu = \int_X g\,d\mu \\ \mu\big(S(A,B)\big) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \int_A f\,d\mu = \int_B f\,d\mu \end{aligned}$$

Beweis. Zeige, dass für alle Nullmengen $N \in \mathfrak{S}_0$ und für alle $f \in \mathfrak{L}(A)$ gilt

$$\int_N f\,d\mu \;=\; 0$$

Sei dazu $f \geq t \in \mathfrak{T}$, dann gilt

$$\begin{aligned} &\int_N t\,d\mu = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \mu(S_k \cap N) = 0 \qquad \text{mit } t = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \chi_{S_k} \\ \Rightarrow \qquad &\int_N f\,d\mu = \sup\Big\{ \int_N t\,d\mu \,\Big|\, f \geq t \in \mathfrak{T} \Big\} = 0 \end{aligned}$$

Für $f = g$ fast überall gilt: Es gibt eine Nullmenge $N \in \mathfrak{S}_0$ derat, dass für alle $x \in X \backslash N$ gilt $f(x) = g(x)$. Und nach den Rechenregeln für die Symmetrische differenz gilt für $\mu\big(S(A,B)\big) = 0$, dass sich A und B nur um eine Nullmege unterscheiden. $\square$

14.3 Integrale in Produkträumen

Im Folgenden bezeichne $(Z := X \times Y, \mathfrak{S}, \pi)$ das Produkt der Maßräume $(X, \mathfrak{A}, \alpha)$ und $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$.

Definition 14.18 *(iterierte Integrale)*
Sei $f : Z \to \hat{\mathbb{R}}$ meßbar, dann definieren wir - sofern möglich - die iterierten Integrale durch

$$(I1) \qquad \int_X \left[\int_Y f(x,y)\, d\beta(y) \right] d\alpha(x)$$
$$(I2) \qquad \int_Y \left[\int_X f(x,y)\, d\alpha(x) \right] d\beta(y)$$

Hierbei heißt -sofern möglich- für $(I1)$, dass für fast alle $x \in X$ gilt: $f(x,\cdot)$ ist $\mathfrak{B}$-meßbar und

$$\int_Y \big(f(x,\cdot)\big)_+ \, d\beta < \infty \text{ oder } \int_Y \big(f(x,\cdot)\big)_- \, d\beta < \infty$$

Dann ist

$$F(x) := \int_Y f(x,\cdot)\, d\beta = \int_Y \big(f(x,\cdot)\big)_+ \, d\beta - \int_Y \big(f(x,\cdot)\big)_- \, d\beta$$

für fast alle $x \in X$ definiert. Weiter soll F eine $\mathfrak{A}$-meßbare Funktion sein mit

$$\int_Y F_+ \, d\alpha < \infty \text{ oder } \int_Y F_- \, d\alpha < \infty$$

Für $(I2)$ gilt selbiges analog.

Satz 14.19 *(Satz von Fubini für nicht negative Funktionen (FuB))*
Sei $f : Z = X \times Y \to [0, \infty]$ meßbar, dann gilt

$$\int_Z f\, d\pi = \int_X \left(\int_Y f\, d\beta \right) d\alpha = \int_Y \left(\int_X f\, d\alpha \right) d\beta \qquad \text{(FuB)}$$

Insbesondere existieren also die Iterierten Integrale und sind einander gleich.

Beweis. (Skizze)
Reduziere zunächst auf den Fall, dass f eine Treppenfunktion $t \in \mathfrak{T}$ ist. Dies ist möglich, denn jede meßbare Funktion ist punktweiser Grenzwert einer treppenfunktion nach Lemma 14.11 und mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt die Behauptung für f.
Reduziere nun auf den Fall, dass t eine charakteristische Funktion ist. Jede Treppenfunktion $t \in \mathfrak{T}$ hat die Form

$$t = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \chi_{S_k} \quad \text{mit } S_k \in \mathfrak{S}_F$$

Aus der linearität des Integrals folgt dann aus (FuB) für charakteristische Funktionen (FuB) für Treppenfunktionen. Jede meßbare menge $S \in \mathfrak{S}_F$ kann als $S = B \backslash N$ mit einer Borell-Menge B und einer Nullmenge N dargestellt werden. Insbesondere gilt für B

$$B = \dot{\bigcup_{j=1}^{\infty}} \bigcap_{m=1}^{\infty} \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_{jkm} \times B_{jkm} \quad \text{mit } A_{jkm} \in \mathfrak{A}_F \text{ und } B_{jkm} \in \mathfrak{B}_F$$

Zeige nun (FuB) für χ_B und χ_N.

$$\begin{aligned}
\int_Z \chi_B \, d\pi &= \int_Z \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_{jkm}}(x) \cdot \chi_{B_{jkm}}(y) \, d\pi(x,y) \\
&\overset{m.K}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_Z \chi_{A_{jkm}}(x) \cdot \chi_{B_{jkm}}(y) \, d\pi(x,y) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \pi(A_{jkm} \times B_{jkm}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_{jkm}) \cdot \beta(B_{jkm}) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \int_X \int_Y \chi_{A_{jkm}}(x) \cdot \chi_{B_{jkm}}(y) \, d\beta(y) \, d\alpha(x)
\end{aligned}$$

Nun können nach dem Satz über die monotone Konvergenz die Grenzprozesse wieder mit den Integralen vertauscht werden und wir haben die Aussage für χ_B gezeigt. Betrachte nun

$$\int_Z \chi_N \, d\pi = 0 \overset{!}{=} \int_X \int_Y \chi_N \, d\beta \, d\alpha = \int_X \beta\big(\chi_N(x,\cdot)\big) \, d\alpha$$

Es sind zu zeigen:
(i) $\chi_N(x,\cdot)$ ist $\mathfrak{B}$-meßbar und (ii) $\beta\big(\chi_N(x,\cdot)\big) = 0$
Da X und Y σ-endlich sind kann o.B.d.A. davon ausgegangen werden, dass $N \subset X_j \times y_j$ mit $X_j \in \mathfrak{A}_F$ und $Y_j \in \mathfrak{B}_F$ gilt. Da $\pi^*(N) = \pi(N) = 0$ gilt gibt es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ Mengen $A_{mk} \in \mathfrak{A}_F$ und $B_{mk} \in \mathfrak{B}_F$ so dass

$$N \subset V_m = \dot{\bigcup_{k=1}^{\infty}} A_{mk} \times B_{mk} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \alpha(A_{mk}) \cdot \beta(B_{mk}) < \frac{1}{m}$$

gelten. Damit ist

$$\begin{aligned}
& N(x,\cdot) \subset V_m(x,\cdot) = \dot{\bigcup_{\substack{k=1 \\ x \in A_{mk}}}^{\infty}} B_{mk} \\
\Rightarrow \quad & \beta^*\big(N(x,\cdot)\big) \leq \beta\big(V_m(x,\cdot)\big) = \sum_{\substack{k=1 \\ x \in A_{mk}}}^{\infty} \beta(B_{mk}) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta(B_{mk}) \cdot \chi_{A_{mk}}(x) =: f_m(x)
\end{aligned}$$

Die Funktion f_m ist meßbar und wegen $V_m \supset V_{m+1}$ monoton fallen. Des weiteren ist f_m durch $\beta(Y_j) \cdot \chi_{X_j}(x) \in \mathfrak{L}(A)$ nach oben hin beshränkt. Nach der Variante des Satzes über die monotone Konvergenz für monoton fallende Folgen gilt

$$\int_X \lim_{m\to\infty} f_m \, d\alpha = \lim_{m\to\infty} \int_X f_m \, d\alpha = \lim_{m\to\infty} \beta(B_{mk}) \cdot \alpha(A_{mk}) \leq \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0$$

Damit ist $N(x,\cdot)$ für fast alle $x \in X$ eine Teilmenge einer Nullmenge, denn

$$\beta\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} V_m\right) = 0 \quad \text{und} \quad \forall_m \; N \subset V_m$$

Da $(Y, \mathfrak{B}, \beta)$ nach voraussetzung vollständig ist, ist $\beta\big(N(x,\cdot)\big) = 0$ für fast alle $x \in X$. □

Varianten des Satzes von Fubini:

Satz 14.19 *(Variante 1)*
Sei $f : Z \to \hat{\mathbb{R}}$ eine meßbare Funktion mit

$$\int_Z f_+ \, d\pi < \infty \quad \text{oder} \quad \int_Z f_- \, d\pi < \infty$$

dann gilt (FuB) für f.

Satz 14.19 *(Variante 2)*
Eines der beiden iterierten Integrale zu $|f|$ sei kleiner als $+\infty$. Dann gilt dies auch für das andere iterierte Integral. Insbesondere gilt (FuB) und f gehört zu $\mathfrak{L}(Z)$.

Satz 14.19 *(Variante 3)*
Für $S \in \mathfrak{S}$ und $f\cdot\chi_S$ seien die Voraussetzungen von Satz 14.19 in einer der vorhergehenden Varianten erfüllt, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_S f \, d\pi &= \int_{P_x(S)} \int_{S(x,\cdot)} f(x,\cdot) \, d\beta(y) \, d\alpha(x) \\ &= \int_{P_y(S)} \int_{S(\cdot,y)} f(\cdot,y) \, d\alpha(x) \, d\beta(y)\end{aligned}$$

Definition 14.20 *(Träger / Support von f, Kompakt)*
Für eine kompakte Teilmenge $K \subset M$ schreiben wir $K \Subset M$.
Für $A \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $f : A \to \hat{\mathbb{R}}$ nenne wir

$$\operatorname{supp}(f) := \overline{\{x \in A \,|\, f(x) \neq 0\}}$$

den Träger bzw. Support von f. Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $m \in \mathbb{N}$ sei

$$C_m^0(\Omega) := \{f \in C^m(\Omega) \,|\, \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega\}$$

Bemerkung
Für $\hat{\mathrm{x}} \notin \operatorname{supp}(f)$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass $f_{|_{\mathrm{U}_\delta(\hat{\mathrm{x}})}} = 0$ ist.
Für $f \in C_m^0(\Omega)$ ist $\operatorname{supp}(f)$ beschränkt und es gilt

$$\operatorname{dist}\big(\operatorname{supp}(f), \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \Omega\big) := \inf\big\{\, |x-y| \,\big|\, x \in \operatorname{supp}(f) \text{ und } y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \Omega \,\big\} > 0$$

Lemma 14.21 *(Substitutionsregel I)*
Sei $A \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(N)$ und $b \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, dann gilt für alle $f \in C_0^0(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(Ax+b) \, d\lambda_N(x) = |\det(A)|^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(y) \, d\lambda_N(y)$$

Merkregel: $y = Ax + b \;\Rightarrow\; dy = |\det(A)| \cdot dx$

Beweis. (Skizze)
Nach dem Gauß-Algorithmus gibt es eine Permutationsmatrix $P := (p_{i,j})$, eine linke untere Dreiecksmatrix $L := (l_{i,j})$ sowie eine rechte obere Dreiecksmatrix $R := (r_{i,j})$ mit

$$A = PLR \quad \text{und } \det(A) = \det(P) \cdot \det(L) \cdot \det(R) = (\pm 1) \prod_{n=1}^{N} l_{n,n} - 1$$

Wegen $f \in C_0^0(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ gibt es ein $\hat{R} \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $\operatorname{supp}(f) \subset Q[-\hat{R} \cdot \mathbb{1}, \hat{R} \cdot \mathbb{1}]$ ist. Es sind also die folgenden Formeln zu zeigen:

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(x+b)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(y)\, d\lambda_N(y) \tag{1}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(Px)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(y)\, d\lambda_N(y) \tag{2}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(Lx)\, d\lambda_n(x) = \left(\prod_{n=1}^{N} l_{n,n} \right)^{-1} \cdot \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(y)\, d\lambda_N(y) \tag{3}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(Rx)\, d\lambda_n(x) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(y)\, d\lambda_N(y) \tag{4}$$

Für (1) benutze Induktion über N. Der Induktionsanfang folgt mit Satz 14.12 aus der Substitutionsregel im $\mathbb{R}$.
Für (2) gilt: P ist eine Permutationsmatrix mit $P(x) = (x_{\pi(n)} | n = 1...N)$. Nach Fubini ist die Reihenfolge der iterierten Integrale egal. Definiere also $y_n := x_{\pi(n)}$.
Zu (3) benutze Induktion über N. Für $N = 1$ betrachte mit $a := l_{1,1} \neq 0$

$$f(ax) \neq 0 \;\Rightarrow\; ax \in [-\hat{R}, \hat{R}] \;\Leftrightarrow\; x \in [\frac{-\hat{R}}{|a|}, \frac{\hat{R}}{|a|}]$$

Dann folgt der Induktionsanfang aus der $\mathbb{R}$-Substitutionsregel mit $y = ax$. Für den Schritt von N auf $N+1$ seien $a := l_{N+1,N+1}$ und

$$L := \begin{pmatrix} & & & 0 \\ & L' & & \vdots \\ & & & 0 \\ l_{N+1,1} & \dots & l_{N+1,N} & a \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(N+1)$$

mit einer unteren Dreiecksmatrix $L' \in \mathrm{GL}_{\mathbb{R}}(N)$ dann liefert der Satz von Fubini

$$\int_{\mathbb{R}}^{N+1} f(Lx)\, d\lambda_{N+1}(x) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \operatorname{sgn}(a) \int_{\alpha}^{\beta} f\big(A'x', a \cdot x_{N+1} + s(x')\big)\, dx_{N+1}\, d\lambda_N(x')$$

mit $s(x') := \sum_{n=1}^{N} l_{N,n} \cdot x_n$. Substituiere nun $y_{N+1} := a \cdot x_{N+1} + s(x')$, dann folgt die Aussage aus der eindimensionalen Substitutionsregel und dem Satz von Fubini.
Für (4) benutze wieder Induktion über N. Der Anfang für $N = 1$ mir $R = r_{1,1}$ ist klar. Für den Schritt von $N-1$ auf N definiere $x := (x_1, x')$ sowie R' als R ohne die erste Spalte und Zeile und betrachte

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} f(Rx)\, d\lambda_N = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} f(r_{1,1}x_1, R'x')\, d\lambda_1\, d\lambda_{N-1}$$

$\square$

Definition und Lemma 14.22 *(Halbnorm auf $\mathfrak{L}$)*
Sei $A \subset X$ eine Teilmenge, dann definieren wir für $f \in \mathfrak{L}(A)$

$$|f|_1 := |f|_{\mathfrak{L}(A)} := \int_A |f| \, d\alpha$$

Dann ist $|\cdot|_1$ eine Halbnorm auf $\mathfrak{L}(A)$ und es gilt

$$\Big| \int_A f \, d\alpha \Big| \leq \int_A |f| \, d\alpha = |f|_1$$

Weiter gelten

NORM 1′	$|f|_1 \geq 0$ und $|0| = 0$
NORM 2	$|\gamma f|_1 = |\gamma| \cdot |f|_1 \quad$ für $\gamma \in \mathbb{R}$
NORM 3	$\Big| |f|_1 + |g|_1 \Big| \leq |f \pm g|_1 \leq |f|_1 + |g|_1$

Achtung *Bei (NORM 1)′ gilt nicht $|f|_1 = 0 \Leftrightarrow f = 0$, stattdessen gilt diese Eigenschaft (nur) fast überall, da f auf einer Nullmenge z.B. durchaus $\pm\infty$ sein könnte.*

Beweis. (Skizze)
Hauptsächlich nutzen wir die Monotonie des Integrals (nach Satz 14.15) aus. Betrachte

$$\Big| \int_A f \, d\alpha \Big| = \Big| \int_A f_+ - f_- \, d\alpha \Big| = \leq \int_A f_+ \, d\alpha + \int_A f_- \, d\alpha \overset{14.15}{=} \int_A f_+ + f_- \, d\alpha = \int_A |f| \, d\alpha$$

Die Normeigenschaften folgen ebenfalls aus der Monotonie und den Normeigenschaften des Betrages in $\mathbb{R}$. □

Satz 14.23 *$C_0^0(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ liegt dicht in $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, d.h. jede Funktion aus $Ll(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ kann als Grenzwert einer Funktion aus $C_0^0(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ dargestellt werden.*

Beweis. Wir benutzen die folgenden Argumente:
(a) Liegt A dicht in B und b dicht in C, dann liegt A auch dicht in C.
(b) Liegt A dicht in B so liegt $\mathrm{span}(A)$ dicht in $\mathrm{span}(B)$.
1. Wir wissen: Der Raum der Treppenfunktionen $\mathfrak{T}$ liegt dicht in $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ nach Lemma 14.11
2. Jede Treppenfunktion $t \in \mathfrak{T}$ ist von der Form

$$t = \sum_{k=1}^{K} w_k \cdot \chi_{S_k} \quad \text{mit } S_k \in \mathfrak{S}_F$$

nach (b) reicht es aus alle χ_M mit $M \in \mathfrak{S}_F$ zu approximieren.
3. Nach Definition des Lebesgue-Maßes λ_N gibt es eine Folge T_k aus

$$\mathfrak{R} = \mathring{\mathfrak{R}} = \Big\{ \dot{\bigcup_{j=1}^{J}} Q_j \mid Q_j \text{ sind Quader im } \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \Big\}$$

mit $d(T_k, M) \to 0$. Nach (a) und (b) genügt es statt $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ alle χ_Q für Quader $Q \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ zu aproximieren.
4. Für $Q = Q[a,b] = Q[a_1, b_1] \times \ldots \times Q[a_N, b_N]$ gilt

$$\chi_{Q[a,b]}(x) = \chi_{Q[a_1,b_1]}(x_1) \cdot \ldots \cdot \chi_{Q[a_N,b_N]}(x_N)$$

Definiere

$$\mathfrak{X}_{n,\delta}(x_n) := \begin{cases} 0 & \text{für } x_n < a_n - \delta \\ 1 + \frac{a_n + x_n}{\delta} & \text{für } a_n - \delta \leq x_n < a_n \\ 1 & \text{für } a_n \leq x_n \leq b_n \\ 1 - \frac{b_n - x_n}{\delta} & \text{für } b_n < x_n \leq b_n + \delta \\ 0 & \text{für } x_n > b_n + \delta \end{cases}$$

und

$$\mathfrak{X}_\delta := \mathfrak{X}_{1,\delta}(x_1) \cdot \ldots \cdot \mathfrak{X}_{N,\delta}(x_N)$$

Nach Konstruktion gelten dann $\mathfrak{X}_\delta \in C_0^0(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ und $0 \leq \mathfrak{X}_\delta - \chi_Q \leq 1$ sowie

$$\operatorname{supp}(\mathfrak{X}_\delta - \chi_Q) = Q[a - \delta\,\mathbb{1}, b + \delta\,\mathbb{1}] \backslash Q(a,b) =: \tilde{Q} \backslash Q_0$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} |\,\mathfrak{X}_\delta - \chi_Q|_1 &= \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} (\mathfrak{X}_\delta - \chi_X)\, d\lambda_N \leq \int_{\tilde{Q}\backslash Q_0} 1\, d\lambda_N \\ &= \prod_{n=1}^{N} (b_n - a_n + 2\delta) - \prod_{n=1}^{N} (a_n - b_n) \stackrel{\delta \to 0}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

□

Definition und Lemma 14.24 *(Würfel, Würfelnetz)*
Seien $X, Y \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ Teilmengen, dann gelten
(1) *Ist $G : X \to Y$ Lipschitz-stetig, dann bildet G Nullmengen auf Nullmengen ab.*
(2) *Ist $F : Y \to X$ ein Homöomorphismus, und $F^{-1} : X \to Y$ bildet Nullmengen auf Nullmengen ab, dann ist $f \circ F : Y \to \hat{\mathbb{R}}$ meßbar, wenn $f : X \to \hat{\mathbb{R}}$ meßbar ist.*
Wir definieren einen Würfel im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ durch

$$W := Q[a, a + \delta \cdot \mathbb{1}] = Q[m - \frac{\delta}{2} \cdot \mathbb{1}, m + \frac{\delta}{2} \cdot \mathbb{1}]$$

mit $a \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ und $m := a + \frac{\delta}{2} \cdot \mathbb{1}$. Weiter nennen wir

$$\mathbb{W}_M := \left\{ W_{M,z} := Q[z \cdot 2^{-M}, (z + \mathbb{1}) \cdot 2^{-M}] \,\middle|\, z \in \mathbb{Z}^N \right\}$$

ein Würfelnetz mit Kantenlänge 2^{-M}.

Beweis. (Skizze)
1. Zeige: $\lambda_N\big(G(W)\big) \leq \big(L \cdot \sqrt{N}\big)^N \cdot \lambda_N(W)$ mit der Lipschitz-Konstanten L zu G.
2. Für jeden Quader $Q = Q[a,b] \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ gilt

$$Q \subset \bigcup_{\substack{W_{M,z} \in \mathbb{W}_M \\ W_{M,z} \cap Q \neq \varnothing}} W_{M,z} \subset Q[a - 2^{-M}, b + 2^{-M}]$$

und demnach gilt

$$\lambda_N(Q) = \prod_{n=1}^{N} (b_n - a_n) \leq \sum_{n=1}^{N} \lambda_N(W_{M,z}) \leq \prod_{n=1}^{N} (b_n - a_n + 2 \cdot 2^{-M}) \stackrel{M \to \infty}{\longrightarrow} \lambda_N(Q)$$

Zu jedem Quader Q und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also endlich viele Würfel W_j mit $j = 1...J$ derart, dass gelten

$$Q \subset \bigcap_{j=1}^{J} W_j \quad \text{und} \quad \lambda_N(Q) \leq \sum_{j=1}^{J} \lambda_N(W_j) < \lambda_N(Q) + \varepsilon$$

3. Sei eine Nullmege A und ε_1 gegeben, dann gibt es Quader Q_k mit

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_N(Q_k) < \frac{\varepsilon_1}{2 \cdot C^N} =: D \;\; \text{mit } C := L \cdot \sqrt{N}$$

Wähle nun nach 2. zu $Q := Q_k$ und $\varepsilon := D \cdot 2^{-k}$ die Würfel $W_{j,k}$, dann folgt

$$G(A) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{J_k} G(W_{j,k}) \implies \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_N\big(G(Q_k)\big) \leq C^N \sum_{k=1}^{\infty} \big(\lambda_N(Q_k) + \varepsilon\,\big) < \varepsilon$$

4. Für den nachweis von (2) betrachte

$$\{y|f \circ F(y) > \alpha\} = F^{-1}\big(\{x|f(x) > \alpha\}\big) =: F^{-1}(M)$$

Wir wissen, dass wir jede Messbare Menge als $M = B \backslash N$, mit einer Borell-Menge B und einer Nullmenge N, darstellen können, somit folgt

$$F^{-1}(M) \;=\; F^{-1}(B) \backslash F^{-1}(N)$$

wobei $F^{-1}(B)$ wieder eine Borellmenge ist, da F ein Homöomorphismus ist. □

14.4 Die Konvergenzsätze und die Vollständigkeit von $\mathfrak{L}(A)$

Im Folgenden seien
- $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum
- $A \subset X$ eine meßbare Teilmenge von X und
- $f, f_k : A \to \hat{\mathbb{R}}$ meßbare Funktionen.

Satz 14.25 *(Lemma von Faton)*
Für meßbare Funktionen $f_k : A \to [0, \infty]$ gilt

$$\liminf_{k \to \infty} \int_X f_k \, d\mu \;\geq\; \int_X \liminf_{k \to \infty} f_k \, d\mu$$

Beweis. Für $K \in \mathbb{N}$ und $l \geq K$ gilt

$$f_l \;\geq\; \inf_{k \geq K} f_k =: F_k \nearrow \liminf_{k \to \infty} f_k$$

und daher folgt mit dem Satz über die monotone Konvergenz

$$\int_A f_j \, d\mu \geq \int_A \inf_{k \geq K} f_k \, d\mu \;\overset{k\to\infty}{\longrightarrow}\; \int_A \liminf_{k \to \infty} f_k \, d\mu$$

□

Satz 14.26 *(Satz von Lebesque / Satz von der beschränkten Konvergenz)*
Seien die Funktionen $f_k, g : A \to \hat{\mathbb{R}}$ meßbar mit

$$\int_A |g|\, d\mu < \infty \quad \text{und} \quad f_k \to f \text{punktweise fast überall}$$

Weiter gelte für alle k fast überall $|f_k| \leq g$, dann gilt

$$\lim_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu = \int_A \lim_{k\to\infty} f_k\, d\mu = \int_A f\, d\mu$$

Beweis. Nach dem soeben gezeigtem Lemma von Faton (Satz 14.25) gelten

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty} \int_A (g - f_k)\, d\mu &\geq \int_A (g - f)\, d\mu && (1)\\
\liminf_{k\to\infty} \int_A (g + f_k)\, d\mu &\geq \int_A (g + f)\, d\mu && (2)\\
\liminf_{k\to\infty} \int_A (g - f_k)\, d\mu &= \liminf_{k\to\infty} \left[\int_A g\, d\mu - \int_A f_k\, d\mu\right]\\
&= \int_A g\, d\mu - \limsup_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu
\end{aligned}$$

Demnach folgt aus (1)

$$\limsup_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu \leq \int_A g\, d\mu - \int_A (g - f)\, d\mu = \int_A f\, d\mu \tag{3}$$

und entsprechend aus (2)

$$\liminf_{k\to\infty} \int_A f_k\, d\mu \geq -\int_A g\, d\mu + \int_A (g + f)\, d\mu = \int_A f\, d\mu \tag{4}$$

Die Kombination von (3) und (4) liefert die Behauptung. □

Satz 14.27 *$\mathfrak{L}(A)$ ist vollständig bezüglich $|\cdot|_1$.*
Genauer heißt dies: Zu jeder Cauchyfolge (f_k) aus $\mathfrak{L}(A)$, also

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_K \quad \forall_{k,l\geq K} \qquad |f_k - f_l|_1 < \varepsilon$$

gibt es ein $f \in \mathfrak{L}(A)$ mit $|f_k - f|_1 \to 0$. Zusätzlich kann eine Teilfolge $g_k := f_{\pi(k)}$ so ausgewählt werden, dass gelten

$$\begin{aligned}
&g_k \to f && \text{punktweise fast überall} && (1)\\
&\forall_{\delta>0} \quad \exists_{Z\in\mathfrak{S}_F} && \mu(Z) < \delta \text{ und } g_{k|_Z} \to f_{|_Z} \text{ gleichmäßig} && (2)
\end{aligned}$$

Beweis. (Skizze)
Eine Cauchyfolge konvergiert, wenn auch nur eine Teilfolge konvergiert[1]. Die Teilfolge g_k wählen wir mit Hilfe des Konvergenzbeschläunigungssatzes (Lemma 14.28 s.u.) aus. Für eine positive Nullfolge

[1] Vergl. Analysis I

(β_k) wählen wir die Teilfolge $g_k := f_{\pi(k)}$ mit $|g_{k+1}-g_k| < \beta_k$. Mit einer weiteren positiven Nullfolge (α_k) sei

$$Y_k := \left\{ x \in A \,\middle|\, |g_{k+1}(x) - g_k(x)| > \alpha_k \right\}$$

Dann gelten

$$\begin{aligned}
\alpha_k \cdot \mu(Y_k) &= \int_{Y_k} \alpha_k \, d\mu < |g_{k+1} - g_k|_1 < \beta_k \\
Z_K &:= \bigcup_{k=K}^{\infty} Y_k \supset Z_{K+1} \\
Z &:= \bigcap_{K=1}^{\infty} Z_K
\end{aligned}$$

Dann folgt sofort

$$\mu(Z_K) \leq \sum_{k=K}^{\infty} \mu(Y_k) \leq \sum_{k=K}^{\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k}$$

An (α_k) und (β_k) stelle die Bedingungen, dass die Reihen über die α_k, $\beta_k \frac{\beta_k}{\alpha_k}$ in $\mathbb{R}$ konvergieren[2], dann konvergiert $\mu(Z_K)$ für $K \to \infty$ gegen Null und daher ist auch $\mu(Z) = 0$.
Für $x \notin Z_K$ folgt für alle $k \geq K$ aus $x \notin Y_k$, dass $|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \leq \alpha_k$ ist und damit ist $g_{k|_{Z_K}}$ eine gleichmäßige Cauchyfolge.
Für $x \notin Z$ gibt es ein K mit $x \notin Z_K$ dann ist $g_k(x)$ immer noch eine Cauchyfolge[3].
Hiermit haben wir eine fast überall definierte und nach Lemma 14.4 meßbare Grenzfunktion und die Zusatzbehauptungen (1) und (2) sind erflllt. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_A |f| \, d\mu &= \int_A \liminf_{k\to\infty} |g_k| \, d\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_A |g_k| \, d\mu \\
&\leq \sup_{k\in\mathbb{N}} |g_k|_1 \; < \; \infty
\end{aligned}$$

Also kann nur auf einer Nullmenge $|f(x)| = +\infty$ gelten. Ersetze dort ∞ durch einen endlichen Wert, dann ist $f \in \mathfrak{L}(A)$ und schließlich gilt:

$$\begin{aligned}
|f - g_k|_1 &= \int_A \liminf_{l\to\infty} |g_l - g_k| \, d\mu \\
&\leq \liminf_{l\to\infty} |g_l - g_k|_1 < \varepsilon \quad \text{für } k \geq K
\end{aligned}$$

□

Lemma 14.28 *(Konvergenzbeschläunigungssatz)*
Zu jeder Cauchyfolge $x_k)$ in einem metrischen Raum (M, d) und zu jeder Nullfolge (β_k) aus $\mathbb{R}_+$ gibt es eine Teilfolge $x_{\pi(k)}$ so dass für alle k gilt

$$d\big(x_{\pi(k+1)}, x_{pi(k)}\big) \; < \; \beta_k$$

[2] z.B. mit $\beta_k := 4^{-k}$ und $\alpha_k := 2^{-k}$ sind diese Bedingungen erfüllt.
[3] Die Konvergenz ist aber vielleicht nicht mehr gleichmäßig, weil K von x abhängen kann.

Beweis. (Idee)
Für alle Cauchyfolgen gilt

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_K \quad \forall_{k,l\geq K} \qquad d\big(x_k, x_l\big) < \varepsilon \tag{1}$$

Damit ist der Rekursionsanfang klar, denn wähle $\varepsilon := \beta_1$ hierzu K und setze $\pi(1) := K$, so folgt die Behauptung für $k = 1$. Fahre nun so fort...

Im Folgenden seien $(X, \mathfrak{S}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathfrak{S}$.

Satz 14.29 *Seien $\mu(A) < \infty$ und (f_l) eine Folge in $\mathfrak{L}(A)$. Dann gilt*

$$\lim_{l\to\infty} \int_A f_l \, d\mu \;=\; \int_A \lim_{l\to\infty} f_l \, d\mu$$

falls die Folge (f_l) gleichmäßig Konvergiert.

Beweis. Definiere f als den Grenzwert der Folge (f_l), dann gilt

$$\Big| \int_A f_l \, d\mu - \int_A f \, d\mu \Big| \leq \int_A |f_l - f| \, d\mu \;\leq\; \mu(A) \cdot \sup_{x\in A} |f_l(x) - f(x)| \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

□

Satz 14.30 *(stetige Parameterabhängigkeit von Integralen)*
Sei Ω ein metrischer Raum und $f : \Omega \times A \to \mathbb{R}$ eine Abbildung mit den Eigenschaften $f(\cdot, x) \in C^0(\Omega)$ für fast alle $x \in A$ sowie für alle $p \in \Omega$ soll $f(p, \cdot)$ meßbar sein. Weiter gelte

$$\exists_{g\in\mathfrak{L}(A)} \quad \forall_{p\in\Omega} \qquad |f(p, x)| \;\leq\; |g(x)| \text{ für fast alle } x \in A$$

Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F : \Omega \;&\to\; \mathbb{R} \\ p \;&\mapsto\; \int_A f(p, x) \, d\mu(x) \end{aligned}$$

stetig.

Beweis. (Idee)
Da Ω ein metrischer Raum ist zeige die Folgenstetigkeit von F mit

$$p_l \overset{l\to\infty}{\longrightarrow} p \quad \text{und} \quad \tilde{f}_l := f(P_l, \cdot) \quad \text{und} \quad \tilde{f} := f(p, \cdot)$$

Nutze nun die Voraussetzungen aus und schlieÃŸe mit dem Satz von Lebesgue auf die Behauptung.

Satz 14.31 *(differenzierbare Parameterabhängigkeit von Integralen)*
Sei Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $f : \Omega \times A \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den Eigenschaften

1. *für fast alle $x \in A$ ist $f(\cdot, x) \in C^1(\Omega)$*
2. *Für alle $p \in \Omega$ und für alle $n = 1..N$ ist $\partial_{p_n} f(p, \cdot)$ meßbar*
3. *Es gibt ein $g \in \mathfrak{L}(A)$ so dass für alle $p \in \Omega$ und für alle $n = 1...N$ die folgende Ungleichung für fast alle $x \in A$ gilt: $|\partial_{p_n} f(p, x)| \leq g(x)$*

Dann ist die Funktionen

$$\begin{aligned} F : \Omega &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto \int_A f(p, x)\, d\mu(x) \end{aligned}$$

stetig diff'bar mit den partiellen Ableitungen

$$\partial_n F(p) = \int_A \partial_{p_n} f(p, x)\, d\mu(x) \quad \text{für } n = 1...N$$

Beweis. (Idee)
Benutze den Mittelwertsatz und den Satz von Lebesgue. Anschließend zeige die Stetigkeit aller partiellen Ableitung mit Satz 14.30.

Satz 14.32 *(Verbindung von Lebesgue- und uneigentlichem Riemann-Integral)*
Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ über alle abgeschlossenen Teilintervalle von (a, b) Riemann-Integrierbar, dann gilt: f gehört genau dann zum Raum $\mathfrak{L}(A)$ der Lebesgue-Integrierbaren Funktionen, falls das uneigentliche Riemannintegral

$$\int_a^b |f(t)|\, dt$$

in $\mathbb{R}$ existiert. Ferner existiert dann auch das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_a^b f(t)\, dt$$

und dieses ist dem Lebesgue-Integral von f über (a, b) gleich.

Beweis. (Skizze)
Sei zunächst $f \in \mathfrak{L}(A)$, dann gelten für alle Folgen $a_l \searrow a$ und $b_l \nearrow b$ aus $\mathbb{R}$

$$f_l := \chi_{(a_l, b_l)} \cdot f \longrightarrow f \text{ punktweise fast überall} \quad \text{und } |f_l| \leq |f| =: g \in \mathfrak{L}\left((a, b)\right)$$

so dass mit dem Satz von Lebesgue und dem Satz 14.12 die Aussage folgt.
Gelte nun für das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_a^b |f(t)|\, dt < \infty$$

dann liefert Satz 14.12 eine Folge $(f_l) \subset \mathfrak{L}\left((a, b)\right)$, deren Grenzwert f punktweise fast überall ist. Damit ist f meßbar und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz und Satz 14.12 folgt die Aussage. $\square$

14.5 Der Transformationssatz

Satz 14.33 *(Substitutionsregel II / Transformationssatz)*
Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus[4]*, dann gilt:*
f gehört genau dann zu $\mathfrak{L}(V)$, wenn $f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')|$ zu $\mathfrak{L}(U)$ gehört und es gilt

$$\int_V f \, d\lambda_N \;=\; \int_U f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')| \, d\lambda_N$$

Es kann Φ' durch J_Φ die Jakobimatrix von Φ ersetzt werden, denn es gilt $\det(J_\Phi) = \det(\Phi')$.

Merkregel: *Man kann sich die Formel im obigen Satz als Tausch von Variablen $y = \Phi(x)$ vorstellen. Wie im $\mathbb{R}$ gibt es hier eine einfache Merkregel, nämlich:*

$$dy \;=\; \left|\det\big(J_\Phi(x)\big)\right| dx$$

Für die Transformation

$$\int_V f(y) \, d\lambda_N(y) \;=\; \int_U f \circ \Phi(x) \cdot |\det(\Phi'(x))| \, d\lambda_N(x)$$

Die Transformation Φ ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus der Borelalgebren. Nimmt man für f die charakteristische Funktion $\chi_{\Phi(\Omega)}$ einer meßbaren Menge $\Omega \subset U$, dann besagt der Transformationssatz

Beweis. Der Beweis des Transformationssatzes folgt weiter unten.

Bemerkung (Maßtransformation im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$)
Sei $U \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offene Teilmenge, dann gilt meßbare Mengen $\Omega \subset U$

$$\lambda_N\big(\phi(\Omega)\big) \;=\; \int_\Omega |\det(\Phi')| \, d\lambda_N$$

Beweis. Folgt unmittelbar aus 14.33

Erinnerung Für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ definierten wir

$$C_0^\infty(\Omega) := \bigcap_{l=1}^{\infty} C_o^l(\Omega) \quad \text{und} \quad C_0^l(\Omega) := \{\, f \in C^l(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f) \Subset \Omega \,\}$$

Definition 14.34 *(Glättungsoperatoren)*
Die Funktion $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ habe die Eigenschaften

$$\sigma \geq 0 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma \, d\lambda_N \;=\; 1$$

Dann nennen wir die für alle $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ und alle $\varepsilon > 0$ durch

$$S_\varepsilon(f) := \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma_\varepsilon(x-y) f(y) \, d\lambda_N(y) \quad \text{mit } \sigma_\varepsilon(z) := \varepsilon^{-N} \cdot \sigma(\frac{z}{\varepsilon})$$

[4] D.h. Φ ist bijektiv und Φ, Φ^{-1} sind stetig diff'bar

definierte lineare Abbildung S_ε den (durch σ bestimmten) Glätungsoperator. Ist f nur auf einer meßbaren Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ definiert und integrierbar, so wird entsprechend

$$S_\varepsilon(f) := \int_\Omega \sigma_\varepsilon(x-y)f(y)\,d\lambda_N(y) = S_\varepsilon(f) := \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma_\varepsilon(x-y)f(y)\cdot\chi_\Omega\,d\lambda_N(y)$$

definiert. Wir schreiben auch $S_\varepsilon f =: \sigma_\varepsilon * f$ und nennen $\sigma_\varepsilon * f$ die Faltung von σ_ε und/mit f.

Lemma 14.35 *Es gibt eine Funktion $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ mit*

$$\sigma \geq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(\sigma) \subset K_1(0) \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma\,d\lambda_N = 1$$

Für $\sigma_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ gelten dann

$$\sigma_\varepsilon \geq 0 \quad \text{und} \quad \operatorname{supp}(\sigma_\varepsilon) \subset K_\varepsilon(0) \quad \text{sowie} \quad \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma_\varepsilon\,d\lambda_N = 1$$

Beweis. (Skizze)
Die nichtnegativen Funktion

$$f(t) := \begin{cases} 0 & \text{falls } t \leq 0 \\ \exp(-\frac{1}{t}) & \text{sonst} \end{cases}$$

gehört zu $C^\infty(\mathbb{R})$ und hat ihren Träger in $[0,\infty)$. Definiere nun

$$g(t) := f(t)\cdot f(1-t)$$

Diese ist beliebig oft diff'bar und hat ihren Träger in $[0,1]$ welches kompakt in $\mathbb{R}$ liegt. Betrachte nun

$$\tilde\sigma := g\big(|\cdot|^2\big) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \subset \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \text{ und } c := \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \tilde\sigma\,d\lambda_N \quad \text{und definiere } \sigma := c^{-1}\cdot\tilde\sigma$$

Nach dieser Konstruktion hat σ die geforderten Eigenschaften und mit Satz 14.23 folgt der Rest der Beuhauptung. □

Lemma 14.36 *(Eigenschaften der Glättungsoperatoren)*
Sei ohne Einschränkung[5] $\operatorname{supp}(\sigma) \subset K_1(0)$ für ein $\sigma \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$. Es gelten

1. *Die Glättungsoperatoren*

$$\begin{aligned} S_\varepsilon : \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) &\to \mathfrak{l}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \subset C^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \\ f &\mapsto S_\varepsilon f = \sigma_\varepsilon * f \end{aligned}$$

   sind linear und für alle Multiindizes α gilt $\partial^\alpha(S_\varepsilon f) = (\partial^\alpha\sigma_\varepsilon) * f$

2. $\operatorname{supp}(S_\varepsilon f) \subset \operatorname{supp}(f) + K_\varepsilon(0)$ *für $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$*

3. *Die Glättungsoperatoren sind monoton, d.h. für $f, g \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ gilt*

$$f \leq g \;\Rightarrow\; S_\varepsilon f \leq S_\varepsilon g$$

   insbesondere gilt $m \leq S_\varepsilon f \leq M$, falls $m \leq \int f\,d\lambda_N \leq M$ für $m, M \in \mathbb{R}$ gilt.

[5] sonst transformiere mit Satz 14.23

4. *Die S_ε sind gleichmäßig stetig, denn für $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ gilt $|S_\varepsilon f|_1 \leq |f|_1$*

5. *Ist $f \in C^0(\mathbb{R}^{\mathrm{N}}) \cap \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ so konvergiert $S_\varepsilon f \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$ auf allen $\Xi \Subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$*

6. *Für alle meßbaren Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und alle Funktionen $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$ konvergiert $S_\varepsilon f \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} f$ in $\mathfrak{L}(\Omega)$ also in der $|\cdot|_1$-Halbnorm.*

Beweis. (Skizze)
Für $f \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ sind die Glättungsoperatoren Wohldefiniert, denn $\sigma_\varepsilon(x-\cdot)f$ gehört zu $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.
Zu **1.** und **4.**: Wegen der Träger von $\sigma_\varepsilon(x-\cdot)$ und f gilt mit $\Xi := K_\varepsilon(x) \cap \operatorname{supp}(f)$

$$S_\varepsilon f(x) = \int_\Xi \sigma_\varepsilon(x-y) f(y)\, d\lambda_N(y)$$

Nach Satz 14.31 gehört $S_\varepsilon f$ zu $C^\infty(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ und für einen Multiindex α gilt

$$\partial^\alpha\big(S_\varepsilon f\big)(x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \big(\partial^\alpha \sigma_\varepsilon\big)(x-y)\cdot f(y)\, d\lambda_N(y) \;=\; \big((\partial^\alpha\sigma_\varepsilon) * f\big)(x)$$

Ferner ist mit dem Satz von Fubini/Tonelli und der Substitution $z = z(x) = x - y$

$$|S_\varepsilon f|_1 \;\leq\; \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} 1 \cdot |f(y)|\, d\lambda_n(y) = |f|_1$$

Damit ist $S_\varepsilon f$ insbesondere ein Element von $\mathfrak{L}(\mathbb{R}^{\mathrm{N}})$.
Zu **2.** Substituiere wieder $z = z(x) = x - y$ und erhalte

$$S_\varepsilon f(x) \;=\; \int_{K_\varepsilon(0)} \sigma_\varepsilon(z)\cdot f(x-z)\, d\lambda_N(z)$$

Gilt also $x \notin \operatorname{supp}(f) + K_\varepsilon(0)$ so ist $x \notin \operatorname{supp}(f) + z$, d.h. $f(x-z) = 0$, für $z \in K_\varepsilon(0)$
Zu **3.** Die Monotonie folgt aus der Monotonie des Integrals, für den Insbesondere Teil betrachte Konstante Funktionen c, diese sind Eigenfunktionen von S_ε zum Eigenwert 1, d.h

$$S_\varepsilon c(x) = \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma_\varepsilon(x-y) c\, d\lambda_N(y) = c \cdot \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma_\varepsilon(x-y)\, d\lambda_N(y) = c \cdot 1$$

Zu **5.** Seien f eine stetige, integrierbare Funktion und $\Xi \Subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, dann gilt

$$S_\varepsilon f(x) - f(x) \;=\; \int_{K_\varepsilon(x)} \sigma_\varepsilon(x-y)\cdot\big(f(y)-f(x)\big)\, d\lambda_N(y) \;\Rightarrow\; |S_\varepsilon f(x) - f(x)| \leq \sup_{y\in K_\varepsilon(x)} |f(y)-f(x)|\cdot 1$$

Folglich gilt für $\varepsilon \leq 1$

$$\sup_{x\in\Xi} |S_\varepsilon f(x) - f(x)| \;\leq\; \sup\big\{|f(y)-f(x)| \;:\; x \in \Xi \wedge y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \wedge |x-y| \leq \varepsilon \;\big\} \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

da $\Xi + K_1(0) \Subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und f auf dieser Menge gleichmäßig stetig ist.
Zu **6.** Wir verwenden das bereits aus dem Beweis von Satz 14.23 bekannte Prinzip:
(b) Liegt A dicht in B so liegt $\operatorname{span}(A)$ dicht in $\operatorname{span}(B)$.
Sowie den nachfolgenden Satz 14.37. Zeige zunächst, dass $S_\varepsilon f$ in $\mathfrak{L}(\Omega)$ gegen f konvergiert, d.h.

$$|S_\varepsilon f - f|_1 = \int_\Omega |S_\varepsilon f - f|\, d\lambda_N \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$$

Nimm dazu ohne Einschrennkung an, dass $\Omega = \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ (mit $f := E_0 f$ und $|\cdot|_{1,\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \geq |\cdot|_{1,\Omega}$), dann wende mit **4.** Satz 14.37 an. Nimm weiter ohne Einschränkung an, dass $f \in \mathfrak{L}\big([0,\infty)\big)$ (nach (b) und da $f^{-1}(\{\infty\})$ eine Nullmenge ist. Weiter seien nach Satz 14.37 f und $\mathrm{supp}(f)$ beschränkt, sonst konstruiere eine Folge, die f approximiert nach dem Satz von Lebesgue. Reduziere nun wie bereits bekannt zunächst auf den Fall, dass f eine Treppenfunktion ist und anschließend auf den Fall, dass $f = \chi_M$ eine charakteristische Funktion einer meßbaren Menge M ist.
Nach Definition gibt es nun eine Folge einfacher Mengen E_l aus $\mathfrak{R}$, dem Ring der endlichen disjunkten Vereinigungen von Würfeln. Reduziere also auf den Fall, dass $f = \chi_W$ eine charakteristische Funktion eines Würfels ist. Dann gilt

$$S_\varepsilon f(x) \;=\; \int_{W \cap K_\varepsilon(x)} \sigma_\varepsilon(x-y)\, d\lambda_N(y)$$

Ist $x \in \mathrm{int}(W)$ ein innerer Punkt, so ist $f(x) = 1$ und wir können ε so klein wählen, dass $K_\varepsilon(x) \subset W$ ist. Mit solchem ε gilt dann

$$S_\varepsilon f(x) \;=\; \int_{K_\varepsilon(x)} \sigma_\varepsilon(x-y)\, d\lambda_N(y) \;=\; \int_{\mathbb{R}^{\mathrm{N}}} \sigma_\varepsilon(x-y)\, d\lambda_N(y) \;=\; 1$$

Ist x hingegen ein innerer Punkt des Kompliments, d.h. $x \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \setminus \bar{W}$, so gilt $f(x) = 0$ und wir können ε so klein wählen, dass $K_\varepsilon(x) \cap W = \varnothing$ ist. Da der Rand des Würfels ∂W eine Nullmenge ist, konvergiert $S_\varepsilon f$ punktweise fast überall gegen f. Der Satz von Lebesgue liefert schließlich die Behauptung. $\square$

Satz 14.37 *(Konsistenz und Stetikkeit impliziert Konvergenz)*
Seien X, Y normierte Räume und $\phi, \phi_\nu : X \to Y$ stetige lineare Operatoren von X nach Y, d.h. es gibt positive Konstanten c und c_ν so dass für alle $x \in X$ gelten

$$\big|\phi x\big|_Y \leq c \cdot \big|x\big|_X \quad \text{und} \quad \big|\phi_\nu x\big|_Y \leq c_\nu \cdot \big|x\big|_X$$

Ferner sei D eine dichte Teilmenge von X, dann folgt aus der Satbilität, d.h.

$$\exists_{\gamma>0} \quad \forall_\nu \quad \forall_{x\in X} \qquad \big|\phi_\nu x\big|_Y \leq \gamma \cdot \big|x\big|_X$$

und der Konsistenz, d.h.

$$\forall_{x\in D} \qquad \phi_\nu x \xrightarrow{\nu\to 0} \phi x$$

die Konvergenz, d.h.

$$\forall_{x\in X} \qquad \phi_\nu x \xrightarrow{\nu\to 0} \phi x$$

In Worten: *Konvergenz auf einer dichten Teilmenge und gleichmäßige Beschränktheit der linearen Operatoren impliziert die Konvergenz auf dem gesamten Raum.*

Beweis. Seien $x \in X$ und $\varepsilon > 0$ gegeben, dann wähle ein $d \in D$ mit

$$\big|x - d\big|_X \;\leq\; \varepsilon \cdot \min\{\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{c}\}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\big|\phi_\nu x - \phi x\big|_Y \;&\leq\; \big|\phi_\nu x - \phi d\big|_Y + \big|\phi_\nu d - \phi d\big|_Y + \big|\phi_\nu d - \phi x\big|_Y \\
&\leq\; \gamma \cdot \big|x - d\big|_X + \big|\phi_\nu d - \phi d\big|_Y + c \cdot \big|x - d\big|_X \\
&\leq\; 2\,\varepsilon + \big|\phi_\nu d - \phi d\big|_Y \qquad \xrightarrow{\nu\to 0} \; 2\,\varepsilon
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war folgt die Behauptung. $\square$

Folgerung 14.38 *(Dichtheit in $\mathfrak{L}$)*
Die folgenden Funktionenräume liegen bezüglich der $|\cdot|_1$-Halbnorm dicht in $\mathfrak{L}(A)$:
- $\mathfrak{L}(A) \cap C^\infty(A)$
- *beschränkte Funktionen mit kompaktem Träger*
- *Treppenfunktionen*
- *Treppenfunktionen von Würfeln*

Beweis. Reduktionen im Beweis von Satz 14.36 **6.** □

Folgerung 14.39 *(Fundamentallemma der Variationsrechnung)*
Seien Ω eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^\mathrm{N}$ und $f \in \mathfrak{L}(\Omega)$, dann gilt

$$f = 0 \text{ f.ü.} \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{\varphi \in C_0^\infty(\Omega)} \int_\Omega f\,\varphi\, d\lambda_N = 0$$

Man kann also das Verschwinden von f (fast überall) testen, indem man f gegen alle „Testfunktionen" aus $C_0^\infty(\Omega)$ integriert und das Verschwinden all dieser Integrale zeigt.

Beweis. Für $x \in \Omega$ und einem hinreichend kleinem $\varepsilon > 0$ ist $\sigma_\varepsilon(x - \cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$, denn $\operatorname{supp}\big(\sigma_\varepsilon(x - \cdot)\big) = K_\varepsilon(x)$. Daher folgt für solche ε nach Voraussetzung $S_\varepsilon f(x) = 0$. Weiter konvergiert $S_\varepsilon f$ gegen f in $\mathfrak{L}(\Omega)$ für $\varepsilon \to 0$, daher folgt

$$|f|_1 = |f - S_\varepsilon f|_1 \overset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} 0$$

□

Satz 14.40 *(C_0^∞ liegt dicht in $\mathfrak{L}$)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^\mathrm{N}$ eine offene Teilmenge, dann liegt $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $\mathfrak{L}(\Omega)$ bezüglich der $|\cdot|_1$-Halbnorm.

Beweis. (Skizze)
Betrachte die offenen Mengen

$$\Omega_l := \left\{ x \in \Omega \,\middle|\, |x| < l \text{ und } \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^\mathrm{N} \setminus \Omega) > \frac{1}{l} \right\} \quad \text{für } l \in \mathbb{N}$$

Für diese gilt

$$\Omega_l \subset \overline{\Omega_l} \Subset \Omega_{l+1} \subset \ldots \Subset \Omega \quad \text{und} \quad \Omega = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \Omega_l$$

wobei der Abschluss $\overline{\Omega_l}$ von Ω_l kompakt ist. Definiere nun $f_l := \chi_{\Omega_l} \cdot f \in \mathfrak{L}(\Omega)$ dann folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$|f_l - f|_1 = \int_\Omega |f_l - f|\, d\lambda_N \overset{l \to \infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{punktweise fast überall}$$

Nimm also o.B.d.A. an, dass für den Träger von f gilt $\operatorname{supp}(f) \subset \Omega_l \Subset \Omega$ für ein $l \in \mathbb{N}$. Weiter konvergieren $S_\varepsilon f \in C^\infty(\mathbb{R}^\mathrm{N})$ in $\mathfrak{L}(\Omega)$ gegen f und $\operatorname{supp}(S_\varepsilon f) \subset \Omega + K_\varepsilon(0)$ nach Lemma 14.36 (vi) und (ii). Ist nun

$$\varepsilon < \frac{1}{l(l+1)}$$

so liegt der Träger von $S_\varepsilon f$ in $\Omega_{l+1} \Subset \Omega$. Für solch kleine ε gilt dann sogar

$$S_\varepsilon f \in C_0^\infty(\Omega)$$

□

Satz 14.33 *(Substitutionsregel II / Transformationssatz)*
Seien U, V offene Teilmengen des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $\Phi : U \to V$ ein C^1-Diffeomorphismus[6], dann gilt:
f gehört genau dann zu $\mathfrak{L}(V)$, wenn $f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')|$ zu $\mathfrak{L}(U)$ gehört und es gilt

$$\int_V f \, d\lambda_N \; = \; \int_U f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')| \, d\lambda_N$$

Es kann Φ' durch J_Φ die Jakobimatrix von Φ ersetzt werden, denn es gilt $\det(J_\Phi) = \det(\Phi')$.

Merkregel: *Man kann sich die Formel im obigen Satz als Tausch von Variablen $y = \Phi(x)$ vorstellen. Wie im $\mathbb{R}$ gibt es hier eine einfache Merkregel, nämlich:*

$$dy \; = \; |\det\big(J_\Phi(x)\big)| \, dx$$

Für die Transformation

$$\int_V f(y) \, d\lambda_N(y) \; = \; \int_U f \circ \Phi(x) \cdot |\det(\Phi'(x))| \, d\lambda_N(x)$$

Die Transformation Φ ist ein Homöomorphismus und induziert einen Isomorphismus der Borelalgebren. Nimmt man für f die charakteristische Funktion $\chi_{\Phi(\Omega)}$ einer meßbaren Menge $\Omega \subset U$, dann besagt der Transformationssatz

Beweis. (Skizze)
Die Rückrichtung des „genau dann, wenn" im Satz wird durch die Rücktransformation mit Φ^{-1} bewiesen, daher ist nur die Hinrichtung zu zeigen. Reduziere dazu auf den linearen Fall:

1. Reduziere auf $f \in C_0^\infty(V)$
   Nach Satz 14.40 gibt es eine Folge $(f_l) \subset C_0^\infty(V)$, die in $\mathfrak{L}(V)$ gegen f konvergiert. Mit Satz 14.27 gibt es eine Teilfolge, die punktweise fast überall gegen f konvergiert. Die an f gestellten Anforderungen werden mit Lemma 14.24 an $f_l \circ \Phi$ vererbt.

2. Reduziere auf Würfel im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$
   Schöpfe mit der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 14.40 U durch offene Mengen U_l aus. und definiere
   $$K := \phi^{-1}\big(\operatorname{supp}(f)\big) \Subset U$$
   Da K kompakt ist wähle aus der offenen Überdekung der U_l) eine endliche Teilüberdeckung von K aus. Da die U_l geschachtelt sind gilt dann $K \subset U_L$ mit $L \in \mathbb{N}$. Überdecke U nun mit dem Würfelnetz $\mathbb{W}_i$ mit der Kantenlänge 2^{-i}, dann liegen, für hinreichend großes i alle Würfel $W \in \mathbb{W}_i$, die mit K nichtleeren Schnitt haben in U_{2L}. Lokalisiere nun unter der <u>Annahme</u>
   $$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_I \quad \forall_{i>I} \quad \forall_{W \in \mathbb{W}_i :\, K \cap W \neq \varnothing} \qquad \Big| \int_{\Phi(W)} f \, d\lambda_N - \int_W f \circ \Phi \, |\det(\Phi'| \, d\lambda_N \Big| \; \leq \; \varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

3. Zeige die in **2.** gemachte Annahme.
   Hierzu nimm o.B.d.A. an, dass $W = K^\infty_{2^{-i-1}}(0)$ die Kugel bezüglich der Maximumsnorm um den Punkt 0 mit Radius 2^{-i} ist und $\Phi(0) = 0$ gilt. Da f und $f \circ \Phi \cdot |\det(\Phi')|$ gleichmäßig stetig sind folgt für hinreichend große i
   $$\Big| \int_{\Phi(W)} f \, d\lambda_N - \int_W f \cdot \Phi \cdot |\det(\Phi')| \, d\lambda_N \Big| \; \leq \; \frac{2}{3} \, \varepsilon \cdot \lambda_N(W) + c \cdot \big| \lambda_N\big(\Phi(W)\big) - |\det(\Phi')| \cdot \lambda_N(W) \big|$$

[6] D.h. Φ ist bijektiv und Φ, Φ^{-1} sind stetig diff'bar

Mit der Schranke $c > 0$, die Φ, Φ' bzw $f, \Phi^{-1}, (\Phi^{-1})'$ auf $\overline{U_{2L}}$ beschränkt. Wegen $\det\big(\Phi'(0)\big) \neq 0$ ist die konstante lineare Abbildung $\Phi'(0)$ regulär und wir können

$$\varphi := \Phi'(0)^{-1}\Phi$$

definieren. Es gelten $\Phi = \Phi'(0)\varphi$ und $\varphi' = \Phi'(0)^{-1}\Phi'$ somit folgen

$$\varphi(0) = 0 \ \text{ und } \ \varphi'(0) = \Phi'(0)^{-1}\Phi'(0) = id$$

Da sowohl φ als auch φ' gleichmäßig stetig sind gilt

$$\sup_{x \in W} \|\, \varphi'(x) - id \,\| \leq \kappa < 1$$

Mit Lemma 14.41 (s.u.) folgt dann mit $W = K^{\infty}_{2^{-i-1}}$

$$(1-\kappa)^N \cdot \lambda_N(W) \ \leq\ \lambda_N\big(\varphi(W)\big) \ \leq\ (1+\kappa)^N \cdot \lambda_N(W)$$

Mit Lemma 14.21 (Substitutionsregel I) können wir dies zu

$$(1-\kappa)^N \cdot |\det(\Phi'(0)| \cdot \lambda_N(W) \ \leq\ \lambda_N\big(\Phi(W)\big) \ \leq\ (1+\kappa)^N \cdot |\det(\Phi'(0)| \cdot \lambda_N(W)$$

umformen. Mit der Bernoullischen Ungleichung $(1-\kappa)^N \geq 1 - N\kappa$ und der binomischen Formel für $(1+\kappa)^N$ erhalten wir

$$\big|\lambda_N\big(\Phi(W)\big) - |\det\big(\Phi'(0)\big)| \cdot \lambda_N(W)\big| \ \leq\ \kappa c_N \cdot \lambda_N(W) \ \leq\ \frac{1}{3c}\,\varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

Mit hinreichend kleinem κ und hinreichend großem I ist die Annahme aus **2.** und damit der Satz bewiesen.

□

Lemma 14.41 *Seien $\rho > 0$ und $K_\rho(0) \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ sowie $\varphi \in C^1(K_\rho(0), \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ mit $\varphi(0) = 0$ gegeben. Weiter gelte*

$$\sup_{z \in K_\rho(0)} \|\, \varphi'(z) - id \,\| \leq \kappa < 1$$

Dann gilt für alle $0 < r < \rho$

$$K_{(1-\kappa)r}(0) \subset \varphi\big(K_r(0)\big) \subset K_{(1+\kappa)r}(0)$$

In Worten: *Ist die Ableitung naher der Identität, so unterscheidet sich das Bild einer Kugel nur wenig von sich selbst.*

Beweis. (Idee)
Die rechte Inklusion folgt direkt aus der Mittelwertabschätzung. Für die linke Inklusion sei $y \in K_{(1-\kappa)r}(0)$ und betrachte

$$y = \varphi(x) \ \Leftrightarrow\ \psi(x) := x - \phi(x) + y = x$$

und wende den Banachschen Fixpunktsatz an. □

Lemma 14.42 *(Sardsches Lemma)*
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ eine offenen Teilmenge und $\phi \in C^1(\Omega, \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$, dann ist die Menge der kritischen Werte von ϕ, d.h. das Bild der Kritischen Punkte von ϕ, eine Nullmenge. Also

$$\lambda_N\big(\phi(K)\big) = 0 \quad \text{mit } K := \{\, x \in \Omega \,|\, \det\big(\phi'(0)\big) = 0\,\}$$

Beweis. (Skizze)
Schöpfe wie in den Beweisen der Sätze 14.33 und 14.40 Ω mit offenen Mengen Ω_l aus, dann gelten

$$\phi(\Omega) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \phi(\Omega_l) \quad \text{und} \quad \phi(K) = \bigcup_{l=1}^{\infty} \phi(K \cap \Omega_l)$$

Da abzählbare Vereinigungen von Nullmengen wieder Nullmengen sind genügt es $\lambda_N\big(\phi(K \cap \Omega)\big) = 0$ für ein festes $l \in \mathbb{N}$ zu zeigen. Lege hierzu wieder das Würfelnetz $\mathbb{W}_i$ über Ω, so dass $W \subset \Omega_{2L}$ für alle $W \in \mathbb{W}_i$ mit $W \cap \Omega_l \neq \varnothing$ gilt. Auf der kompakten Menge $\overline{\Omega_{2L}}$ sind ϕ und ϕ' gleichmäßig stetig und beschränkt. Insbesondere ist ϕ also Lipschitz mit der Konstanten γ.
Wie im Beweis zu Satz 14.33 lokalisiere unter der Annahme

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_I \quad \forall_{i>I} \quad \forall_{W\in\mathbb{W}_i:\, W\cap\Omega_l\neq\varnothing} \qquad \lambda_N\big(\phi(W \cap K)\big) \leq \varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

Um diese Annahme zu zeigen wähle ein $\hat{\mathrm{x}} \in W \cap K$, dann gilt für $x \in W$ und $\varphi(t) := tx + (1-t)\,\hat{\mathrm{x}} \in |\,\hat{\mathrm{x}}, x] \subset W$ die folgenden Abschätzung

$$\big|\phi(x) - \phi(\hat{\mathrm{x}}) - \phi'(\hat{\mathrm{x}})(x - \hat{\mathrm{x}})\big| \leq \sqrt{N \cdot 2^{-i}} \cdot \sup_{|z-\hat{\mathrm{x}}\,| \leq \sqrt{N 2^{-1}}} \|\, \phi'(z) - \phi'(\hat{\mathrm{x}})\,\| =: \sqrt{N \cdot 2^{-i}} \cdot \delta_i$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von ϕ' gilt $\delta_i \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Definiere

$$V := \{\, \phi'(\hat{\mathrm{x}})v \,|\, v \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}\,\}$$

Weil $\hat{\mathrm{x}}$ ein kritischer Punkt von ϕ ist, ist $\det\big(\phi(\hat{\mathrm{x}})\big) = 0$, also folgt $\dim(V) =: M < N$. Wähle nun eine Orthogonalbasis (ONB) $\{v^1, \ldots, v^M\}$ von V und ergänze diese durch $\{u^1, \ldots, u^{N-M}\}$ zu einer ONB des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^{\mathrm{M}} \times \mathbb{R}^{N-M} \quad &\to \quad \mathbb{R}^{\mathrm{N}} \\ (\alpha, \beta) \quad &\mapsto \quad \phi(\hat{\mathrm{x}}) + \sum_{m=1}^{M} \alpha_m v^m + \sum_{m=1}^{N-M} \beta_m u^m \end{aligned}$$

ist ein globaler C^∞-Diffeo. und wir können jedes $y \in \phi(W)$ durch $y = \phi(x) = \psi(\alpha, \beta)$ mit $x \in W$ darstellen. Nach Pythagoras gilt dann

$$|(\alpha, \beta)|^2 = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \leq \gamma^2 \cdot N \cdot 2^{-2i}$$

Die Koeffizienten β_m können wir wegen der Orthonormalität mit Taylor noch schärfer abschätzen durch

$$|\beta_m| \;\leq\; \sqrt{N} \cdot 2^{-i} \delta_i$$

Damit erhalten wir insgesamt

$$|\alpha| \;\leq\; \gamma\sqrt{N} 2^{-i} \quad \text{und} \quad |\beta| \;\leq\; \sqrt{N-M}\sqrt{N} 2^{-i} \delta_i \leq \delta_i \cdot N \cdot 2^{-i}$$

und

$$\phi(W) \subset \psi(K_i) \quad \text{mit } K_i := K_{\gamma\sqrt{N}2^{-i}}(0) \times K_{\delta_i N 2^{-i}}(0)$$

Da $|\det(\alpha, \beta)| = 1$ ist, gilt mit der Maßtransformation im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ (Bemerkung nach Satz 14.33) für alle meßbaren $A \subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$

$$\lambda_N\big(\psi(A)\big) \;=\; \lambda_N(A)$$

folglich erhalten wir mit $\delta_i \leq 1$ und $1 \leq N - M$ für alle hinreichend großen i

$$\lambda_N\big(\psi(W \cap K)\big) \leq \delta_i \cdot \gamma^M \cdot N^N \cdot \omega_M(1) \cdot \omega_{N-M}(1) \cdot \lambda_N(W) \;\leq\; \varepsilon \cdot \lambda_N(W)$$

□

Satz 14.43 *(Verallgemeinerte Substitutionsregel im $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$)*
Seien U(offen) $\subset \Omega$(meßbar) $\subset \Xi$(offen) $\subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ sowie Υ(meßbar) $\subset \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ Teilmengen des $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ und $\phi \in C^1(\Xi, \mathbb{R}^{\mathrm{N}})$ mit $\phi(\Omega) \subset \Upsilon$ sowie $f : \Upsilon \to \mathbb{R}$ seien meßbare Funktionen. Ferner seien mit

$$K := \big(\det \phi'\big)(\{0\}) = \{\, x \in \Xi \mid \det\big(\phi'(x)\big) = 0 \,\}$$

die folgenden Bedingungen erfüllt:
(i) $\Omega \backslash (U \cup K)$ und $\Upsilon \backslash \phi(\Omega)$ sind Nullmenen und
(ii) Die Abbildung $\phi_{|_{U \backslash K}}$ ist injektiv.
Dann gilt: f gehört genau dann zu $\mathfrak{L}(\Upsilon)$, wenn $f \circ \phi \cdot |\det \phi'|$ zu $\mathfrak{L}(\Omega)$ gehört und es ist

$$\int_\Upsilon f \, d\lambda_N \;=\; \int_\Omega f \circ \phi \cdot |\det \phi'| \, d\lambda_N$$

Beweis. (Skizze)
Die Bedingungen $\lambda_N(\Omega \backslash U) = 0$ und $\lambda_N\big(\Omega \backslash (U \cup K)\big) = 0$ sind äquivalent, denn es gilt

$$\Omega \backslash U \;= \underbrace{(\Omega \cap K) \backslash U}_{\subset K} \,\dot\cup\, \underbrace{\Omega \backslash (U \cup K)}_{= \Omega \backslash U \cap \Omega \backslash K}$$

Damit ist

$$\Omega = U \,\dot\cup\, \Omega \backslash U = U \backslash K \,\dot\cup\, \underbrace{U \cap K \,\dot\cup\,)\Omega \cap K) \backslash U \,\dot\cup\, \Omega \backslash (U \cup K)}_{=: Z}$$

Wobei K nach dem Sardschen Lemma (14.42) und damit auch Z nach (i) Nullmengen sind. Als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen Abbildung $\det \phi'$ ist$K$ abgeschlossen und somit ist $U \backslash K$ offen.Nach (ii) ist ϕ auf dieser Menge injektiv und nach Definition verschwindet $\det \phi'$ dort nicht. Also ist $\phi_{|_{U \backslash K}}$ ein $C1$-Diffeomorphismus. Weiter bildet nach Lemma 14.24 ϕ Nullmengen auf Nullmengen ab, d.h. mit Z ist auch $\phi(Z)$ eine Nullmenge. Es gilt

$$f \in \mathfrak{L}(\Upsilon) \;\Leftrightarrow\; f \in \mathfrak{L}\big(\phi(\Omega)\big) \;\Leftrightarrow\; f \in \mathfrak{L}\big(\phi(U \backslash K)\big)$$

Mit den Transformationssatz (14.33) und da Z eine Nullmenge ist erhalten wir

$$f \in \mathfrak{L}\big(\phi(U \backslash K)\big) \;\Leftrightarrow\; f \circ \phi \cdot |\det \phi'| \in \mathfrak{L}(U \backslash K) \;\Leftrightarrow\; f \circ \phi \cdot |\det \phi'| \in \mathfrak{L}(\Omega)$$

Schließlich liefert der Transformationssatz die Behauptung. □