Mitschrift der Vorlesung

Funktionentheorie I

von Prof. G. Wiese im SS 11 an der Universität Duisburg-Essen

Klausur	**Samstag 16.07.2011**
Zeit:	$9^{\underline{00}}$ – $12^{\underline{00}}$ Uhr
Ort:	T03 R02 D39
Nachklausur	**Mittwoch 24.08.2011**
Zeit:	$9^{\underline{00}}$ – $12^{\underline{00}}$ Uhr
Ort:	Institut für experimentelle Mathematik (IEM)

Aufgesschrieben von Johannes Hölken mit LaTeX. Die jeweils aktuelle Version dieses Dokuments kann von meiner Homepage `http://uni.johoelken.de` bezogen werden. Bei diesem Dokument handelt es sich um eine Mitschrift, daher ist Fehlerfreiheit nicht garantiert! Dies ist kein ofizielles Lehrmaterial der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen. Hinweise aller Art schicken Sie bitte an
`johannes.hoelken@stud.uni-due.de`

Stand: 15. Juli 2011

Inhaltsverzeichnis

Kapitel I

Komplexe Zahlen

1 Definition der komplexen Zahlen

Warum wollen wir mit komplexen Zahlen arbeiten? Reichen die reellen Zahlen nicht aus? Es gibt zwei Hauptmotivationen für die komplexen Zahlen

1. Das Polynom $P(X) = X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ hat keine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Die komplexen Zahlen sind eine „Erweiterung“ von $\mathbb{R}$, in welcher alle nicht-konstanten Polynome mit reellen Koeffizienten eine Nullstelle haben.

2. Der $\mathbb{R}^2$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum mit den Vektorraumverknüpfungen Addition und $\mathbb{R}$-Skalar-Multiplikation. Definiere eine Multiplikation
$$\cdot : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
so dass $\mathbb{R}^2$ ein Körper wird.

Mit folgender naiver Definition der komplexen Zahlen wollen wir das in den Motivationen beschriebene Ziel genauer fassen.

Naive Definition *(komplexe Zahlen)*
Sei i ein „Symbol“ mit der Eigenschaft $i^2 = -1$. Als komplexe Zahl bezeichnen wir den Ausdruck der Form $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Die Addition und Multiplikation auf diesen Ausdrücken definieren wir als

$$\begin{aligned} (a+ib) + (a'+ib') &= a + a' + i(b+b') && (1.1)\\ (a+ib) \cdot (a'+ib') &= aa' + i^2bb' + i(ab' + a'b) \\ &= aa' - bb' + i(ab' + a'b) && (1.2) \end{aligned}$$

In Motivation zwei wollten wir den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit einer Multiplikation ausstatten. Hierzu wollen wir $a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ als Vektor
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
auffassen. Dann ergeben sich aus (1.1) und (1.2) unmittelbar

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' \\ ab' + a'b \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Wobei (1.3) mit der normalen Addition im Vektorraum $\mathbb{R}^2$ übereinstimmt. Nun wollen wir das Ziel, welches wir mit der naiven Definition formuliert haben, mit einer mathematischen Definition erfüllen. Dazu wollen wir znächst feststellen, was wir unter einem Körper verstehen.

Definition 1.1 *(Körper)*
Eine Menge $\mathbb{K}$ mit $\{0,1\} \subseteq \mathbb{K}$ und $0 \neq 1$ zusammen mit den Abbildungen

$$\begin{aligned} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad & \text{mit } (a,b) \mapsto a+b \\ \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \to \mathbb{K} \qquad & \text{mit } (a,b) \mapsto a \cdot b \end{aligned}$$

heißt ein Körper, falls die folgenden Bedingungnen gelten

(a) $(\mathbb{K}, +)$ *ist abelsche Gruppe mit neutralem Element* 0

(b) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ *ist abelsche Gruppe mit neutralem Element* 1

(c) *Für alle $a, b, c \in \mathbb{K}$ gelte das Distributivgesetz:*

$$a \cdot (b+c) \; = \; a \cdot b + a \cdot c$$

Beispiel 1 *Die Mengen $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{F}_p$ mit p ist Primzahl sind Körper, die Mengen $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}[X]$ nicht.*

Definition und Satz 1.2 *(Der Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C})$)*
Setze $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$ sowie

$$1_{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad 0_{\mathbb{C}} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Wir Definieren die Addition und Multiplikation auf $\mathbb{C}$ als

$$\begin{aligned} + : \qquad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to \quad & \mathbb{C} \\ & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) & \mapsto \quad & \begin{pmatrix} a + a' \\ b + b' \end{pmatrix} \\ \cdot : \qquad & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to \quad & \mathbb{C} \\ & \left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \right) & \mapsto \quad & \begin{pmatrix} aa' - bb' \\ ab' + a'b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dann ist $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ein Körper und wir nennen $\mathbb{C}$ den Körper der komplexen Zahlen.

Beweis. Wir müssen nachprüfen, ob $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ die Axiome (a), (b) und (c) aus Definition 1.1 erfüllt. Die Eigenschaft (a) ist hierbei trivial, da die Definition von $+$ auf $\mathbb{C}$ mit der Addition im $\mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum übereinstimmt und $(\mathbb{R}^2, +)$ ist abelsch. Für das Axiom (b) muss $(\mathbb{C} \setminus \{0_{\mathbb{C}}\}, \cdot)$ ebenfalls abelsch sein. Dazu zeigen wir:

- Assoziativität: Übung 1, Aufgabe 1 (a)
- Kommutativität: Da die Komponenten Einträge in den reellen Zahlen sind, darf die Kummutativität in $\mathbb{R}$ benutzt werden:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' - bb' \\ ab' + a'b \end{pmatrix} \overset{(\mathbb{R})}{=} \begin{pmatrix} a'a - b'b \\ a'b + ab' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Neutrales Element ist $1_{\mathbb{C}}$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 - b \cdot 0 \\ a \cdot 0 + 1 \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- Existenz inverser Elemente: Sei $(a,b)^{\mathrm{T}} \neq 0_{\mathbb{C}}$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{a}{a^2+b^2} \\ \frac{-b}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2} \\ \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Für den Nachweis der Distributivität (c) verweisen wir wieder auf Übung 1, Aufgabe 1 (b). □

Bemerkung 1.3 *Die Abbildung*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R} &\hookrightarrow \mathbb{C} \\ r &\mapsto \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein Körperhomomorphismus. Deshalb können wir die reellen Zahlen als Teilmenge der komplexen auffassen und zur vereinfachten Notation $r = (r,0)^{\mathrm{T}}$ übergehen. Wir lassen damit auch den Index $\mathbb{C}$ an Null und Eins weg.

Beweis. Wir müssen zwei Aussagen zeigen. Zunächst wollen wir nachprüfen, ob φ ein Körperhomomorphismus ist. Seien $r, s \in \mathbb{R}$, dann gelten

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{C}} \\ \varphi(r \cdot s) &= \begin{pmatrix} r \cdot s \\ 0 \end{pmatrix} \\ \varphi(r) \cdot \varphi(s) &= \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot s \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nun muss noch die Injektivität von φ nachgeprüft werden. Es gilt $\mathrm{Ker}(\varphi) = \{0\}$, denn

$$\varphi(r) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} r \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow r = 0$$

□

Definition 1.4 *(Imaginäre Einheit)*
Wir setzen

$$i := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}$$

und bezeichnen i als imaginäre Einheit.

Bemerkung 1.5 *Jede komplexe Zahl* $(a,b)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}$ *lässt sich eindeutig schreiben als* $a + ib$.

Beweis. Für die Existenz sei $(a,b)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{C}$, dann gilt

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \overset{(1.3)}{=} a + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} b = a + ib$$

Zum Nachweis der Eindeutigkeit sei $a + ib = a' + ib'$ mit $a,\ a',\ b,\ b' \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$(a - a') + i(b - b') = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a - a' \\ b - b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \quad a = a' \wedge b = b'$$

□

Bemerkung 1.6 *Es gilt* $i^2 = -1$.

Beweis.

$$i^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1$$

□

Definition 1.7 *(Real- und Imaginärteil)*
Sei $z := a + ib \in \mathbb{C}$ *mit* $a, b \in \mathbb{R}$, *dann nenn wir*

$$\begin{aligned} \Re(z) &= \mathrm{Re}(z) := a && \text{den Realteil von } z \qquad \text{und} \\ \Im(z) &= \mathrm{Im}(z) := b && \text{den Imaginärteil von } z \end{aligned}$$

Beispiel 2 *(Rechnen mit komplexen Zahlen)*

$$\begin{aligned} (3 + 5i)^2 &= 9 + 30i + (5i)^2 = -16 + 30i \\ \frac{2}{3 + 5i} &= 2 \cdot \frac{1}{3 + 5i} = 2 \cdot \frac{3 - 5i}{9 + 25} = \frac{3}{17} + \frac{-5}{17} i = \frac{3 - 5i}{17} \end{aligned}$$

2 Komplexe Kunjugation und Betrag

Definition 2.1 *(Komplexe Konjugation)*
Sei $z := a + ib \in \mathbb{C}$, dann nennen wir $\overline{z} \ := \ a - ib$ die zu z komplex konjugierte Zahl.[1]

Bemerkung 2.2 *Seien $z, w \in \mathbb{C}$, dann gelten:*

(a) $\overline{z+w} \ = \ \overline{z} + \overline{w}$ *und* $\overline{z \cdot w} \ = \ \overline{z} \cdot \overline{w}$

(b) $z = \overline{z} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

(c) $\overline{\overline{z}} \ = \ z$

(d) $\mathrm{Re}(z) \ = \ \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ *und* $\mathrm{Im}(z) \ = \ \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

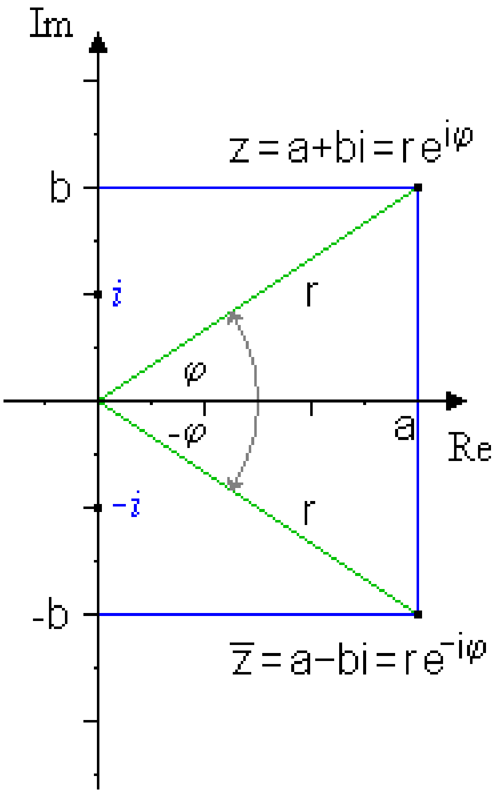
Beweis. Übung 1, Aufgabe 4.[2] □

Definition 2.3 *(Betrag)*
Sei $z := a + ib \in \mathbb{C}$, dann heißt

$$|z| \ := \ \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

der Betrag von z.

Beispiel 3 *Verbildlichung von komplexer Konjugation und Betrag.*
Deutlich zu sehen ist die Spiegelung an der Re*-Achse und der Betrag $r := |z|$*



[1] Die komplexe Konjugation ist eine Spiegelung an der reellen Achse der komplexen Zahlenebene.
[2] Achtung: Fehler auf dem Blatt und an der Tafel in Teil (d)! Hier ist die berichtigte Version!

Bemerkung 2.4 *(Eigenschaften des Betrages)*
Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ *gelten*

(a) $|z| \geq 0$ *und* $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

(b) $|z| = |\overline{z}|$ *und* $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$

(c) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

(d) $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w|$ *(Dreiecksungleichung)*

Beweis. Der Teil (a) ist unmittelbar einsichtig, für (b) sei $z := a + ib$, dann gelten

$$\begin{aligned} |z| &= \left(a^2 + b^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(a^2 + (-b)^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\overline{z}| \\ z \cdot \overline{z} &= (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

Teil (c) folgt unmittelbar aus (b) mit

$$|z \cdot w|^2 \stackrel{(b)}{=} zw \cdot \overline{zw} = z \cdot w \cdot \overline{z} \cdot \overline{w} = z \cdot \overline{z} \cdot w \cdot \overline{w} \stackrel{(b)}{=} |z|^2 \cdot |w|^2$$

Da für alle $u := a + ib \in \mathbb{C}$ gilt: $\mathrm{Re}(u) = a \leq |u|$ $(*)$ folgt Teil (d) mit

$$\begin{aligned} |z \pm w|^2 &= (z \pm w) \cdot \overline{(z \pm w)} = z\overline{z} + w\overline{w} \pm z\overline{w} \pm w\overline{z} \\ &\stackrel{2.2(d)}{=} |z|^2 + |w|^2 \pm 2 \cdot \mathrm{Re}(z\overline{w}) \stackrel{(*)}{\leq} |z|^2 + |w|^2 + 2 \cdot |z| \cdot |w| \\ &= \big(|z| + |w|\big)^2 \end{aligned}$$

Der zweite Teil der Dreiecksungleichung ist eine allgemeine Folgerung aus dem soeben gezeigten, denn mit diesem Teil der Dreiecksungleichung gelten

$$|z| = |z - w + w| \leq |z - w| + |w| \tag{2.1}$$

$$|w| = |w - z + z| \leq |z - w| + |z| \tag{2.2}$$

Mit (2.1) und (2.2) folgen dann

$$|z| - |w| \leq |z - w| \quad \text{und} \quad (-1)\big(|z| - |w|\big) \leq |z - w|$$

und somit die Behauptung. $\square$

3 Polardarstellung komplexer Zahlen

Wir haben in Definition und Satz 1.2 den Zahlenbereich von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ eingeführt. Betrachten wir die reelle Ebene, so können wie einen Punkt $P = (a, b)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ mit Polarkoordinaten

$$\begin{aligned} \phi : [0, \infty) \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) &\mapsto r \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

darstellen. Solange wir für das Argument von Sinus und Kosinus alle reellen Zahlen zulassen ist diese Darstellung wegen der 2π-Periode der beiden Funktionen nur bis auf Addition von $n \cdot 2\pi$ für $n \in \mathbb{Z}$ eindeutig. Mit der Übertragung von $P = (a, b)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ auf $z = a + ib \in \mathbb{C}$ erhalten wir aus der obigen Darstellung auch ein Darstellung für komplexe Zahlen

$$z = r \cdot \big(\cos\varphi + i \sin\varphi\big)$$

Diese Vorüberlegung erheben wir zur nächsten

Definition 3.1 *(Polardarstellung)*
Sei $z \in \mathbb{C}$. Unter einer Polardarstellung von z verstehen wir einen Ausdruck der Form:

$$z = r \cdot \big(\cos\varphi + i \sin\varphi\big)$$

Dabei heißt φ das Argument von z. Die eindeutig bestimmte reelle Zahl[3] $\operatorname{Arg}(z) \in [-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ *mit*

$$z = |z| \cdot \big[\cos\big(\operatorname{Arg}(z)\big) + i \sin\big(\operatorname{Arg}(z)\big)\big]$$

heißt Hauptwert des Arguments von z.

Bemerkung 3.2 *Seien $z_j := r_j(\cos\varphi_j + i \sin\varphi_j) \in \mathbb{C}$ für $j \in \{1, 2\}$. Dann gilt*

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \Big(\cos\big(\varphi_1 + \varphi_2\big) + i \sin\big(\varphi_1 + \varphi_2\big)\Big)$$

Beweis. Mit den aus Analysis I bekannten Additionstheoremen für Sinus und Kosinus gilt:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1) \cdot r_2(\cos\varphi_2 + i \sin\varphi_2) \\ &= r_1 r_2 \Big(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2 + i\big(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2\big)\Big) \\ &= r_1 r_2 \Big(\cos\big(\varphi_1 + \varphi_2\big) + i \sin\big(\varphi_1 + \varphi_2\big)\Big) \end{aligned}$$

□

Folgerung 3.3 *Sei $z := r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \in \mathbb{C}$, dann gilt für $n \in \mathbb{N}$*

$$z^n = \big(r(\cos\varphi + i \sin\varphi)\big)^n = r^n \cdot \big(\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\big)$$

□

[3] Eindeutigkeit wäre zu beweisen, ist aber eine grundlegende Erkenntnis aus Analysis I und wird hier vorausgesetzt.

Satz 3.4 *Sei $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, dann gibt es für $n \in \mathbb{N}$ genau n Zahlen $z_k \in \mathbb{C}$ mit $z_k^n = a$. Nämlich*

$$z_k \;=\; \sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right]$$

für $k = 0, \ldots, n-1$.

Beweis. Um den Satz zu beweisen werden wir die Aussage in drei Teile Spalten und diese einzeln beweisen. Zunächst ist festzuhalten, dass die z_k tatsächlich n paarweise verschiedene Zahlen sind. Dies ist aber sofort klar. Nun wollen wir zeigen, dass die Zahlen z_k die Gleichung $z_k^n = a$ tatsächlich lösen. Wegen der 2π-Periodizität von Sinus und Kosinus gilt:

$$\begin{aligned} z_k^n &= \left(\sqrt[n]{r} \cdot \left[\cos\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + k2\pi}{n}\right)\right]\right)^n \\ &\overset{(3.3)}{=} r \cdot \big(\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)\big) \\ &= a \end{aligned}$$

Als letztes müssen wir noch zeigen, dass alle Lösungen der Gleichung $w^n = a$ mit $w \in \mathbb{C}$ von der Form z_k sind. Sei dazu $w := s(\cos\psi + i\sin\psi)$ mit $w^n = a$, also

$$w^n = s^n\big(\cos(n\psi) + i\sin(n\psi)\big) \;=\; r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = a$$

dann folgt sofort $r^n = s$. Weiter gibt es eine Zahl $l \in \mathbb{Z}$ so dass $n\psi = \varphi + sl\pi$. Damit erhalten wir

$$s \;=\; \sqrt[n]{r} \quad \text{und} \quad \psi = \frac{\varphi + 2l\pi}{n}$$

Wegen der 2π-Periode gibt es für $l \geq n$ ein $m \in \{0, \ldots, n-1\}$ so dass

$$\cos\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n}\right) \;=\; \cos\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right) \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\varphi + 2l\pi}{n}\right) \;=\; \sin\left(\frac{\varphi + 2m\pi}{n}\right)$$

Daher gibt es ein $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ so dass $w = z_k$. □

Definition 3.5 *(n-te Einheitswurzel)*
Die n Lösungen der Gleichung $z_k^n = 1$, also

$$z_k \;=\; \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{n}k\right)$$

für $k = 0, \ldots, n-1$ heißen die n-ten Einheitswurzeln.

Beispiel 4 *Bezeichne E_n die Menge der n-ten Einheitswurzeln, dann gelten*

$$\begin{aligned} E_2 &= \{1, -1\} \\ E_3 &= \left\{\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, 1\right\} \\ E_4 &= \{1, -1, i, -i\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kapitel II

Komplexwertige Funktionen

4 Grundbegriffe

In diesem Kapittel werden wir einige Grundbegriffe zu Folgen, Reihen und Konvergenz bereitstellen. Die meisten davon übertragen sind wörtlich aus der reellen Analysis, da sie in allgemeinen Maßräumen (X, d) gültig sind und $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ ein Maßraum ist.

Definition 4.1 *(Konvergente Folge / Grenzwert)*
Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ komplexer Zahlen heißt konvergent, falls ein $z \in \mathbb{C}$ existiert, so dass gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \ \forall\, n > N_\varepsilon \ : \quad |z_n - z| < \varepsilon$$

Wir sagen dann „die Folge der z_n konvergiert gegen z" und schreiben

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \qquad \text{oder} \qquad z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z$$

Wir nennen z den Grenzwert bzw. den Limes der Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Bemerkung 4.2 *(Eigenschaften konvergenter Folgen)*

a) *Der Grenzwert jeder komplexen Folge ist eindeutig.*

b) *Konvergente Folgen komplexer Zahlen $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind beschränkt, das heißt es gibt ein $C \in \mathbb{R}_+$ so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $|z_n| < C$*

c) *Seien $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, (w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ konvergente Folgen mit den Grenzwerten $z, w \in \mathbb{C}$, dann gelten*

$$\lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) = z + w \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) = z \cdot w$$

d) *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert z, dann ist auch $(\frac{1}{z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit Grenzwert$\frac{1}{z}$*

e) *Sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ eine konvergente Folge mit*

$$z_n = a_n + ib_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a + ib = z$$

Dann gelten

$$(1)\ \overline{z_n} \to \overline{z} \qquad (2)\ |z_n| \to |z| \qquad (3)\ a_n \to a \qquad (4)\ b_n \to b$$

Beweis. Der Beweis der Teile **(a) - (d)** kann wörtlich aus der Analysis I übernommen werden. Einzig Teil **(e)** muss neu bewiesen werden. Nach Voraussetzung ist die Folge (z_n) konvergent mit Grenzwert z, also gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > N_\varepsilon \;:\quad |z_n - z| < \varepsilon \tag{4.1}$$

Wegen den Bemerkungen 2.2 und 2.4 folgt aus (4.1)

$$|\overline{z_n} - \overline{z}| \overset{(2.2)}{=} |\overline{z_n - z}| \overset{(2.4)}{=} |z_n - z| < \varepsilon$$

Und somit gilt (**e**.1). Aus (**e**.1), **(c)** und Bemerkung 2.2 Teil (d) folgt (**e**.3), denn

$$a_n \;=\; \frac{1}{2}(z_n + \overline{z_n}) \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{2}(z + \overline{z}) = a$$

Analog folgt (**e**.4). Bleibt (**e**.2) zu zeigen. Da die Wurzelfunktion stetig ist, kann sie mit der Limesbildung vertauscht werden, also folgt mit den soeben gezeigten Ergebnissen und Teil **(c)** die Behauptung, denn

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} |z_n| \;&=\; \lim_{n\to\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \\
&=\; \sqrt{\lim_{n\to\infty} a_n^2 + \lim_{n\to\infty} b_n^2} \\
&=\; \sqrt{a^2 + b^2} = |z|
\end{aligned}$$

□

Definition und Bemerkung 4.3 *(Cauchyfolge)*
Eine Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt Cauchyfolge (CF), falls für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, m, n > N_\varepsilon \;:\quad |z_n - z_m| < \varepsilon$$

Es sind äquivalent:

(i) *Die Folge der z_n ist konvergent.*

(ii) *Die Folge der z_n ist eine Cauchy-Folge.*

Anmerkung Bemerkung 4.3 besagt nichts anderes, als dass jede Cauchyfolge in $\mathbb{C}$ einen Grenzwert hat. Das heißt $\mathbb{C}$ ist ein Banachraum.

Beweis. Die Richtung „$(i) \Rightarrow (ii)$“ verläuft wörtlich wie in der reellen Analysis, denn mit

$$z := \lim_{n\to\infty} z_n$$

gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N} \;\; \forall\, n > N_\varepsilon \;:\quad |z_n - z| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seien nun $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n, m > N_\varepsilon$, dann gilt

$$|z_n - z_m| \;=\; |z_n - z + z - z_m| \;\leq\; |z_n - z| + |z_m - z| \;<\; \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

Für die Gegenrichtung „$(ii) \Rightarrow (i)$“ ist (z_n) eine Cauchyfolge nach Voraussetzung.

Behauptung 1 *Ist (z_n) eine Cauchyfolge, so ist auch $(\overline{z_n})$ eine Cauchyfolge.*

Beweis. Mit den Bemerkungen 2.2 und 2.4 gilt

$$\varepsilon \;>\; |z_n - z_m| \;=\; |\overline{z_n - z_m}| \;=\; |\overline{z_n} - \overline{z_m}|$$

$\triangle$

Behauptung 2 *Ist (z_n) eine Cauchyfolge, so sind auch $(\mathrm{Re}(z_n))$ und $(\mathrm{Im}(z_n))$ Cauchyfolgen.*

Beweis. Wie in Satz 4.2 zeigen wir dies mit Bemerkung 2.2 Teil (d). Sei $a_n := \mathrm{Re}(z_n)$, dann gilt

$$\begin{aligned} |\,\mathrm{Re}(z_n) - \mathrm{Re}(z_m)| &= |a_n - a_m| \overset{(2.2)}{} \Big|\frac{1}{2}(z_n + \overline{z_n}) - \frac{1}{2}(z_m + \overline{z_m})\Big| \\ &= \frac{1}{2}\big|(z_n - z_m) + (\overline{z_n} - \overline{z_m})\big| \\ &\leq \frac{1}{2}\big(|z_n - z_m| + |\overline{z_n} - \overline{z_m}|\big) \;<\; \frac{1}{2}(\varepsilon + \varepsilon) \;=\; \varepsilon \end{aligned}$$

Analog folgt die Aussage für den Imaginärteil. $\triangle$

Axiom: $\mathbb{R}$ ist vollständig. Nach Behauptung 2 muss es wegen der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$ Elemente $a, b \in \mathbb{R}$ geben, so dass gilt

$$a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a \qquad \text{und} \qquad b_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} b$$

Wegen Bemerkung 4.2 Teil (c) gilt dann sofort

$$\lim_{n\to\infty} z_n \;=\; \lim_{n\to\infty}(a_n + ib_n) \;=\; \lim_{n\to\infty} a_n + i \cdot \lim_{n\to\infty} b_n \;=\; a + ib =: z$$

Und das ist die Behauptung. $\square$

Definition 4.4 *(Reihe / Partialsumme)*
Seien $a_m \in \mathbb{C}$ für $m \in \mathbb{N}$. Unter der (unendlichen) Reihe

$$\sum a_m \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} a_m$$

verstehen wir sowohl die Folge der Partialsummen

$$S_n(a_m) \;:=\; \sum_{m=0}^{n} a_m$$

als auch ihren Grenzwert, falls dieser existiert.

Bemerkung 4.5 *(Geometrische Reihe)*

a) *Für alle $z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt*

$$\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} \;=\; \sum_{m=0}^{n} z^m$$

b) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt*

$$\sum z^m \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} z^m \;=\; \frac{1}{1 - z}$$

Beweis. Teil (a) beweisen wir mit einer Teleskopsumme, denn es gilt

$$z^{n+1} - 1 \;=\; (z-1) \cdot \sum_{m=0}^{n} z^m$$

Teil (b) folgt unmittelbar aus (a), denn

$$\sum_{m=0}^{\infty} z^m \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{n} z^m \;\overset{(a)}{=}\; \lim_{n\to\infty} \frac{z^{n+1}-1}{z-1} \;\overset{|z|<1}{=}\; \frac{-1}{z-1} \;=\; \frac{1}{1-z}$$

□

Satz 4.6 *(Eigenschaften von Reihen)*
Seien $a_m \in \mathbb{C}$ für $m \in \mathbb{N}$, dann gelten

a) ***Notwendiges Konvergenzkriterium****: Wenn $\sum a_m$ konvergiert, dann ist $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.*

b) ***Absolute Konvergenz****: Falls $\sum |a_m|$ konvergiert, so auch $\sum a_m$.*

c) ***Majorantenkriterium****: Seien $c_m \in \mathbb{R}_+$ für $m \in \mathbb{N}$. Gelten*

- **(i)** *$\sum c_m$ konvergiert*
- **(ii)** *$c_m \geq a_m$ für alle $m \in \mathbb{N}$*

Dann konvergiert $\sum a_m$.

d) ***Quotientenkriterium****: Gibt es ein $t \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$\left|\frac{a_{m+1}}{a_m}\right| \;<\; t$$

für alle $m \in \mathbb{N}$, dann konvergiert $\sum a_m$.

e) ***Wurzelkriterium****: Falls es ein $t \in (0,1) \subset \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft*

$$\sqrt[m]{|a_m|} \;\leq\; t$$

für alle $m \in \mathbb{N}$ gibt, so konvergiert $\sum a_m$.

Beweis. Die Beweise lassen sich wörtlich aus der reellen Analysis übernehmen.

Definition 4.7 *(Einige topologische Begriffe)*
Seien $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und $a \in D \subset \mathbb{C}$ eine Teilmenge.
(1) Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, dann heißt

$$\mathrm{U}_\varepsilon(a) \ := \ \left\{ z \in \mathbb{C} \, \middle| \, |z-a| < \varepsilon \right\}$$

die ε-Umgebung von a.
(2) a heißt Häufungspunkt von D, falls für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ die Menge

$$\mathrm{U}_\varepsilon(a) \cap D$$

unendlich viele Punkte enthält. Die Menge aller Häufungspunkte von D bezeichnen wir mit $\mathrm{HP}(D)$.
(3) a heißt ein innerer Punkt von D, falls es ein $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass

$$\mathrm{U}_\varepsilon(a) \ \subsetneq \ D$$

Die Menge aller innenren Punkte von D bezeichnen wir mit $\mathrm{Int}(D)$.
(4) D heißt offen, falls alle $z \in D$ innere Punkte sind, das heißt falls $D = \mathrm{Int}(D)$
(5) D heißt abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \setminus D$ offen ist.
(6) D heißt beschränkt, fass es ein $C \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt $|z| < C$.
(7) D heißt kompakt, falls D beschränkt und abgeschlossen ist.
(8) Sei $r \in \mathbb{R}_+$, dann heißt

$$\mathrm{K}_r(a) \ := \ \left\{ z \in \mathbb{C} \, \middle| \, |z-a| \leq r \right\}$$

geschlossene Kreisscheibe um a mit Radius r.

5 Stetigkeit

Definition 5.1 *(Grenzwert und Stetigkeit)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlen, $a \in D$ eine komplexe Zahl und $f : D \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion.

1. *Wir sagen, dass der Limes von $f(z)$ für z gegen a gleich $w \in \mathbb{C}$ ist, und schreiben*

$$\lim_{z \to a} f(z) \; = \; w$$

   falls

$$\forall \, \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; \forall \, z \in D \cap \mathrm{U}_\delta(a) : \qquad |f(z) - w| \; < \; \varepsilon$$

2. *Die Funktion f heißt stetig in a, falls*

$$\lim_{z \to a} f(z) \; = \; f(a)$$

   Weiter heißt f stetig (auf ganz D), wenn f <u>in allen Punkten</u> $z \in D$ stetig ist.

Bemerkung 5.2 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlen, $a \in D$ eine komplexe Zahl und $f : D \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion. Dann sind äquivalent:*

1. *f ist stetig.*

2. *Für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $\delta \in \mathbb{R}_+$ derart, dass*

$$z \in D \cap \mathrm{U}_\delta(a) \;\; \Rightarrow \;\; |f(z) - f(a)| \; < \; \varepsilon$$

3. *Für alle Folgen $(z_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ mit $z_n \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} a$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) \; = \; f(a)$$

   (Folgenstetigkeit)

Beweis. „(1)⇔(2)“ ist die Definition des Limes und „(2)⇔(3)“ ist wörtlich der gleiche Beweis, wie in der reellen Analysis. □

Bemerkung 5.3 *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge der komplexen Zahlen und $f, g : D \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ stetige komplexwertige Funktionen. Dann gelten*
a) Die folgenden Funktionen sind stetig in $a \in D$:

$$\begin{aligned} \big(f+g\big)(z) \; &:= \; f(z) + g(z) & \qquad \big(f \cdot g\big)(z) \; &:= \; f(z) \cdot g(z) \\ \mathrm{Re}\,\big(f\big)(z) \; &:= \; \mathrm{Re}\,\big(f(z)\big) & \qquad \mathrm{Im}\,\big(f\big)(z) \; &:= \; \mathrm{Im}\,\big(f(z)\big) \\ \overline{f}(z) \; &:= \; \overline{f(z)} & \qquad |f|(z) \; &:= \; |f(z)| \end{aligned}$$

b) Ist $g(a) \neq 0$, dann gibt es eine δ-Umgebung von a in der g nicht Null ist und in dieser Umgebung ist die Funktion

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) \; := \; \frac{f(z)}{g(z)}$$

definiert und in a stetig.

Beweis. Nach Bemerkung 4.2 sind Summen, Produkte, Real- und Imaginärteil, komplexes Konjugat und Betrag einer konvergenter Folgen wieder konvergente Folgen. Mit Bemerkung 5.2 sind die Aussagen von Teil (a) äquivalent zu den entsprechenden Aussagen über Folgen. Für den Teil (b) fehlt noch die existenz dieser Umgebung. Da g in $a \in D$ stetig ist, gibt es zu jedem $|g(a)| > \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ so dass für alle $z \in D \cap \mathrm{U}_\delta(a)$ gilt: $|g(z) - g(a)| < \varepsilon$. Dann gilt mit der unteren Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |g(z) - g(a) + g(a)| \\ &= \Big| \underbrace{|g(a)|}_{>\varepsilon} - \underbrace{|g(z) - g(a)|}_{<\varepsilon} \Big| \\ &= |g(a)| - \varepsilon \; > \; 0 \end{aligned}$$

Damit ist $\frac{f}{g}$ auf $\mathrm{U}_\delta(a) \cap D$ wohldefiniert und die Stetigkeit folgt wie oben aus der entsprechenden Aussage über Folgen. □

Bemerkung 5.4 *Seien $E, D \subseteq \mathbb{C}$ Teilmengen und*

$$f : D \to \mathbb{C} \quad \text{sowie} \quad g : E \to \mathbb{C}$$

mit $\mathrm{Img}(f) := f(D) \subseteq E$*. Seien weiter f in $a \in D$ und g in $f(a) \in E$ stetig, dann ist auch*

$$g \circ f : D \to \mathbb{C}$$

stetig in $a \in D$.

Beweis. Auch dieser Beweis verläuft wörtlich genauso wie in der reellen Analysis. □

Beispiel 5 *(Stetige Funktionen)*
Die Funktionen $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{N}$, $f(z) = \overline{z}$, $f(z) = |z|$ und alle Polynome $f \in \mathbb{C}[X]$ sind auf ganz $\mathbb{C}$ stetig.

6 Differenzierbarkeit

Zu Beginn der Vorlesung haben wir in Satz 1.2 die Punktmenge der komplexen Zahlen als $\mathbb{R}^2$ definiert. Wenn wir nun von Differenzierbarkeit reden, können wir diesen Begriff auf zwei Wegen einführen:

1. Wir halten uns an die Definition der Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$ und untersuchen mit den Begriffen der partiellen und totalen Differenzierbarkeit die Differenzierbarkeit in $\mathbb{C}$.

2. Die Schreibweise $f(z)$ legt eine Herangehensweise analog zur eindimensionalen Analysis nahe.

Wir wollen uns zunächst an die zweite Metode halten und fordern die Existenz eines Differenzequotienten wie in der eindimensionalen Analysis. Dazu die nächste

Definition 6.1 *(komplexe Differenzierbarkeit / Ableitung / holomorphe Funktion)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt f in $a \in D$ komplex differenzierbar, falls

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

existiert. In diesem Fall schreiben wir

$$f'(a) \;=\; \lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

und nennen f' die Ableitung von f im Punkt a. Ist f in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar so nennen wir f holomorph oder analytisch auf D.

Anmerkung Wie in der eindimensionalen reellen Analysis gilt

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} \;=\; \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Bemerkung 6.2 *(Wichtige Funktionen)*

1. *Die Funktion $f(z) = z^n$ ist für $n \in \mathbb{N}$ in jedem Punkt $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar und es gilt*
$$f'(a) \;=\; n \cdot a^{n-1}$$

2. *Die Funktion $f(z) = \overline{z}$ ist in <u>keinem</u> Punkt $a \in \mathbb{C}$ komplex differenzierbar.*

Beweis. Zum Nachweis von (1) betrachten wir den Differenzequotient

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^n - (a)^n}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(-a^n + \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} h^m \cdot a^{n-m} \right) \end{aligned} \tag{6.1}$$

Die aufgelöste binomische Formel in (6.1) wollen wir nun noch etwas genauer betrachten, denn es gilt

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} h^m \cdot a^{n-m} \;=\; a^n + nha^{n-1} + h^2 \cdot \sum_{m=2}^{n} \binom{n}{m} h^{m-2} a^{n-m}$$

Damit können wir den Differenzenquotient in (6.1) umstellen zu

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\cancel{h}}\left(-\cancel{a^n}+\cancel{a^n}+n\,\cancel{h}a^{n-1}+h^{\cancel{2}}\cdot\sum_{m=2}^{n}\binom{n}{m}h^{m-2}a^{n-m}\right)\\
&= \lim_{h\to 0} n\cdot a^{n-1}+h\cdot\sum_{m=2}^{n}\binom{n}{m}h^{m-2}a^{n-m}\\
&= n\cdot a^{n-1}
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass der Differenzenquotient existiert und den erwarteten Grenzwert hat. Auch für die zweite Aussage betrachten wir den Differenzenquotient:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\overline{a+h}-\overline{a}}{h} = \frac{\overline{h}}{h} = \begin{cases} 1 & \text{falls } h\in\mathbb{R}\\ -1 & \text{falls } h\in i\,\mathbb{R}\end{cases}$$

Damit ist klar, dass der Limes dieses Ausdrucks nicht existieren kann. □

Bemerkung 6.3 *Sei $D\subseteq\mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f: D\to\mathbb{C}$ eine Funktion, dann sind äquivalent:*

1. *f ist in $a\in D$ komplex differenzierbar mit $f'(a)=A$.*
2. *Es gibt eine in $a\in D$ stetige Funktion $\varphi: D\to\mathbb{C}$ mit $\varphi(a)=A$ derart, dass*

$$f(z) = f(a)+\varphi(z)\cdot(z-a) \qquad \forall\, z\in D$$

Beweis. „(1)⇒(2)": Setze

$$\varphi(z) := \begin{cases}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{für } z\neq a\\ A & \text{für } z=a\end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist f komplex differenzierbar in a also gilt für $z\neq a$

$$\lim_{z\to a}\varphi(z) = \lim_{z\to a}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = A = \varphi(a)$$

Somit ist φ stetig in $a\in D$.
„(2)⇒(1)": Betrachte die gegebene Darstellung von f

$$\begin{aligned}
f(z) &= f(a)\varphi(z)\cdot(a-z)\\
\Leftrightarrow \varphi(z) &= \frac{f(z)-f(a)}{z-a} \qquad z\neq a
\end{aligned}$$

Da φ nach Voraussetzung stetig in a ist, gilt

$$\lim_{\substack{z\to a\\ z\neq 0}}\frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{\substack{z\to a\\ z\neq 0}}\varphi(z) = A =: f'(a)$$

□

Folgerung 6.4 *Sei $f : D \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ in $a \in D$ komplex differenzierbar, dann ist f in $a \in D$ stetig.*

Beweis. Nach Bemerkung 6.3 schreiben wir f als $f(z) = f(a) + \varphi(z)\,(z-a)$ mit einer in $a \in D$ stetigen Funktion φ. Da $f(a)$ eine konstante Funktion und $(z-a)$ ein Polynom ist, sind alle Funktionen auf der rechten Seite der Gleichung stetig. Nach Bemerkung 5.3 sind Summen und Produkte stetiger Funktionen wieder stetig. □

Satz 6.5 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei in $a \in D$ komplex differenzierbare Funktionen. Dann gelten:*

1. *$(f+g)$ ist in $a \in D$ komplex differenzierbar und es gilt*

$$\big(f+g\big) * (a) \;=\; f'(a) + g'(a)$$

2. *$(f \cdot g)$ ist in $a \in D$ komplex differenzierbar und es gilt*

$$\big(f \cdot g\big) * (a) \;=\; f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

3. *Gilt für alle $z \in D$ zusätzlich $g(z) \neq 0$, dann ist auch der Quotient $\frac{f}{g}$ in $a \in D$ komplex differenzierbar und es gilt*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) \;=\; \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{\big(g'(a)\big)^2}$$

Beweis. Auch diesen Beweis können wir wörtlich aus der eindimensionalen reellen Analysis übernehmen. □

Folgerung 6.6 *Es gelten:*

1. *Jedes Polynom $f \in \mathbb{C}[X]$ ist auf ganz $\mathbb{C}$ komplex differenzierbar.*
2. *Sind $f, g \in \mathbb{C}[X]$ Polynome und $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge mit $g(z) \neq 0$ für alle $z \in D$, dann ist die rationale Funktion $\frac{f}{g}$ in jedem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar.*

Beweis. Diese Behauptung haben wir mit Bemerkung 6.2 und Satz 6.5 bereits gesehen. □

Satz 6.7 *(Kettenregel)*
Seien $D, E \subseteq \mathbb{C}$ Teilmengen und

$$f : D \to \mathbb{C} \quad \text{sowie} \quad g : E \to \mathbb{C}$$

mit $\mathrm{Img}(f) := f(D) \subseteq E$. Seien weiter f in $a \in D$ und g in $f(a) \in E$ komplex differenzierbar. Dann ist auch $g \circ f$ in a komplex differenzierbar und es gilt

$$\big(g \circ f\big)'(a) \;=\; f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big)$$

Beweis. Nach Bemerkung 6.3 gelten

$$f(z) \;=\; f(a) + \varphi(z) \cdot (z-a) \qquad \forall\, z \in D \tag{6.2}$$
$$g(w) \;=\; g\big(f(a)\big) + \psi(w) \cdot \big(w - f(a)\big) \qquad \forall\, w \in E \tag{6.3}$$

Mit stetigen Funktionen φ und ψ. Weiter gelten in a bzw. in $f(a)$

$$\varphi(a) \;=\; f'(a) \qquad \text{bzw.} \qquad \psi\big(f(a)\big) \;=\; g'\big(f(a)\big)$$

Mit $w = f(z)$ erhalten wir aus (6.2) und (6.3)

$$\begin{aligned}
\big(g \circ f\big)(z) \;=\; g\big(f(z)\big) &\overset{(6.3)}{=} g\big(f(a)\big) + \psi\big(f(z)\big) \cdot \big(f(z) - f(a)\big) \\
&\overset{(6.2)}{=} g\big(f(a)\big) + \underbrace{\psi\big(f(z)\big) \cdot \varphi(z)}_{\text{stetig in } a} \cdot (z-a) \\
&= \big(g \circ f\big)(a) + \rho(z) \cdot (z-a)
\end{aligned}$$

Mit $\rho(z) := \psi\big(f(z)\big) \cdot \varphi(z)$. Wie gesehen ist ρ stetig und nach Bemerkung 6.3 ist $g \circ f$ dann komplex differenzierbar mit

$$\big(g \circ f\big)'(a) \;=\; \rho(a) \;=\; \psi\big(f(a)\big) \cdot \varphi(a) \;=\; f'(a) \cdot g'\big(f(a)\big)$$

$\square$

Wir haben in den vorangegangenen Bemerkungen und Sätzen gesehen, dass uns die Definition der komplexen Differenzierbarkeit via Differenzenquotient am Modell der eindimensionalen reellen Analysis ermöglicht viele Sätze aus der reellen Analysis zu übernehmen. Damit haben wir sofort einen Satz an wichtigen Eigenschaften komplex differenzierbarer Funktionen an der Hand. Wie hängt nun die so definierte komplexe Differenzierbarkeit mit der totalen Differenzierbarkeit im $\mathbb{R}^2$ zusammen? Wir betrachten noch einmal die Bijektion aus Satz 1.2

$$\begin{aligned}
\Psi : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{C} \\
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto x + iy
\end{aligned}$$

Sei nun $D \subseteq \mathbb{C}$ eine <u>offene</u> Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, dann schreibe $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ via Ψ^{-1} in Koordinaten:

$$\begin{aligned}
f : \quad \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Sei nun $a := x_0 + iy_0$ und f in $a \subset D$ komplex differenzierbar. Wir bezeichnen $f'(a) = \alpha + i\beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ und schreiben f nach Bemerkung 6.3 wieder als

$$f(z) \;=\; f(a) + f'(a) \cdot (z-a) + \psi(z) \cdot (z-a) \qquad \text{mit } \psi(z) := \varphi(z) - \varphi(a) \tag{6.4}$$

Dann gilt

$$\lim_{\substack{z \to a \\ z \neq a}} \psi(z) \;=\; 0$$

Wir übersetzen (6.4) wieder mit Ψ^{-1} in Koeffizientenschreibweise und erhalten

$$\begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} u(x_0,y_0) \\ v(x_0,y_0) \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}}_{=:\,A} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_2(x,y) \\ \psi_1(x,y) \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

Wir erhalten

$$A = \begin{pmatrix} \alpha(x - x_0) - \beta(y - y_0) \\ \beta(x - x_0) + \alpha(y - y_0) \end{pmatrix}$$

Was mit der in Satz 1.2 definierten Multiplikation auf $\mathbb{C}$ wieder

$$(\alpha + i\beta) \cdot ((x + iy) - (x_0 + iy_0)) = f'(a)(z - a)$$

entspricht. Die Eigenschaft der totalen Differenzierbarkeit auf $\mathbb{R}^2$ ist gegeben durch die folgende

Definition *(totale Differenzierbarkeit)*
Eine Funktion

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \end{array}$$

heißt in $z_0 := (x_0, y_0)^{\mathrm{T}}$ total differenzierbar, falls es eine Matrix $J \in \mathrm{Mat}_{\mathbb{R}}(2,2)$ und eine Funktion $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gibt, so dass für $z \in \mathbb{R}^2$ gelten

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\psi(z)}{||z - z_0||} = 0$$

und

$$f(z) = \begin{pmatrix} u(x_0, y_0) \\ v(x_0, y_0) \end{pmatrix} + J \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} + \psi(z) \tag{6.6}$$

Die Matrix J aus dieser Definition ist die Jacobi-Matrix von f im Punkt $z_0 = (x_0, y_0)^{\mathrm{T}}$, also

$$J = J_f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial u}{\partial y}(z_0) \\ \frac{\partial v}{\partial x}(z_0) & \frac{\partial v}{\partial y}(z_0) \end{pmatrix}$$

Aus dem so gezeigten erhalten wir den nächsten

Satz 6.8 *(Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine komplexwertige Funktion, mit

$$f(z) = f(x + iy) := u(x,y) + iv(x,y)$$

Dann sind äquivalent:

1. *f ist komplex differenzierbar in $z_0 \in D$.*
2. *Die Funktion*

$$\begin{array}{rcl} f: \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{pmatrix} \end{array}$$

   ist in $z_0 = (x_0, y_0)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^2$ reell totaldifferenzierbar und es gelten die Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen

$$\frac{\partial}{\partial x} u(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y} v(x_0, y_0) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y} u(x_0, y_0) = -\frac{\partial}{\partial x} v(x_0, y_0)$$

Falls (1) und damit auch (2) gelten, so können wir $f'(z_0)$ schreiben als

$$f'(z_0) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0) + i\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)$$

Beweis. Für die Richtung „(1)⇒(2)“ gilt die Formel (6.5) wie oben gezeigt. Damit erfüllt f die Bedingungen der totalen differenzierbarkeit und lässt sich mit

$$J \;:=\; \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

in der Form von Formel (6.6) schreiben. Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen folgen aus dem Vergleich der beiden Matritzen. Außerdem folgt auf diesem Wege auch

$$f'(z_0) := \alpha + i\beta = \frac{\partial}{\partial x}u(x_0,y_0) + i\frac{\partial}{\partial x}v(x_0,y_0)$$

Für die Gegenrichtung „(2)⇒(1)“ gilt die Formel (6.6) nach Voraussetzung. Weiter garantieren die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen, dass die Jacobi-Matrix von f die Form

$$J \;:=\; \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

besitzt. Damit gilt die Formel (6.5). Die Behauptung folgt nun mit Bemerkung 6.3. □

Notation 1 *Für partielle Ableitungen im $\mathbb{R}^2$ führen wir die folgende Kurznotation ein:*

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x,y) =: f_x(x,y)$$

Beispiel 6 *(Cauchy-Riemannschen-Differentialgleichungen)*

1. *Für die Funktion $f(z) = z^2$ gilt mit $z = x + iy$*

$$f(x+iy) \;=\; (x+iy)^2 \;=\; x^2 - y^2 + i2xy$$

   Damit ist $u(x,y) = x^2 - y^2$ und $v(x,y) = 2xy$. Für die partiellen Ableitungen gelten die Cauchy-Riemannschen Differentilgleichungen.

$$u_x(x,y) = 2x = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -2y = -v_x(x,y)$$

2. *Für die Funktion $f(z) = \overline{z}$ gilt mit $z = x + iy$*

$$f(x+iy) \;=\; (\overline{x+iy}) \;=\; x - iy$$

   Dann ist $u(x,y) = x$ und $v(x,y) = -y$. Für die partiellen Ableitungen gilt dann

$$u_x(x,y) = 1 \neq v_y(x,y) = -1$$

   Damit erfüllt f die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen nicht und ist somit nicht komplex differenzierbar.

Definition 6.9 *(Zusammenhängend / Gebiet)*

1. *Eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt zusammenhängend, wenn sie sich nicht als disjunkte Vereinigung zweier nicht-leerer offener Mengen schreiben lässt.*

2. *Eine zusammenhängende, nicht-leere und offene Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ nennen wir ein Gebiet.*

Satz 6.10 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine auf D holomorphe Funktion. Ist $f'(z) = 0$ für alle $z \in D$, dann ist f konstant.*

Beweis. Die komplexe Differenzierbarkeit in $z \in D$ impliziert nach Satz 6.8 die totale Differenzierbarkeit. Da weiter $f'(z) = 0$ gilt, sind alle partiellen Ableitungen in z gleich Null. Dass dann f bereits konstant ist entnehmen wir der reellen mehrdimensionalen Analysis. □

7 Potenzreihen

Potenzreihen spielen in der Funktionentheorie eine wichtige Rolle. Wir werden sehen, dass sich jede holomorphe Funktion bereits in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Insbesondere folgt dann sofort, dass - da jede Potenzreihe unendlich oft differenzierbar ist - jede holomorphe Funktion unendlich oft differenzierbar ist. Bevor wir zu diesen Ergebnissen kommen benötigen wir einige Begriffe. Zum Teil werden wir auch in diesem Abschnitt auf Ergebnisse der reellen Analysis zurückgreifen können.

Definition 7.1 *(gleichmäßige Konvergenz)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und

$$f_n : D \to \mathbb{C} \qquad \text{für } n \in \mathbb{N}$$

eine Folge von komplexwertigen Funktionen. Wir sagen die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n \geq N \;\; \forall z \in D \qquad |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

Die Reihe $\sum f_n$ heißt gleichmäßig konvergent auf D, falls die Folge der Partialsummen

$$S_N(f_n) \;:=\; \sum_{n=0}^{N} f_n$$

gleichmäßig konvergent ist.

Bemerkung 7.2 *(Cauchysche Konvergenzkriterium)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine Teilmenge und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Funktionenfolge mit $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$. Es gelten:

a) *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann gleichmäßg konvergent auf D, falls*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall n, m > N \;\; \forall z \in D \qquad |f_n(z) - f_n(z)| < \varepsilon$$

b) *Die Reihe $\sum f_n$ ist genau dann gleichmäßig konvergent, wenn*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists N \in \mathbb{N} \;\; \forall m_1 > N \;\; \forall m_2 \in \mathbb{N} \;\; \forall z \in D \qquad \left| \sum_{n=m_1}^{m_1+m_2} f_n(z) \right| < \varepsilon$$

Beweis. Auch diesen Beweis übernehmen wir wörtlich aus der reellen Analysis. □

Bemerkung 7.3 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$. Es gelten*

a) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gleichmäßig konvergente Folge stetiger Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, dann ist auch die Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$ stetig.*

b) ***Majorantenkriterium:***
Sei $\sum a_m$ mit $a_m \in \mathbb{R}_+$ eine konvergente Reihe positiver reeller Zahlen und sei weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$|f_m(z)| \ \leq \ a_m \qquad \forall\, m \in \mathbb{N} \ \ \forall\, z \in D$$

Dann ist $\sum f_n$ gleichmäßig absolut konvergent, d.h. $\sum |f_n|$ ist gleichmäßig konvergent.

Beweis. Diese Ergebnisse können ebenfalls aus der reellen Analysis übernommen werden. □

Definition 7.4 *(Potenzreihe)*
Seien $z_0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ und $a_m \in \mathbb{C}$ für $m \in \mathbb{N}$ komplexe Zahlen. Eine Reihe der Form

$$g(z) \ := \ \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot (z - z_0)^m$$

heißt Potenzreihe mit den Koeffizienten a_m um den Entwicklungspunkt z_0.

Bemerkung 7.5 *Sei $g(z) \ := \ \sum a_m(z - z_0)^m$ eine Potenzreihe, die bei $z_1 \neq z_0$ konvergiert. Setze $r_1 := |z_1 - z_0|$, dann gelten*

a) *Für jedes z mit $|z - z_0| < r_1$ konvergiert die Potenzreihe.*

b) *Für jedes $r \in \mathbb{R}_+$ mit $0 < r < r_1$ konvergiert die Potenzreihe gleichmäßig absolut auf der Kreisscheibe von Radius r um z_0, d.h. auf $\mathrm{K}_r(z_0) \ := \ \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - z_0 \leq r\}$*

Beweis. Es genügt Teil (b) zu zeigen, da dann Teil (a) automatisch folgt. Nach Voraussetzung für Teil (b) ist die Reihe

$$g(z) := \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot (z_1 - z_0)^m$$

konvergent, also ist $(b_m)_{m\in\mathbb{N}} \ := \ (a_m(z_1 - z_0)^m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Insbesondere ist $(b_m)_{m\in\mathbb{N}}$ beschränkt, das heißt es gibt ein $C \in \mathbb{R}_+$ so dass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt: $|b_m| = |a_m(z_1 - z_0)^m| \ < \ C$. Damit gilt

$$|a_m| \ < \ \frac{C}{r_1^m}$$

Es sei $r < r_1$, setze $q := \frac{r}{r_1} < 1$. Für $z \in \mathrm{K}_r(z_0)$ gilt

$$\left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(z - z_0)^m\right| \ \leq \ \sum_{m=0}^{\infty} |a_m\,(z - z_0)^m| \ \leq \ \sum_{m=0}^{\infty} C \cdot \left(\frac{|z - z_0|}{r_1}\right)^m \ \leq \ C \cdot \sum_{m=0}^{\infty} q^m$$

Wegen $q < 1$ konvergiert die geometrische Reihe, wir haben also eine Majorante gefunden, so dass nach Bemerkung 7.3 die Potenzreihe $g(z)$ gleichmäßig absolut konvergiert. □

Definition und Satz 7.6 *(Hauptsatz über Potenzreihen / Konvergenzradius)*
Sei $z_0 \in D \subseteq \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und

$$g(z) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(z-z_0)^m$$

eine Potenzreihe. Dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $r \in (0,\infty]$, mit den Eigenschaften

a) *Für jedes $\rho \in [0,r)$ ist die Potenzreihe auf $\mathrm{K}_\rho(z_0)$ gleichmäßig absolut konvergent.*

b) *Für <u>kein</u> $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > r$ ist die Potenzreihe konvergent.*

c) *Es gilt die Cauchy-Hadamadt-Formel*

$$r \;=\; \frac{1}{\limsup_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} \quad \begin{cases} := \infty & \text{falls } \limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|} = 0 \\ \in \mathbb{R}_+ & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir nennen r den Konvergenzradius von g.

Beweis. Die Teile **(a)** und **(b)** beweisen wir zusammen. Setze zunächst

$$r \;:=\; \sup\left\{\, |z-z_0| \;\middle|\; g(z) \text{ konvergiert bei } z \right\}$$

Sei nun $\rho \in [0,r)$ eine reelle Zahl, dann gibt es ein $z_1 \in \mathbb{C}$ so dass $|z_1 - z_0| > \rho$ und die Potenzreihe $g(z)$ bei z_1 konvergiert. Mit Bemerkung 7.5 konvergiert $g(z)$ dann gleichmäßig auf $\mathrm{K}_\rho(z_0)$.
Für $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| > r$ ist die Reihe $g(z)$ nach Definition von r nicht konvergent.
Zum Nachweis von Teil **(c)** seien $\rho \in [0,r)$ und $\rho_1 \in [\rho, r)$. Nach Definition des Limes superior gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sqrt[m]{|a_m|} \;\leq\; \frac{1}{r} \;<\; \frac{1}{\rho_1} \qquad \forall\, m > N$$

Sei nun $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-z_0| \leq \rho$, dann gilt

$$\begin{aligned} |g(z)| \;&=\; \left|\sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(z-z_0)^m\right| \;\leq\; \sum_{m=0}^{\infty} |a_m|\,|z-z_0|^m \\ &\leq\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{|z-z_0|^m}{\rho_1^m} \;\leq\; \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^m \end{aligned}$$

da $\left(\frac{\rho}{\rho_1}\right) < 1$ konvergiert die geometrische Reihe. Sei nun $\rho > r$, dann gibt es nach der Definition des Limes superior eine streng monotone Folge $m_1 < m_1 < \ldots$ derart, dass

$$\sqrt[m_j]{|a_{m_j}|} \;>\; \frac{1}{\rho} \;\Rightarrow\; |a_{m_j}\,(z-z_0)^{m_j}| \;\geq\; \left(\frac{|z-z_0|}{\rho}\right)^{m_j} \;\geq\; 1$$

gilt. Damit bilden die Koeffizienten $a_m\,(z-z_0)^m$ für $\rho > r$ keine Nullfolge. Damit ist die Potenzreihe für $\rho > r$ nicht konvergent. $\square$

Beispiel 7 *(Konvergenzradien wichtiger Potenzreihen)*

- *Die Potenzreihe* $\sum z^m$ *hat den Konvergenzradius*

$$r \;:=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{1}} \;=\; 1$$

- *Die Potenzreihe* $\sum a^m z^m$ *hat den Konvergenzradius*

$$r \;:=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a^m|}} \;=\; \frac{1}{|a|}$$

- *Die Potenzreihe* $\sum m^m z^m$ *hat den Konvergenzradius*

$$r \;:=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|m^m|}} \;=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} m} \;:=\; 0$$

- *Die Potenzreihe*

$$\exp(z) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} z^m$$

  hat den Konvergenzradius $r = \infty$*, denn es gilt*

$$\frac{|a_{m+1}\cdot z^{m+1}|}{|a_m \cdot z^m|} \;=\; \left|\frac{z^{m+1}}{(m+1)!}\cdot\frac{m!}{z^m}\right| \;=\; \left|\frac{z}{m+1}\right|$$

  für ein beliebiges aber festes $z \in \mathbb{C}$ *gilt nun für alle* $m \in \mathbb{N}$ *die groß genug sind, dass*

$$\left|\frac{z}{m+1}\right| \;<\; \frac{1}{2}$$

- *Die Potenzreihe*

$$\log(z) \;:=\; \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}(z-1)^m$$

  hat den Konvergenzradius

$$r \;:=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|m|}} \;=\; 1$$

Mehr zu $\exp(z)$ *und* $\log(z)$ *in den folgenden Paragraphen.*

Satz 7.7 *Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und*

$$g(z) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} a_m \,(z - z_0)^m$$

eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt z_0 mit Konvergenzradius $r > 0$, dann stellt $g(z)$ eine holomorphe Funktion auf $\mathrm{U}_r(z_0)$ dar und ihre Ableitung ist

$$g'(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} m \, a_m \,(z - z_0)^{m-1}$$

Beweis. Wir teilen den Beweis in mehrere Teile.

Behauptung 1 *$g'(z)$ hat den selben Konvergenzradius wie $g(z)$.*

Nach der Formel von Cauchy-Hadamadt gilt

$$\begin{aligned} r \;&=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|a_m|}} \;=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{m} \cdot \sqrt[m]{|a^m|}} \\ &=\; \frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{|m \cdot a^m|}} \end{aligned}$$

$\triangle$

Setze

$$S_n(z) := \sum_{m=0}^{n} a_m \,(z - z_0)^m \quad \text{und} \quad S_n(z) := \sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \,(z - z_0)^m$$

dann können wir $g(z)$ als $S_n(z) + R_n(z)$ schreiben. Da $S_n(z)$ ein Polynom ist gilt

$$S_n'(z) \;=\; \sum_{m=0}^{n} m \, a_m \,(z - z_0)^{m-1}$$

Also ist $S_n'(z)$ eine Partialsumme von $g'(z)$ und somit gilt

$$\lim_{n\to\infty} S_n'(z) \;=\; g'(z) \tag{7.7}$$

Behauptung 2 *$g(z)$ ist in $\hat{z} \in \mathrm{U}_r(z_0)$ komplex differenzierbar mit der Ableitung $g'(\hat{z})$.*

Seien $z, \hat{z} \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, derart dass $|z - z_0| \le \rho$ und $|\hat{z} - z_0| \le \rho$ für ein $\rho < r$ gelten. Betrachte den Differenzenquotient

$$\begin{aligned} D(z,\hat{z}) \;&:=\; \frac{g(z) - g(\hat{z})}{z - \hat{z}} - g'(\hat{z}) \;=\; \frac{\big(S_n(z) + R_n(z)\big) - \big(S_n(\hat{z}) + R_n(\hat{z})\big)}{z - \hat{z}} - g'(\hat{z}) \\ &=\; \underbrace{\frac{S_n(z) - S_n(\hat{z})}{z - \hat{z}} - S_n'(\hat{z})}_{=:A} + \underbrace{S_n'(\hat{z}) - g'(\hat{z})}_{=:B} + \underbrace{\frac{R_n(z) - R_n(\hat{z})}{z - \hat{z}}}_{=:C} \end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, wir wollen im folgenden ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\delta > 0$ bestimmen, so dass für $|z - \hat{z}| < \delta$ gilt $D(z,\hat{z}) < \varepsilon$.

1.) Finde ein passendes $N \in \mathbb{N}$.
Betrachte B: Wegen Formel (7.7) gibt es ein $N_B \in \mathbb{N}$ so dass für alle $n < N_B$ gilt

$$|S_n'(\hat{z}) - g'(\hat{z})| \;<\; \frac{\varepsilon}{3}$$

Betrachte C:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{R_n(z) - R_n(\hat{z})}{z - \hat{z}}\right| \;&=\; \left|\frac{\sum\limits_{m=n+1}^{\infty} a_m\,(z - z_0)^m - \sum\limits_{m=n+1}^{\infty} a_m\,(\hat{z} - z_0)^m}{z - \hat{z}}\right| \\
&=\; \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{a_m\left[(z - z_0)^m - (\hat{z} - z_0)^m\right]}{z - \hat{z}}\right| \\
&=\; \left|\sum_{m=n+1}^{\infty} a_m \sum_{l=1}^{m} (z - z_0)^{m-l}\,(\hat{z} - z_0)^{l-1}\right| \\
&\leq\; \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| \cdot \sum_{l=1}^{m} \underbrace{|z - z_0|^{m-l}\,|\hat{z} - z_0|^{l-1}}_{\leq\, \rho^{m-1}} \\
&\leq\; \sum_{m=n+1}^{\infty} |a_m| \cdot m \cdot \rho^{m-1}
\end{aligned}$$

Da $\rho < r$ Vorausgesetzt war, gibt es nach Bemerkung 7.5 ein $N_C \in \mathbb{N}$ derart, dass für alle $n < N_C$ gilt

$$\left|\frac{R_n(z) - R_n(\hat{z})}{z - \hat{z}}\right| \;<\; \frac{\varepsilon}{3}$$

Wähle nun $N = \max\{N_B, N_C\}$ und $n > N$.

2.) Finde ein passendes $\delta > 0$.
Betrachte A: Da S_n in $\hat{z}$ komplex differenzierbar ist mit der Ableitung $S_n'(\hat{z})$, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - \hat{z}\,| < \delta$ gilt:

$$\left|\frac{S_n(z) - S_n(\hat{z})}{z - \hat{z}} - S_n'(\hat{z})\right| \;<\; \frac{\varepsilon}{3}$$

3.) Insgesamt erhalten wir für ein $n > N$ und $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - \hat{z}\,| < \delta$

$$D(z, \hat{z}) \;=\; \frac{g(z) - g(\hat{z})}{z - \hat{z}} - g'(\hat{z}) \;<\; \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon$$

$\triangle$

Damit ist g komplex differenzierbar in allen Punkten $\hat{z} \in \mathrm{U}_r(z_0)$, also holomorph mit der Ableitung $g'(\hat{z})$. $\square$

Folgerung 7.8 *(Taylor-Formel für Potenzreihen)*
Sei $f(z) = \sum a_m (z - z_0)^m$ *eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt* $z_0 \in \mathbb{C}$ *mit Konvergenzradius* $r > 0$. *Es gelten*

a) *Ableitungsregel:*

$$f^{(k)}(z) \;=\; \sum_{m=k}^{\infty} a_m \frac{m!}{(m-k)!} (z - z_0)^{m-k}$$

b) *Taylor-Formel:*

$$f(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} (z - z_0)^m$$

Beweis. Die Ableitungsregel folg sofort durch mehrfaches Anwenden von Satz 7.7. Zum Nachweis der Taylorformel betrachte

$$f^{(k)}(z_0) \;=\; a_k \cdot k! \;\Leftrightarrow\; a_k \;=\; \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \qquad \forall\, k$$

□

8 Exponentialfunktion und trigonometrische Funktionen

Definition 8.1 *(Exponentialfunktion)*
Die Funktion

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \end{aligned}$$

heißt (komplexe) Exponentialfunktion. Anstelle von $\exp(z)$ *schreiben wir oft auch* e^z.

Anmerkung Wie wir an der Definition als Potenzreihe sehen können, stimmt für $z \in \mathbb{R}$ die komplexe Exponentialfunktion mit der reellen Exponentialfunktion überein.

Satz 8.2 *Es gelten*

(a) $\exp$ *ist auf ganz* $\mathbb{C}$ *holomorph. mit der Ableitung* $\exp' = \exp$.

(b) *Für alle* $w, z \in \mathbb{C}$ *gilt:* $\exp(w + z) = \exp(w) \cdot \exp(z)$.

(c) *Für* $z = x + iy$ *mit* $x, y \in \mathbb{R}$ *gelten*

$$\begin{aligned} e^z &= e^x \cdot e^{iy} \qquad \text{und} \\ |e^z| &= |e^x| \qquad |e^{iy}| = 1 \end{aligned}$$

Beweis. Im vorhergegangenen Abschnitt haben wir in Beispiel 7 gezeigt, dass die komplexe Exponentialfunktion für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert.
Zu a) Nach Satz 7.7 dürfen wir $\exp$ termweise ableiten, also

$$\begin{aligned} \exp'(z) &= \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}\right)' = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} = \exp(z) \end{aligned}$$

Zu b) Sei $c \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest, dann definiere $f(z) := e^z \cdot e^{c-z}$. Mit der Kettenregel gilt

$$f'(z) = e^z \cdot e^{c-z} - e^z e^{c-z} = 0 \qquad \forall\, z \in \mathbb{C}$$

Also ist f nach Satz 6.10 konstant, denn $\mathbb{C}$ ist ein Gebiet. Daher gilt $f(0) = e^c = f(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Setze nun $c := w + z$, dann erhalten wir

$$f(z) = e^z \cdot e^{w+z-z} = e^z \cdot e^w = e^{w+z}$$

Zu c) Seien $S_n(z)$ die Partialsummen von $\exp$, dann gilt mit Bemerkung 4.2

$$\overline{\lim_{n\to\infty} S_n(z)} = \lim_{n\to\infty} \overline{S_n(z)} \qquad (*)$$

Betrachte nun das komplexe Konjugat von e^{iy}

$$\overline{e^{iy}} = \overline{\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iy)^m}{m!}} \overset{(*)}{=} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iy)^m}{m!} = e^{-y}$$

Nach Bemerkung 2.4 ist $|z|^2 = z\overline{z}$ und somit gilt

$$|e^{iy}|^2 = e^{iy}\overline{e^{iy}} = e^{iy}e^{-iy} \overset{(a)}{=} e^{iy-iy} = e^0 = 1$$

$\square$

Definition 8.3 *(Sinus und Kosinus)*
Die Funktion

$$\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \cos(z) := \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)$$

heißt (komplexer) Kosinus, und die Funktion

$$\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad \sin(z) := \frac{1}{i2}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$$

heißt (komplexer) Sinus.

Satz 8.4 *Es gelten*

(a) *Sinus und Kosinus sind durch die folgenden Potenzreihen gegeben:*

$$\cos(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m} \quad \text{und} \quad \sin(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} z^{2m+1}$$

Insbesondere stimmen für $z \in \mathbb{R}$ die komplexen Funktionen $\sin$ *und* $\cos$ *mit den entsprechenden reellwertigen Funktionen überein.*

(b) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt* $e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z)$.
Insbesondere gilt die Eulersche Formel: $e^{i\varphi} \;=\; \cos(\varphi) + i\sin(\varphi)$ *für $\varphi \in \mathbb{R}$*

(c) *Für alle $z \in \mathbb{C}$ gelten*
i) $\cos^2(z) + \sin^2(z) = 1$ *ii)* $\cos'(z) = -\sin(z)$ *iii)* $\sin'(z) = \cos(z)$

Beweis. Zu **(a)** Nach der Definition von Kosinus und Exponentialfunktion gilt

$$\begin{aligned}
\cos(z) &= \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{iz}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(iz)^m}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-iz)^m}{m!}\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot z^m \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left[i^m + (-i)^m\right]\right) \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \cdot z^m \cdot \begin{cases} 1 & m \equiv 0 \ (4) \\ 0 & m \equiv 1 \ (4) \\ -1 & m \equiv 2 \ (4) \\ 0 & m \equiv 3 \ (4) \end{cases} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} z^{2m}
\end{aligned}$$

Der Nachweis für den Sinus verläuft genau analog. Für **(b)** betrachte

$$\cos(z) + i\sin(z) \;=\; \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) + \frac{i}{i2}(e^{iz} - e^{-iz}) \;=\; e^{iz}$$

Den Nachweis von Teil **(c)** des Satzes überlassen wir als Übungsaufgabe. □

Beispiel 8 *(Spezielle Werte der Exponentialfunktion)*

- $e^{i\frac{\pi}{2}} \;=\; \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \;=\; i$
- $e^{i\pi} \;=\; \cos\pi + i\sin\pi \;=\; -1$
- $e^{2i\pi} \;=\; \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) \;=\; 1$

Aus der reellen Analysis sind wir gewohnt, dass die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ eine bijektive Abbildung mit Umkehrabbildung $\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist. Für die komplexe Exponentialfunktion gilt eine solche einfache Beziehung nicht, denn - wie wir gleich zeigen werden - ist die komplexe Exponentialfunktion nicht bijektiv!

Bemerkung 8.5 *Es gelten*

(a) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *ist surjektiv.*

(b) $\exp(z) = 1 \Leftrightarrow z = 2i\pi \cdot n$ *mit* $n \in \mathbb{Z}$.
Insbesondere ist exp *nicht injektiv!*

Beweis. Für den Teil **(a)** sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Mit der Polardarstellung

$$w = |w| \cdot \big(\cos\varphi + i\sin\varphi\big) \qquad \varphi \in \mathbb{R}$$

Da $|w| > 0$ und die reelle Exponentialfunktion bijektiv ist, gibt es ein $\psi \in \mathbb{R}$ mit $\exp(\psi) = |w|$. Also gilt:

$$w = e^{\psi} \cdot e^{i\varphi}$$

Damit ist aber $w \in \mathrm{Img}(\exp)$.
Für Teil **(b)** müssen wir zwei Richtungen zeigen. Sei zunächst $z = 2\pi i \cdot n$ für $n \in \mathbb{Z}$, dann ist

$$e^z = e^{2\pi i n} = \big(e^{2\pi i}\big)^n = 1^n = 1$$

Für die andere Richtung sei $z := x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ derart, dass $e^z = 1$, dann gilt

$$1 = |e^z| = |e^x| \cdot |e^{iy}| = |e^x|$$

Von der reellen Exponentialfunktion wissen wir $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$, somit gilt

$$1 = e^z = e^{iy} = \cos(y) + i\sin(y)$$

Also muss y ein ganzzahliges Vielfaches von 2π sein. □

9 Komplexer Logarithmus

Wie wir am Ende des Vorangegangenen Abschnitts gesehen haben ist die komplexe Exponentialfunktion nicht bijektiv. Da sie aber surjektiv ist wollen wir versuchen eine Einschränkung zu finden, so dass wir eine bijektive Abbildung erhalten.

Definition 9.1 *(Logarithmus einer komplexen Zahl)*
Sei $w \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Ein $z \in \mathbb{C}$ heißt <u>ein</u> komplexer Logarithmus von w, falls $e^z = w$ gilt. Wir verwenden die uneindeutige Schreibweise $z = \log_{\mathbb{C}} w$.

Satz 9.2 *Sei $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ eine komplexe Zahl mit der Polardarstellung $w = |w| \cdot (\cos y + i\sin y)$. Dann hat w genau die folgenden Logarithmen*

$$\log_{\mathbb{C}} w = \log|w| + i(2\pi n + y) \qquad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

wobei log *die reelle Logarithmusfunktion bezeichnet.*

Beweis. Wir müssen wieder eine Äquivalenzaussage zeigen.

Behauptung 1 *Jede der Zahlen* $\log|w| + i(2\pi n + y)$ *ist ein Logarithmus von* w.

Mit Bemerkung 8.5 (b) gilt:

$$e^{\log|w|+i(2\pi n+y)} \;=\; e^{\log|w|} \cdot e^{i2\pi n} \cdot e^{iy} \;=\; |w| \cdot e^{iy} \;=\; w$$

$\triangle$

Behauptung 2 *Ist* z *ein Logarithmus von* w*, so ist* z *von der angegebenen Form.*

Sei $z = x' + iy'$ mit $x', y' \in \mathbb{R}$ eine komplexe Zahl mit $e^z = w$. Es gilt

$$e^z \;=\; e^{x'} \cdot e^{iy'} \;=\; |w|e^{iy}$$

Betrachte nun den Betrag von e^z

$$|e^{x'}| \cdot \underbrace{|e^{iy'}|}_{=1} \;=\; |w| \cdot \underbrace{|e^{iy}|}_{=1}$$

Also gilt $|e^{x'}| = e^{x'} = |w|$ und somit $x' = \log|w|$. Dann folgt aber

$$e^{iy'} \;=\; e^{iy} \;\Rightarrow\; e^{i(y'-y)} \;=\; 1$$

Nach Bemerkung 8.5 ist $y' - y$ dann ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, also gilt $y' \;=\; y + 2\pi \cdot n$.

$\square$

Definition 9.3 *(Komplexer Logarithmus)*

1. *Sei* $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. *Wir setzen*

   $$\mathrm{Log}(w) := \log|w| + iy$$

   mit $y \in (-\pi, \pi]$ *derart, dass* $\mathrm{Log}(w)$ *ein Logarithmus von* z *ist.*

2. *Wir bezeichnen die längs der negativen reellen Achse geschlitzte komplexe Ebene mit*

   $$\mathbb{C}_- \;:=\; \mathbb{C}\setminus\{\, y \in \mathbb{R} \mid y \leq 0 \,\}$$

3. *Wir definieren den Hauptzweig des komplexen Logarithmus als*

   $$\begin{aligned} \mathrm{Log} : \mathbb{C}_- &\;\to\; \mathbb{C} \\ w &\;\mapsto\; \mathrm{Log}(w) \end{aligned}$$

Satz 9.4 *Definiere die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene*

$$A := \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi \} \quad \text{und} \quad A' := \{ z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \mathrm{Im}(z) < \pi \}$$

Dann gelten

(a) *Die Einschränkung*

$$\exp : A \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

ist eine Bijektion von A nach $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(b) *Die Einschränkung*

$$\exp : A' \to \mathbb{C}_-$$

ist eine Bijektion von A' nach $\mathbb{C}_-$.

(c) *Der Hauptzweig des Logarithmus ist in keinem Punkt $w \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ stetig.*

Beweis. Der Teil **(a)** ist klar, denn nach Bemerkung 8.5 ist $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ surjektiv und durch Addition von ganzzahligen Vielfachen von $2\pi i$ kann jedes z in den Streifen $A \subset \mathbb{C}$ verschoben werden, ohne den Wert unter der komplexen Exponentialfunktion zu verändern, das heißt

$$\exp(z) = \exp(z + 2\pi i n) \qquad \text{für } n \in \mathbb{Z}$$

Da der Hauptzweig des Logarithmus Log eine eindeutig definierte Umkehrfunktion von $\exp_{|A}$ ist, ist auch Injektivität gewährleistet. Für den Nachweis von **(b)** sei $z \in A'$. Wir können z schreiben als $z = x + iy$ mit $y \in (-\pi, \pi) \subset \mathbb{R}$. Nach Satz 8.2 gilt $e^z = e^x \cdot e^{iy}$. Wegen $-\pi \neq y \neq \pi$ ist $e^{iy} \neq -1$ und somit ist $y \notin \mathbb{R}_- \cup \{0\}$. Das heißt $z \in \mathbb{C}_-$. Wir haben nun $\exp(A') \subset \mathbb{C}_-$ gezeigt, für die andere Inklusion sei $w \in \mathbb{C}_-$ mit der Polardarstellung $w = |w| \cdot e^{iy}$. Da $w \in \mathbb{C}_-$ ist, gilt $y \in (-\pi, \pi)$ und damit ist

$$z \;=\; \log|w| + iy \;\in A'$$

ein Logarithmus von w, also gilt $e^z = w$. Für den Nachweis von **(c)** sei $w_0 \in \mathbb{R}$ mit $w_0 \leq 0$. Wir wollen zeigen, dass Log bei w_0 nicht stetig ist, dazu nähern wir uns w_0 zunächst „von oben“ und anschließend „von unten“ und vergleichen die Grenzwerte. Betrachte also nun

$$w_0 + it \qquad \text{mit } t > 0$$

für $t \to 0$. Sei weiter $w_0 + it = |w_0 + it|(\cos y_t + i \sin y_t)$ die von t abhängige Polardarstellung. Für $t \to 0$ gilt $y_t \to \pi$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\lim_{t \to 0} \mathrm{Log}(w_0 + it) &= \lim_{t \to 0} \Big(|w_0 + it| \cdot \big(\cos(y_t) + i \sin(y_z) \big) \Big) \\
&= \lim_{t \to 0} \log|w_0 + it| + iy_t \;=\; \log|w_0| + \lim_{t \to 0} iy_t \\
&= \log|w_0| + i\pi
\end{aligned}$$

Nun nähern wir uns „von unten“, das heißt wir betrachten jetzt

$$w_0 - it \qquad \text{mit } t > 0$$

für $t \to 0$. Sei also nun $w_0 - it = |w_0 - it|(\cos y_t + i \sin y_t)$ die von t abhängige Polardarstellung. Für $t \to 0$ gilt $y_t \to -\pi$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} \mathrm{Log}(w_0 - it) &= \lim_{t\to 0} \Big(|w_0 - it| \cdot \big(\cos(y_t) + i\sin(y_z)\big)\Big) \\ &= \lim_{t\to 0} \log|w_0 + it| + iy_t \;=\; \log|w_0| + \lim_{t\to 0} iy_t \\ &= \log|w_0| - i\pi\end{aligned}$$

Offensichtlich stimmen die Grenzwerte in $w_0 \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ nicht überein, somit kann Log auf der negativen reellen Achse nicht stetig sein. □

Satz 9.5 $\mathrm{Log} : \mathbb{C}_- \to \mathbb{C}$ *ist stetig und holomorph mit der Ableitung* $\mathrm{Log}'(w) = \frac{1}{w}$

Beweis. Es sind zwei Teile zu zeigen:

(1) Log ist stetig in $w_0 \in \mathbb{C}_-$.

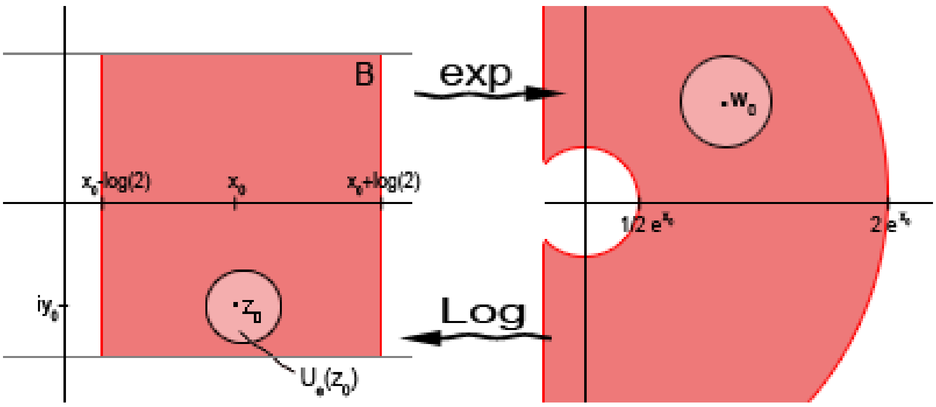
Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Setze $z_0 := \mathrm{Log}\, w_0 = x_0 + iy_0$ mit $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$. Nach der Definition von Log (Def. 9.3) ist $-\pi < y_0 < \pi$. Definiere weiter

$$B \;:=\; \big\{\, z \in \mathbb{C} \;\big|\; |\,\mathrm{Re}(z) - \mathrm{Re}(z_0)| \leq \log(2) \;\wedge\; |\,\mathrm{Im}(z)| \leq \pi \,\big\}$$

Dann ist B eine abgeschlossene und beschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$, also kompakt. Setze nun

$$K \;:=\; B \setminus \mathrm{U}_\varepsilon(z_0)$$

dann ist auch K als beschränkte und abgeschlossene Teilmenge von $\mathbb{C}$ kompakt. Wir betrachten nun das Bild der Menge B unter der komplexen Exponentialfunktion.



Das Bild von B unter exp ist der Kreisring mit innerem Radius $\frac{1}{2}e^{x_0}$ und äußerem Radius $2e^{x_0}$, also

$$\exp(B) \;=\; \Big\{\, z \in \mathbb{C} \;\Big|\; \frac{1}{2}e^{x_o} \leq |z| \leq 2e^{x_0} \,\Big\}$$

Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass $\mathrm{U}_\varepsilon(z_0)$ komplett in B enthalten ist, denn ε darf verkleinert werden. Betrachte die Funktion

$$f : K \to \mathbb{R}\,; \quad z \mapsto |e^z - e^{z_0}|$$

Da K kompakt und f stetig[1] ist, nimmt f auf K ihr Maximum an. Setze:

$$\rho := \max_{z \in K} f(z) \quad \text{und} \quad \delta := \min\{\frac{e^{x_0}}{2}, \rho\}$$

Dann ist die δ-Umgebung um w_0 eine echte Teilmenge des Kreisrings $\exp(B)$. Per Definition wird der Kreisring $\exp(B)$ unter Log in B abgebildet, das heißt $\operatorname{Log}\big(\exp(B)\big) \subset B$. Insbesondere gilt $z = \operatorname{Log}(w) \in \mathrm{U}_\varepsilon(z_0)$ für $w \in \mathrm{U}_\delta(w_0)$, denn wäre $z \in K$ dann gülte

$$\delta \leq \rho \leq f(z) = |e^z - e^{z_0}| = |w - w_0| < \delta$$

dies muss aber notwendig falsch sein.
Damit gilt $\operatorname{Log}(w) \in \mathrm{U}_\varepsilon(z_0)$ für alle $w \in \mathrm{U}_\delta(w_0)$, also ist Log stetig.

(2) Log ist in $w_0 \in \mathbb{C}_-$ komplex differenzierbar.

Sei $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}_-$ eine Folge komplexer Zahlen mit $w_n \neq w_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dem Grenzwert w_0. Setze $z_n := \operatorname{Log}(w_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Da Log nach (1) stetig also auch folgenstetig ist, gilt

$$\lim_{n\to\infty} z_n \quad = \quad z_0$$

Wegen

$$\begin{aligned} \frac{1}{w_0} &= \frac{1}{\exp(z_0)} \; \frac{1}{\exp'(z_0)} \\ &= \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^{z_n} - e^{z_0}}{z_n - z_0}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{z_n - z_0}{e^{z_n} - e^{z_0}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{Log}(w_n) - \operatorname{Log}(w_0)}{w_n - w_0} \end{aligned}$$

ist Log in $w_0 \in \mathbb{C}_-$ komplex differenzierbar mit der Ableitung $\frac{1}{w_0}$. □

Definition 9.6 *(Potenzen komplexer Zahlen)*
Seien $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ und $b \in \mathbb{C}$, dann definieren wir

$$a^b \quad := \quad \exp\big(b \cdot \operatorname{Log}(a)\big)$$

Anmerkung/Warnung Diese Definition hängt von der eigentlich willkürlichen Wahl von Arg (siehe Definition 3.1) ab, das heißt: Falls $b \notin \mathbb{Z}$ ist, gilt

$$\exp(b \cdot \operatorname{Log} a) \;\neq\; \exp\big(b \cdot [\operatorname{Log}(a(+2\pi i]\big)$$

Insbesondere gelten die von den reellen Potenzen bekannten Rechenregeln im Allgemeinen nicht.

Beispiel 9 *(Potenzen)*
Es gilt

$$(-1)^{\frac{1}{2}} \;=\; \exp\Big(\frac{1}{2} \cdot \operatorname{Log}(-1)\Big) \;=\; \exp\Big(\frac{1}{2} \cdot i\pi\Big) \;=\; i$$

Dieses Ergebnis haben wir wegen $i^2 = -1$ erwartet. Betrachte nun aber

$$\big((-1)\cdot(-1)\big)^{\frac{1}{2}} \;=\; 1^{\frac{1}{2}} \;=\; 1 \quad \neq \quad -1 \;=\; i^2 \;=\; i \cdot i \;=\; (-1)^{\frac{1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{1}{2}}$$

Das heißt im komplexen ist $(a_1 \cdot a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b$ im Allgemeinen falsch!

[1]Die Stetigkeit der Funktion f ist klar, da f eine Verknüpfung von stetigen Funktionen ist.

Bemerkung 9.7 *Seien $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathbb{C}$, dann gilt*

$$(a_1 \cdot a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b$$

Beweis. Da a_1, a_2 positive reelle Zahlen sind, verwende den reellen Logarithmus $\log$. Es gilt

$$\begin{aligned}(a_1 \cdot a_2)^b &= \exp\big(b \cdot \log(a_1 \cdot a_2)\big) = \exp\big(b \cdot [\log(a_1) + \log(a_2)]\big) \\ &= \exp\big(b \cdot \log(a_1)\big) \cdot \exp\big(b \cdot \log(a_2)\big) = a_1^b \cdot a_2^b\end{aligned}$$

□

Kapitel III

Komplexe Integrationstheorie

10 Kurvenintegrale

Definition 10.1 *(Kurve)*
Sei $\varphi : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Das Bild $\mathrm{Img}(\varphi)$ *von φ zusammen mit Informationen über $\varphi(a)$ und $\varphi(b)$ heißt eine Kurve. Dabei heißen $\varphi(a)$ der Anfangs- und $\varphi(b)$ der Endpunkt der Kurve und die Funktion φ heißt die Parametergleichung der Kurve. Es gibt Funktionen $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ derart, dass $\varphi(t) = \varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t)$ gilt. Wir sagen die Kurve ist …*

- *… stetig, falls φ stetig ist, d.h. falls φ_1, φ_2 stetig sind.*
- *… differenzierbar, falls φ komplex differenzierbar ist, d.h. falls φ_1, φ_2 reell differenzierbar sind.*
- *… glatt, falls φ stetig komplex differenzierbar ist, d.h. falls φ_1, φ_2 stetig differenzierbar sind.*
- *… geschlossen, falls $\varphi(a) = \varphi(b)$ gilt.*

Beispiel 10 *(Kurven)*

- *Seien $z_0, z_1 \in \mathbb{C}$ mit $z_0 \neq z_1$, dann ist*

  $$\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto z_0 + t \cdot (z_1 - z_0)$$

  die Parametergleichung der „Strecke zwischen z_0 und z_1“.

- *Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_+$, dann ist*

  $$\varphi : [0,1] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto r \cdot e^{2\pi i t} + z_0$$

  die Parametergleichung des „Kreises um z_0 mit Radius r“, der gegen den Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

- *Sei $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ die Parametergleichung der Kurve C, dann definiere die Kurve $-C$ durch*

  $$\psi : [-b, -a] \to \mathbb{C} \qquad t \mapsto \varphi(-t)$$

  Dann ist $-C$ dieselbe Punktmenge wie C, aber die Laufrichtung ist umgekehrt, d.h. insbesondere wurden Anfangs- und Endpunkt vertauscht.

Definition 10.2 *(Stückweise glatte Kurve)*
Seien $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $\ldots$, $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ abgeschlossene Intervalle mit $a_i = b_{i-1}$ für $i = 2, \ldots, n$. Für $i = 1, \ldots, n$ seien weiter $\varphi_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{C}$ Parametergleichungen zu Kurven C_i mit der Eigenschaft, dass $\varphi_{i-1}(b_{i-1}) = \varphi_i(a_i)$ für $i = 2, \ldots, n$ gilt, das heißt das der Anfangspunkt einer Kurve der Endpunkt der vorhergehenden Kurve ist.
Die Kurve $C := C_1 + \ldots + C_n$ ist gegeben durch die Parametergleichung

$$\begin{array}{rcl} \varphi : [a_1, b_n] & \to & C \subset \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \begin{cases} \varphi_1(t) & \text{falls } t \in [a_1, b_1] \\ \vdots & \\ \varphi_n(t) & \text{falls } t \in [a_n, b_n] \end{cases} \end{array}$$

Eine Kurve C heißt stückweise glatte Kurve, falls es glatte Kurven C_i für $i = 1, \ldots, n$ gibt, so dass $C = C_1 + \ldots + C_n$ gilt.

Sei C eine durch $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}$ gegebene glatte Kurve, dann zerteile das Intervall $[a, b]$ in n Teile mit

$$a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n = b$$

Approximiere nun die Kurve C durch den Polygonzug, der durch die Verbindungsstrecken $\overline{\varphi(a_i)\,\varphi(a_{i+1})}$ für $i = 0, \ldots, n-1$ gegeben ist. Die Länge des Polygonzuges ist

$$\sum_{i=1}^{n} |\,\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})| \;=\; \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\varphi(a_i) - \varphi(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \right| \cdot (a_i - a_{i-1})$$

Für $n \to \infty$ wird diese Summe zum (Riemann-) Integral[1]

$$\int_a^b |\,\dot{\varphi}(t)|\, dt$$

Dieser Umstand motiviert die nächste

Definition 10.3 *(Bogenlänge)*
Sei $C = C_1 + \ldots + C_n$ eine stückweise glatte Kurve, dann definieren wir die Bogenlänge von C als

$$\ell(C) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \ell(C_i) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} \int_{a_i}^{b_i} |\dot{\varphi}_i(t)|\, dt$$

Wobei die $\varphi_i : [a_i, b_i] \to C_i \subset \mathbb{C}$ die Parametergleichungen der C_i sind.

[1] Bekannt aus der reellen Analysis, daher hier kein Beweis.

Beispiel 11 *(Bogenlänge)*

- ***(Bogen-)Länge der Verbindungsstrecke***
  Seien $z, w \in \mathbb{C}$ zwei komplexe Zahlen mit $z \neq w$, dann ist die Verbindungsstrecke C zwischen z und w durch die Parametergleichung

$$\varphi : [0,1] \;\to\; C \subset \mathbb{C} \qquad t \;\mapsto\; z + t\,(w-z)$$

  gegeben. Die Bogenlänge ist also

$$\begin{aligned} \ell(C) \;&=\; \int_0^1 |\,\varphi'(t)|\,dt \;=\; \int_0^1 \left|\,\big(z + t\,(w-z)\big)'\right|\,dt \\ &=\; \int_0^1 |z-w|\,dt \;=\; |z-w| \end{aligned}$$

- ***k-fach durchlaufender Einheitskreis***
  Sei $k \in \mathbb{R}$, dann ist der k-fach durchlaufende Einheitskreis C durch die Parametergleichung

$$\varphi : [0,1] \;\to\; C \subset \mathbb{C} \qquad t \;\mapsto\; e^{2\pi i k t}$$

  gegeben und die Bogenlänge dieser Kurve ist

$$\begin{aligned} \ell(C) \;&=\; \int_0^1 |\,\varphi'(t)|\,dt \;=\; \int_0^1 \left|\left(e^{2\pi i k t}\right)'\right|\,dt \\ &=\; \int_0^1 \left|2ki\pi \cdot e^{2\pi i k t}\right|\,dt \;=\; 2k\pi \cdot \int_0^1 \underbrace{\left|e^{2\pi i k t}\right|}_{=1}\,dt \;=\; 2\pi k \end{aligned}$$

Anmerkung Die selbe Kurve kann mit verschiedenen Parametergleichungen beschrieben werden, denn sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Parametergleichung der Kurve $C \subset \mathbb{C}$ und sei $g : [c,d] \to [a,b]$ eine bijektive Abbildung mit $g(c) = a$ und $g(d) = b$, dann ist

$$\psi(t) \;:=\; \varphi\big(g(t)\big) \qquad \text{d.h. } \psi : [c,d] \to C \subset \mathbb{C}$$

eine Parametergleichung der selben Kurve C.

Beispiel 12 *Die Verbindungsstrecke zwischen z und w mit $z, w \in \mathbb{C}$ und $z \neq w$ kann, vom vorherigen Beispiel abweichend, durch*

$$\psi : [-10, 10] \;\to\; \mathbb{C} \qquad t \;\mapsto\; z + \frac{t+10}{20} \cdot (w-z)$$

beschrieben werden. Hierbei ist dann $g(t) = \frac{t+10}{20}$.
Analog kann auch der Einheitskreis zum Beispiel durch

$$\psi : [0, 2\pi] \;\to\; \mathbb{C} \qquad t \;\mapsto\; e^{it}$$

beschrieben werden.

Bemerkung *Die Bogenlänge einer glatten Kurve ist eine geometrische Größe, das heißt sie verändert sich unter stetig differenzierbaren Parametertransformationen nicht.*

Beweis. Übungsblatt 4, Aufgabe 1

Integrale von Kurven

Definition 10.4 *(Integral einer Kurve)*
Sei C eine durch die Parametergleichung

$$\varphi : [a, b] \to C \subseteq \mathbb{C} \qquad t \mapsto \varphi_1(t) + i\,\varphi_2(t)$$

mit $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegebene Kurve. Wir nennen die Kurve C integrierbar, falls φ_1 und φ_2 im Sinne der reellen Analysis integrierbar sind[2]. *Wir definieren das Integral der Kurve C durch*

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \;:=\; \int_a^b \varphi_1(t)\,dt + i \cdot \int_a^b \varphi_2(t)\,dt$$

Bemerkung 10.5 *Seien C, D zwei durch die Parametergleichungen $\varphi, \psi : [a, b] \to \mathbb{C}$ beschriebene integrierbare Kurven, dann gelten*

(a) ***Linearität***

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} : \quad \int_a^b \big(\varphi(t) + \lambda\psi(t)\big)\,dt \;=\; \int_a^b \varphi(t)\,dt + \lambda \cdot \int_a^b \psi(t)\,dt$$

(b)

$$\int_b^a \varphi(t)\,dt \;=\; -\int_a^b \varphi(t)\,dt$$

(c) ***Hauptsatz der Differential und Integralrechnung***
Sei $\Phi : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von φ, das heiß Φ ist differenzierbar mit $\Phi'(t) = \varphi(t)$ für alle $t \in [a, b]$, dann gilt

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \;=\; \Phi(b) - \Phi(a)$$

(d) ***Substitutionsregel***
Sei $g : [c, d] \to [a, b]$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_c^d \varphi\left(g(t)\right) \cdot g'(t)\,dt \;=\; \int_{g(c)}^{g(d)} \varphi(t)\,dt$$

(e) ***Partielle Integration***
Sei $\varphi(t)$ gegeben als $\varphi(t) = u(t)\cdot v'(t)$ mit stetig differenzierbaren Funktionen $u, v : [a, b] \to \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \;=\; \int_a^b u(t) \cdot v'(t)\,dt \;=\; u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(t)v(t)\,dt$$

Beweis. Übungsblatt 4, Aufgabe 1

[2]Wir nennen C integrierbar, falls φ_1, φ_2 zum Beispiel Riemann-Integrierbar sind.

Bemerkung 10.6 *Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Parametergleichung, dann gilt*

$$\left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \;\leq\; \int_a^b |\,\varphi(t)|\,dt$$

Beweis. Falls das Integral von φ über $[a,b]$ Null ist, ist nichts zu zeigen, andernfalls nimmt das Integral einen bestimmten Wert an, das heißt es gilt

$$\int_a^b \varphi(t)\,dt \;=\; I\cdot e^{i\theta} \in \mathbb{C}$$

mit $I \in \mathbb{R}_+$ und $\theta \in \mathbb{R}$. Mit diesen Bezeichnungen gilt

$$\begin{aligned} I \;&=\; e^{-i\theta}\cdot\int_a^b \varphi(t)\,dt \;=\; \int_a^b e^{-i\theta}\cdot\varphi(t)\,dt \\ &\overset{Def.}{=} \underbrace{\int_a^b \mathrm{Re}\Big(e^{-i\theta}\cdot\varphi(t)\Big)\,dt}_{\in\mathbb{R}} + i\cdot\underbrace{\int_a^b \mathrm{Im}\Big(e^{-i\theta}\cdot\varphi(t)\Big)\,dt}_{\in\mathbb{R}} \\ &\overset{I\in\mathbb{R}}{=} \int_a^b \mathrm{Re}\Big(e^{-i\theta}\cdot\varphi(t)\Big)\,dt \end{aligned}$$

Damit erhalten wir also

$$\begin{aligned} I \;=\; |I| \;&=\; \left|\int_a^b \varphi(t)\,dt\right| \;=\; \left|\int_a^b \mathrm{Re}\Big(e^{-i\theta}\cdot\varphi(t)\Big)\,dt\right| \\ &\leq\; \int_a^b \Big|\mathrm{Re}\Big(e^{-i\theta}\cdot\varphi(t)\Big)\Big|\,dt \;\leq\; \int_a^b \Big|e^{-i\theta}\cdot\varphi(t)\Big|\,dt \\ &=\; \int_a^b \underbrace{|e^{-i\theta}|}_{=1}\cdot|\,\varphi(t)|\,dt \;=\; \int_a^b |\,\varphi(t)|\,dt \end{aligned}$$

□

Kurvenintegrale

Definition 10.7 *(Kurvenintegral)*
Seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion.

- *Sei $C \subset D$ eine glatte Kurve mit Parametergleichung $\varphi : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$. Das Kurvenintegral der Funktion f entlang der Kurve C ist definiert als*

$$\int_C f(z)\,dz \;:=\; \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt$$

- *Sei $C = C_1 + \ldots + C_n \subset D$ eine <u>stückweise</u> glatte Kurve, dann definieren wir das Kurvenintegral entlang der Kurve C als*

$$\int_C f(z)\,dz \;:=\; \sum_{j=1}^{n}\int_{C_j} f(z)\,dz$$

Beispiel 13 *(Kurvenintegral)*
Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine ganze Zahl und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = z^n$. Weiter sei der Einheitskreis C gegeben durch die Parametergleichung

$$\varphi : [0,1] \ni t \;\mapsto\; e^{2\pi i t} \in \mathbb{C}$$

Wir berechnen das Kurvenintegral von f entlang des Einheitskreises C:

$$\begin{aligned}\int_C f(z)\,dz \;&=\; \int_C z^n\,dz \;=\; \int_0^1 (\varphi(t))^n\,\varphi'(t)\,dt \\ &=\; \int_0^1 e^{2\pi i n t}\cdot 2\pi i\cdot e^{2\pi i}\,dt \;=\; 2\pi i\cdot\int_0^1 e^{2\pi i(n+1)t}\,dt\end{aligned}$$

Gilt nun $n = -1$, so ist $\int_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i$. Ansonsten, also wenn $n \neq -1$ ist, gilt mit

$$F(t) \;:=\; \frac{1}{2\pi i(n+1)}\cdot e^{2\pi i(n+1)t}$$

und dem Hauptsatz der Differential und Integralrechnung $\int_C f(z)\,dz \;=\; 2\pi i\cdot[F(1) - F(0)] \;=\; 0$ Damit ergibt sich insgesamt

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

Bemerkung 10.8 *Seien $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Weiter sei $C \subset D$ eine stückweise glatte Kurve mit Parametergleichung $\varphi : [a,b] \to D \subset \mathbb{C}$. Es gelten*

(a) *Sei $g : [c,d] \to [a,b]$ streng monoton und stetig differenzierbar[3], dann gilt die Substitutionsregel:*

$$\int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt \;=\; \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(\psi(s)\big)\cdot\psi'(s)\,ds$$

mit $\psi(s) \;:=\; \varphi\left(g(s)\right)$. Insbesondere ist das Kurvenintegral unabhängig von der gewählten Parametergleichung der Kurve C.

(b) *Sei $-C$ die durch $\psi : [-b,-a] \to \mathbb{C}$ mit $t \mapsto \varphi(-t)$ gegebene Kurve, dann gilt*

$$\int_{-C} f(z)\,dz \;=\; -\int_C f(z)\,dz$$

Beweis. Teil (a) folgt aus der Substitutionsregel für Integrale von Kurven (Bemerkung 10.5) mit

$$\begin{aligned}\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(\psi(s)\big)\cdot\psi'(s)\,ds \;&=\; \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(\varphi(g(s))\big)\cdot\varphi'(g(s))\cdot g'(s)\,ds \\ &=\; \int_{g(g^{-1}(a))}^{g(g^{-1}(b))} f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt \\ &=\; \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt\end{aligned}$$

[3] Stetige, streng monotone Funktionen sind bijektiv!

wobei wir $t = g(s)$ substituiert haben. Für Teil (b) sei $g : [-b, -a] \ni t \mapsto -t \in [a, b]$, dann ist $\psi(s) = \varphi(g(s))$ und wir erhalten mit (a)

$$\begin{aligned}
\int_{-C} f(z)\,dz &= \int_{-b}^{-a} f\big(\psi(s)\big) \cdot \psi'(s)\,ds \\
&= \int_{-b}^{-a} f\big(\varphi(g(s))\big) \cdot \varphi'(g(s)) \cdot g'(s)\,ds \\
&\overset{(a)}{=} \int_{b}^{a} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt \\
&\overset{10.5\,(b)}{=} -\int_{a}^{b} f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 10.9 *Das Kurvenintegral ist linear, das heißt für eine offene Teilmenge $D \subseteq \mathbb{C}$ und stetige Funktionen $f, g : D \to \mathbb{C}$ sowie eine durch die Parametergleichung $\varphi : [a, b] \to D$ gegebene glatte Kurve $C \subset D$ und einem Skalar $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt:*

$$\int_C \Big(f(z) + \lambda g(z)\Big)\,dz \;=\; \int_C f(z)\,dz \;+\; \lambda \cdot \int_C g(z)\,dz$$

Beweis. Die Linearität des Kurvenintegrals folgt unmittelbar aus der entsprechenden Eigenschaft der Integrale von Kurven (Bemerkung 10.5 (a)). □

Bemerkung 10.10 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Weiter sei $C \subset D$ eine glatte Kurve. Dann gilt*

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \;\leq\; M \cdot \ell(C)$$

falls es ein $M \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass für alle $z \in D$ gilt $|f(z)| \leq M$.

Beweis. Sei C durch die Parametergleichung $\varphi : [a, b] \to D$ gegeben, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\int_C f(z)\,dz\right| &= \left|\int_a^b f\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)\,dt\right| \;\leq\; \int_a^b \big|f\big(\varphi(t)\big)\big| \cdot |\varphi'(t)|\,dt \\
&\leq \int_a^b M \cdot |\varphi'(t)|\,dt \;=\; M \cdot \int_a^b |\varphi'(t)|\,dt \;=\; M \cdot \ell(C)
\end{aligned}$$

□

Anmerkung Die Bemerkungen 10.8 bis 10.10 haben wir nur für glatte Kurven behauptet und gezeigt, sie gelten jedoch wörtlich auch für nur stückweise glatte Kurven.

Bemerkung 10.11 *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge, $\varphi : [a,b] \to D$ eine Parametergleichung einer glatten Kurve $C \subset D$ sowie $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt*

$$\big(f\big(\varphi(t)\big)\big)' \;=\; f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t)$$

Beweis. Wir folgern die Behauptung aus dem Satz 6.8 über die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen. Dazu schreibe $z = x + iy \in \mathbb{C}$ mit $x, y \in \mathbb{R}$. Wir erinnern uns an die Bijektion $\mathbb{R}^2 \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{C}$ und schreiben f als $f(z) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ mit $u, v : D \to \mathbb{R}$. Nach Satz 6.8 ist f total differenzierbar mit der Jacobimatrix

$$J_f(x,y) \;=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) & \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \\ -\frac{\partial}{\partial y} u(x,y) & \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) \end{pmatrix}$$

Weiter haben wir gezeigt, dass wir die Ableitung von f schreiben können als

$$f'(z) \;=\; \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) - i \cdot \frac{\partial}{\partial y} u(x,y) \tag{10.1}$$

Wegen der totalen Differenzierbarkeit ist auch $f \circ \varphi$ total differenzierbar. Schreibe φ als

$$\varphi(t) = \varphi_1(t) + i \cdot \varphi_2(t) \qquad \text{mit} \;\; \varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$$

Nach der Kettenregel ist die Jacobimatrix $J_{f\circ\varphi}$ von $f \circ \varphi$ im Punkt t_0 gegeben als

$$\begin{aligned} J_{f\circ\varphi}(t_0) \;&=\; J_f\big(\varphi(t_0)\big) \cdot J_\varphi(t_0) \\ &=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(t_0)) & \frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(t_0)) \\ -\frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(t_0)) & \frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(t_0)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varphi_1'(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \\ &=\; \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_1'(t_0) + \frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_2'(t_0) \\ -\frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_1'(t_0) + \frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit der Bijektion $\mathbb{R}^2 \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \mathbb{C}$ und der Gleichung (10.1) erhalten wir

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_1'(t_0) + \frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_2'(t_0) + i \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_2'(t_0) - \frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(t_0)) \cdot \varphi_1'(t_0)\right] \\ &\quad = \left[\frac{\partial}{\partial x} u(\varphi(t_0)) - i \cdot \frac{\partial}{\partial y} u(\varphi(t_0))\right] \cdot \left[\varphi_1'(t_0) + i \cdot \varphi_2'(t_0)\right] \\ &\quad \overset{(10.1)}{=} f'\big(\varphi(t)\big) \cdot \varphi'(t_0) \end{aligned}$$

□

Satz 10.12 *(Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Kurvenintegrale)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Weiter sei $C \subset D$ eine stückweise glatte Kurve, dann gilt:
Hat f eine Stammfunktion[4] $F : D \to \mathbb{C}$, so gilt

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; F(z_2) - F(z_1)$$

wobei z_1 der Anfangs- und z_2 der Endpunkt der Kurve C ist.

[4] F ist komplexe Stammfunktion von f, wenn F holomorph mit $F' = f$ ist.

Beweis. Da C stückweise glatt ist, gibt es glatte Teilkurven $C_1, \ldots, C_n$, so dass $C = C_1 + \ldots + C_n$ ist. Sei $\varphi_j : [a_j, b_j] \to C_j \subset \mathbb{C}$ eine Parametergleichung von C_j. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int_C f(z)\, dz &= \sum_{j=1}^{n} \int_{C_j} f(z)\, dz \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} f\big(\varphi_j(t)\big)\, \varphi_j'(t)\, dt \\
&\overset{(10.11)}{=} \sum_{j=1}^{n} \int_{a_j}^{b_j} \Big(F\big(\varphi_j(t)\big)\Big)'\, dt \\
&\overset{(10.5)}{=} \sum_{j=1}^{n} \Big(F\big(\varphi_j(b_j)\big) - F\big(\varphi_j(a_j)\big)\Big) \\
&\overset{b_j = a_{j+1}}{=} F\big(\varphi_n(b_n)\big) - F\big(\varphi_1(a_1)\big) \\
&= F\big(z_2\big) - F\big(z_1\big)
\end{aligned}$$

□

Folgerung 10.13 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Weiter sei $C \subset D$ eine geschlossene stückweise glatte Kurve, dann gilt:*

Hat f eine Stammfunktion, so hat das Integral über f entlang der Kurve C den Wert Null.

Beweis. Ist C eine geschlossene Kurve, so sind Anfangs- und Endpunkt von C identisch, damit folgt die Behauptung aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Kurvenintegrale. □

Beispiel 14 *Die Funktion $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$ haben wir in Beispiel 13 entlang des Einheitskreises integriert und folgendes Ergebnis errechnet:*

$$\int_C f(z)\, dz = \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } n = -1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Nun können wir ohne Rechnen bereits Aussagen treffen, denn der Fall $n \neq -1$ folgt mit der Stammfunktion $F(z) = z^{n+1}\frac{1}{n+1}$, die für $n > 0$ holomorph ist aus Folgerung 10.13. Ist $n = -1$ so hat $f(z) = \frac{1}{z}$ die Stammfunktion $\mathrm{Log}(z)$ für $z \in \mathbb{C}_-$, denn Log ist nur auf $\mathbb{C}_-$ nicht aber auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorph. Um Folgerung 10.13 anwenden zu können muss C vollständig in $D = \mathbb{C}_-$ liegen, es gibt jedoch keinen Kreis um den Nullpunkt, der diese Forderung erfüllt. Insbesondere tut dies auch der Einheitskreis nicht.

11 Der Cauchy'sche Integralsatz

Am Ende des letzten Abschnittes haben wir gesehen, dass das Integral über einer stetigen Funktion f entlang einer geschlossenen Kurve den Wert Null hat, falls f eine Stammfunktion hat und die Kurve innerhalb des Definitionsbereichs von f liegt. In diesem Abschnitt wollen wir diese Aussage umkehren, das heißt wir wollen Kriterien ausweisen, die uns zusichern, dass eine Funktion f, die diese Kriterien erfült, eine komplexe Stammfunktion besitzt.
Als erstes werden wir zeigen, dass das Integral über holomorphe Funktionen entlang eines „geschlossenen Dreieckswegs“ immer den Wert Null hat.

Definition 11.1 *(geschlossene Dreiecksfläche)*
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Die von z_1, z_2 und z_3 aufgespannte geschlossene Dreiecksfläche definieren wir durch

$$\Delta_{z_1,z_2,z_3} \quad := \quad \left\{ z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3 \,\middle|\, 0 \leq t_j \leq 1 \text{ für } j = 1,2,3 \ \wedge \ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \right\}$$

Anmerkung Die in Definition 11.1 angegebene Menge entspricht dem Dreieck D mit den Eckpunkten z_1, z_2 und z_3, denn:

Sei $z \in \mathbb{C}$ im innern von D gegeben. Setze w als den Schnittpunkt der Geraden durch z und z_1 mit der Strecke $\overline{z_2 z_3}$. Dann gelten

$$\begin{aligned} w &= z_2 + t(z_3 - z_2) \quad && \text{für } t \in [0,1] \qquad && (*) \\ z &= z_1 + s(w - z_1) \quad && \text{für } s \in [0,1] \qquad && (**) \end{aligned}$$

Setzen wir $(*)$ in $(**)$ ein, so können wir z schreiben als

$$z \ = \ z_1 + s\big(z_2 + t(z_3 - z_2) - z_1\big) \ = \ \underbrace{(1-s)}_{=:\,t_1} z_1 + \underbrace{s(t-1)}_{=:\,t_2} z_2 + \underbrace{ts}_{=:\,t_3} z_3$$

Hierbei gelten $0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1$ sowie

$$t_1 + t_2 + t_3 \ = \ (1-s) + s(1-t) + st \ = \ 1 - s + s - st + st \ = \ 1$$

Also liegt jedes z aus dem innern des Dreiecks D in Δ_{z_1,z_2,z_3}.
Sei umgekehrt nun $z \in \Delta_{z_1,z_2,z_3}$, dann können wir z schreiben als $z = t_1 z_1 + t_2 z_2 + t_3 z_3$ mit $0 \leq t_1, t_2, t_3 \leq 1$ und $t_1 + t_2 + t_3 = 1$.
Falls $z = z_1$ gilt, so liegt z auf dem Rand des Dreiecks D. Nimm also ohne Einschränkung an, dass $z \neq z_1$ ist. Mit dieser Annahme ist $t_1 \neq 1$ und wir dürfen die folgenden definitionen vornehmen:

$$s := 1 - t_1 \quad \text{ und } \quad t := \frac{t_3}{s} = \frac{t_3}{1 - t_1}$$

Mit den Gleichungen $(*)$ und $(**)$ liegt der Punkt z also auf der Verbindungsstrecke $\overline{z_1 w}$ wobei w selbst auf $\overline{z_2 z_3}$ liegt. Also liegt jeder Punkt $z \in \Delta_{z_1,z_2,z_3}$ im Inneren oder auf dem Rand des Dreiecks D.

Definition 11.2 *(geschlossener Dreiecksweg)*
Seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$. Der Rand der geschlossenen Dreiecksfläche Δ_{z_1,z_2,z_3} gibt den geschlossenen Dreiecksweg $C_{z_1,z_2,z_3} := \overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \overline{z_3 z_1}$ welcher durch die folgende Parametergleichung beschrieben wird

$$\begin{aligned} \varphi : [0,3] \;&\to\; C_{z_1,z_2,z_3} \subset \mathbb{C} \\ t \;&\mapsto\; \begin{cases} z_1 + t \cdot (z_2 - z_1) & 0 \le t \le 1 \\ z_2 + (t-1) \cdot (z_3 - z_2) & 1 \le t \le 2 \\ z_3 + (t-2) \cdot (z_1 - z_3) & 2 \le t \le 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Bemerkung 11.3 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Seien weiter $z_0, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ derart, dass $z_0 \in \Delta_{z_1,z_2,z_3} \subset D$. Gibt es weiterhin eine Konstante $M \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $z \in D \backslash \{z_0\}$ gilt*

$$\left| f'(z_0) - \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right| \;\le\; M$$

Dann gilt

$$\left| \int_{C_{z_1,z_2,z_3}} f(z)\, dz \right| \;<\; M \cdot \ell(C_{z_1,z_2,z_3})^2$$

Beweis. Nach Bemerkung 6.3 gibt es eine in z_0 stetige Funktion $\psi(z)$ mit

$$\psi(z) \;:=\; \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{falls } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{falls } z = z_0 \end{cases}$$

und

$$f(z) \;=\; f(z_0) + f'(z_0) \cdot (z - z_0) + \big(\psi(z) - f'(z_0)\big) \cdot (z - z_0)$$

Abkürzend schreiben wir $C := C_{z_1,z_2,z_3}$, dann gilt

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; \int_C f(z_0)\, dz + \int_C f'(z_0) \cdot (z - z_0)\, dz + \int_C \big(\psi(z) - f'(z_0)\big) \cdot (z - z_0)\, dz$$

Die konstantent Funktionen $f(z_0)$ und $f'(z_0)$ sowie die linieare Funktion $(z - z_0)$ haben komplexe Stammfunktionen, daher gilt nach Folgerung 10.13

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; 0 + 0 + \int_C \big(\psi(z) - f'(z_0)\big) \cdot (z - z_0)\, dz$$

Betrachte nun die folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)\, dz \right| \;&=\; \left| \int_C \big(\psi(z) - f'(z_0)\big) \cdot (z - z_0)\, dz \right| \\ &\le\; \int_C \big|\psi(z) - f'(z_0)\big| \cdot |z - z_0|\, dz \\ &<\; \int_C M \cdot |z - z_0|\, dz \;=\; M \cdot \int_C |z - z_0|\, dz \end{aligned}$$

Es ist klar, dass der Abstand zweier Punkte im Innern von Δ_{z_1,z_2,z_3} kürzer ist, als der Randweg. Die Punkte z und z_0 liegen im Innern von Δ_{z_1,z_2,z_3}, also gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z)\, dz \right| &< M \cdot \int_C |z - z_0|\, dz \\ &\le M \cdot \int_C \ell(C)\, dz \;=\; M \cdot \ell(C) \cdot \int_C 1\, dz \\ &= M \cdot \ell(C)^2 \end{aligned}$$

□

Satz 11.4 *(Cauchy'scher Integralsatz für Dreieckswege)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Weiter seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen, so dass die davon aufgespannte Dreiecksfläche $\Delta := \Delta_{z_1,z_2,z_3}$ komplett in D enthalten ist, dann gilt

$$\int_{C_{z_1,z_2,z_3}} f(z)\, dz \;=\; 0$$

Beweis. Zunächst betrachten wir Sonderfälle ausgearteter Dreiecke, damit sind Dreiecke gemeint, deren Flächeininhalt Null ist.

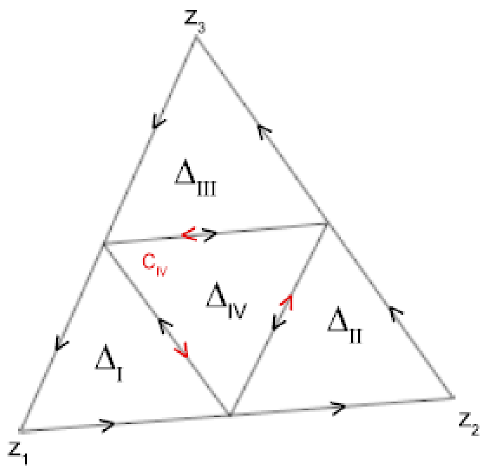
Sonderfall 1 ($z_1 = z_2$) Der Dreiecksweg setzt sich aus den Strecken $\overline{z_1 z_3}$ und $\overline{z_3 z_1}$ zusammen. Nach Bemerkung 10.8 hebt sich das Integral entlang der Strecke $\overline{z_1 z_3}$ gegen das Integral entlang $\overline{z_3 z_1}$ weg.

Sonderfall 2 ($z_1 \neq z_2 \wedge z_3$ liegt auf $\overline{z_1 z_2}$) Es gilt

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; \int_{\overline{z_1 z_2}} f(z)\, dz + \underbrace{\int_{\overline{z_2 z_3}} f(z)\, dz + \int_{\overline{z_3 z_1}} f(z)\, dz}_{= \int_{\overline{z_2 z_1}} f(z)\, dz}$$

Damit gilt die selbe Argumentation wie im Sonderfall 1.

Hauptfall Sei nun Δ ein echtes Dreieck mit positivem Flächeninhalt. Teile Δ durch Verbinden der Seitenmittelpunkte in vier Dreiecksflächen $\Delta_I, \ldots, \Delta_{IV}$ auf. Setze die Laufrichtung der Randwege $C_I, \ldots, C_{III}$ der äußeren Dreiecksflächen $\Delta_I, \ldots, \Delta_{III}$ derart, dass sie mit den Teilstücken des Randweges $C := C_{z_1,z_2,z_3}$ eine geschlossene Kurve bilden. Der Dreiecksweg C_{IV} zur inneren Dreiecksfläche Δ_{IV} werde dann entgegengesetzt durchlaufen. Mit dieser Konstruktion gilt



$$\begin{aligned} \ell(C) &= 2 \cdot \ell(C_I) \;=\; 2 \cdot \ell(C_{II}) \\ &= 2 \cdot \ell(C_{III}) \;=\; 2 \cdot \ell(C_{IV}) \end{aligned}$$

Wegen der entgegengesetzten Laufrichtung von C_{IV} und Bemerkung 10.8 (b) gilt

$$\int_C f(z)\, dz \;=\; \int_{C_I} f(z)\, dz + \int_{C_{II}} f(z)\, dz + \int_{C_{III}} f(z)\, dz + \int_{C_{IV}} f(z)\, dz$$

Wir wollen nun das Integral über f entlang des geschlossenen Dreieckswegs C nach oben abschätzen. Es gilt

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \;\leq\; \left|\int_{C_I} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{C_{II}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{C_{III}} f(z)\,dz\right| + \left|\int_{C_{IV}} f(z)\,dz\right| \tag{11.1}$$

Setze nun $C_0 := C$ und $\Delta_0 := \Delta$. Weiter bezeichne Δ_1 dasjenige der $\Delta_I, \ldots, \Delta_{IV}$ mit

$$\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \;=\; \max_{i\in\{I,II,III,IV\}} \left|\int_{C_i} f(z)\,dz\right|$$

Wobei C_1 den Randweg um Δ_1 bezeichne. Mit diesen Bezeichnungen folgt aus der Gleichung (11.1)

$$\left|\int_{C_0} f(z)\,dz\right| \;\leq\; 4\cdot\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \tag{11.2}$$

Konstruiere nun wie oben vier Teildreiecke in Δ_1 und bezeichne mit Δ_2 dasjenige der so konstruierten Dreiecksflächen $\Delta_{1,I}, \ldots, \Delta_{1,IV}$ für das gilt

$$\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right| \;=\; \max_{i\in\{I,II,III,IV\}} \left|\int_{C_{1,i}} f(z)\,dz\right|$$

Genau wie oben erhalten wir mit dieser Konstruktion aus der Gleichung (11.2)

$$\left|\int_{C_0} f(z)\,dz\right| \;\leq\; 4\cdot\left|\int_{C_1} f(z)\,dz\right| \;\leq\; 4^2\cdot\left|\int_{C_2} f(z)\,dz\right|$$

Allgemein erhalten wir nach n solchen Konstruktionsschritten geschachtelte Dreiecksflächen

$$\Delta_0 \supset \Delta_1 \supset \ldots \supset \Delta_n$$

und für das Integral die Abschätzung

$$\left|\int_{C_0} f(z)\,dz\right| \;\leq\; 4^n\cdot\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \tag{11.3}$$

Da $\mathbb{C}$ vollständig ist[5], ist der Schnitt über alle Δ_n nicht leer. Sei also

$$z_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$$

Sei weiter ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Nach Bemerkung 6.3 gibt es eine in z_0 stetige Funktion

$$\varphi(z) \;:=\; \begin{cases} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} & \text{falls } z \neq z_0 \\ f'(z_0) & \text{falls } z = z_0 \end{cases}$$

Daher finden wir ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft, dass für alle $z \in \mathrm{U}_\delta(z_0)$ gilt

$$\left|f'(z_0) - \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right| \;<\; \varepsilon$$

[5] Die Vollständikeit von $\mathbb{C}$ folgt aus der Vollständigkeit von $\mathbb{R}$.

Es gibt einen Index $n \in \mathbb{N}$ derart, dass Δ_n **vollständig** in $\mathrm{U}_\delta(z_0)$ enthalten ist. Dann liegt insbesondere der zugehörige Dreiecksweg C_n vollständig in $\mathrm{U}_\delta(z_0)$. Wende nun Bemerkung 11.3 an mit $M := \varepsilon$ und erhalte

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \;<\; \varepsilon \cdot \ell(C_n)^2 \;=\; \frac{1}{4^n} \cdot \varepsilon \cdot \ell(C_0)^2$$

Betrachte nun wieder Gleichung (11.3) und erhalte

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_0} f(z)\,dz\right| \;&\leq\; 4^n \cdot \left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \\ &<\; 4^n \frac{1}{4^n} \cdot \varepsilon \cdot \ell(C_0)^2 \;=\; \varepsilon \cdot \ell(C_0)^2\end{aligned}$$

Da ε beliebig und $\ell(C_0)$ eine Konstante ist, folgt was zu zeigen war. □

Definition 11.5 *(Sterngebiet)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann heißt D ein Sterngebiet, falls es ein $z_0 \in D$ gibt, so dass die Verbindungsstrecken von z_0 zu jedem beliebigen $z \in D$ vollständig in D enthalten ist, also

$$\overline{z_0 z} \subset D \qquad \forall\, z \in D$$

Wir nennen z_0 dann einen Sternmittelpunkt von D

Beispiel 15 *(Sterngebiete)*

- *Die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ und alle offenen Kreisschreiben sind Sterngebiete wo jeder Punkt ein Sternmittelpunkt ist.*
- *Die entlang der negativen reellen Achse geschlitzte komplexe Ebene $\mathbb{C}_-$ ist ein Sterngebiet und jeder Punkt der positiven reellen Achse ist ein Sternmittelpunkt.*

Anmerkung Sterngebiete sind Gebiete, also insbesondere zusammenhängend.

Sei D ein Sterngebiet mit Sternmittelpunkt z_0, dann können je zwei Punkte $z, w \in D$ durch den Polygonzug $\overline{zz_0} + \overline{z_0 w}$ verbunden werden. Dieser Polygonzug ist per Definition vollständig in D enthalten, also ist D Wegzusammenhängend. Nach Aufgabe 4 vom vierten Übungsblatt sind Wegzusammenhängende Mengen zusammenhängend.

Notation 2 *Seien $z, w \in \mathbb{C}$ komplexe Zahlen und f eine auf $\overline{zw}$ integrierbare Funktion, dann schreiben wir*

$$\int_z^w f(\zeta)\,d\zeta \;:=\; \int_{\overline{zw}} f(\zeta)\,d\zeta$$

Wir können das reelle Riemann-Integral als einen Spezielfall dieser Notation auffassen.

Satz 11.6 *(Cauchy'scher Integralsatz für Sterngebiete)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gelten

(a) *f hat auf D eine Stammfunktion F*
d.h. $F : D \to \mathbb{C}$ ist holomorph und $F'(z) = f(z)$ für alle $z \in D$.

(b) *Ist $C \subset D$ eine stückweise glatte Kurve mit Anfangspunkt z_1 und Endpunkt z_2, dann gilt*

$$\int_C f(z)\,dz \;=\; F(z_2) - F(z_1)$$

Beweis. Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (10.12) folgt Teil (b) unmittelbar aus (a). Es genügt also die Existenz einer Stammfunktion zu zeigen. Wir definieren

$$F(z) \;:=\; \int_{z_0}^{z} f(w)\,dw$$

wobei $z_0 \in D$ ein Sternmittelpunkt von D sei. Die so definierte Funktion $F : D \to \mathbb{C}$ ist holomorph in jedem Punkt $z \in D$ mit $F'(z) = f(z)$, denn sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, dann gibt es, wegen der Stetigkeit von f, ein $\delta > 0$ derart, dass

$$\bigl|f(z) - f(w)\bigr| \;<\; \varepsilon \qquad \forall\, w \in \mathrm{U}_\delta(z)$$

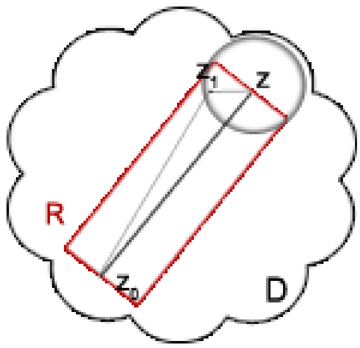
Wähle zu jedem Punkt ζ auf der Strecke $\overline{z_0 z}$ eine offene Umgebung U_ζ, die noch komplett in D enthalten ist. Es gilt

$$\overline{z_0 z} \;\subset\; \bigcup_{\zeta \in \overline{z_0 z}} U_\zeta$$

ist eine offene Überdeckung der Strecke zwischen z_0 und z. Diese Strecke ist kompakt und somit reichen nach dem Satz von Heine-Borel endlich viele Mengen U_{ζ_i}.Bezeichne nun die Schnittpunkte je zweier Kreislinien um die U_{ζ_i} mit c_k und wähle $b \in \mathbb{R}_+$ so dass

$$b < \min_k \Bigl\{\, |c_k - \zeta_i| \,\Big|\, \overline{z_0 z} \subset \bigcup_i U_{\zeta_i} \Bigr\}$$

Dann gilt: Das Rechteck R, welches parallel zu $\overline{z_0 z}$ mit Breite $2b$ und der Verbindungsstrecke $\overline{z_0 z}$ „in der Mitte“ verläuft, ist noch vollständig in D enthalten (siehe Zeichnung). Wähle weiter ein $z_1 \in \mathrm{U}_\delta(z) \cap R$ mit $z \neq z_1 \neq z_0$ und betrachte



$$\Delta_{z_0,z_1,z} \;\subset\; R \;\subset\; D$$

Mit dem Cauchy'schen Integralsatz für Dreieckswege (11.4) und dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für Kurvenintegrale (10.12) gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{C_{z_0,z_1,z}} f(w)\,dw \\ &= \int_{z_0}^{z_1} f(w)\,dw + \int_{z_1}^{z} f(w)\,dw + \int_{z}^{z_0} f(w)\,dw \\ &= F(z_1) - F(z) + \int_{z_1}^{z} f(w)\,dw \end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir die Identität

$$F(z_1) - F(z) \;=\; \int_{z}^{z_1} f(w)\,dw$$

Betrachte nun den Differenzenquotienten von F, es gilt

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z_1)-F(z)}{z_1-z} - f(z)\right| &= \left|\frac{1}{z_1-z}\cdot\int_z^{z_1} f(w)\,dw - f(z)\right| \\
&= \left|\frac{1}{z_1-z}\int_z^{z_1} f(w)\,dw - \frac{1}{z_1-z}\int_z^{z_1} 1\cdot f(z)\,dw\right| \\
&= \frac{1}{|z_1-z|}\cdot\left|\int_z^{z_1} \big(f(w)-f(z)\big)\,dw\right| \\
&\leq \frac{1}{|z_1-z|}\cdot\int_z^{z_1} \underbrace{|f(w)-f(z)|}_{<\varepsilon}\,dw \\
&< \frac{1}{|z_1-z|}\cdot\int_z^{z_1} \varepsilon\;dw \;=\; \frac{|z-z_1|}{|z_1-z|}\cdot\varepsilon \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Da ε beliebig war folgt die Behauptung. □

Definition 11.7 *(Elementargebiet)*
Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt Elementargebiet, falls jede auf D holomorphe Funktion auf D eine Stammfunktion hat.

Beispiel 16 *(Elementargebiete)*

- *Nach dem soeben bewiesenen Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete, sind Sterngebiete Elementargebiete.*
- $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ *ist kein Elementargebiet, denn $f(z) = \frac{1}{z}$ ist auf dieser Menge holomorph, aber besitzt keine Stammfunktion.*

Warnung Der Begriff des Elementargebiets ist kein Standart in der Lehrbuchliteratur.

Satz 11.8 *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ zwei Elementargebiete deren Schnitt nicht leer und zusammenhängend ist, dann ist auch die Vereinigung $D := D_1 \cup D_2$ ein Elementargebiet.*

Beweis. Sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Da sowohl D_1 als auch D_2 Elementargebiete sind, gibt es zwei Stammfunktionen

$$F_1 : D_1 \to \mathbb{C} \qquad \text{und} \qquad F_2 : D_2 \to \mathbb{C}$$

mit $F_j'(z) = f(z)$ für alle $z \in D_j$ für $j = 1, 2$. Definiere nun

$$\begin{aligned} g : D_1 \cap D_2 &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto F_1(z) - F_2(z) \end{aligned}$$

Die Funktion g ist offensichtlich holomorph und es gilt für alle $z \in D_1 \cap D_2$

$$g'(z) \;=\; F_1'(z) - F_2'(z) \;=\; f(z) - f(z) \;=\; 0$$

Da der Durchschnitt nach Voraussetzung zusammenhängend ist, ist $g(z) = c$ eine konstante Funktion. Setze nun

$$F(z) \;:=\; \begin{cases} F_1(z) & \text{für } z \in D_1 \\ F_2(z) + c & \text{für } z \in D_2 \end{cases}$$

dann ist F eine wohldefinierte holomorphe Funktion mit der Eigenschaft $F' = f$ auf $D_1 \cup D_2$. □

12 Die Cauchy'sche Integralformel

In diesem Abschnitt wollen wir die Cauchy'sche Integralformel aus dem Cauchy'schen Integralsatz herleiten. Der Satz besagt, dass für $z_0 \in \mathbb{C}$ die Werte einer holomorphen Funktion auf $\mathrm{U}_r(z_0)$ bereits durch die Werte der Funktion auf dem Rand (also entlang der Kreislinie um $\mathrm{U}_r(z_0)$) bestimmt werden. Der Cauchy'sche Integralsatz ist (nicht nur) in der Funktionentheorie von großer Bedeutung, da er wichtige und verblüffende Konsequenzen hat:

- Es folgt, dass jede holomorphe Funktion unendlich oft komplex differenzierbar ist.
- Es folgen wichtige Sätze, wie der Hauptsatz der Algebra oder die Taylor-Entwicklung von Potenzreihen.

Um den Beweis der Cauchy'schen Integralformel etwas zu entzerren betrachten wir den wichtigsten Konstruktionsschritt in einer eigenen

Bemerkung 12.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $z_0 \in D$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass es eine abgeschlossene Umgebung $\overline{\mathrm{U}_{r_0}(z_0)}$ gibt, die noch vollständig in D enthalten ist. Weiter sei $z_1 \in \mathrm{U}_{r_0}(z_0)$ ein Punkt mit der Eigenschaft, dass es eine abgeschlossene Umgebung $\overline{\mathrm{U}_{r_1}(z_1)}$ die wiederum vollständig in $\overline{\mathrm{U}_{r_0}(z_0)}$ enthalten ist. Es gilt: Ist die Funktion $f : D \backslash \{z_1\} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann ist*

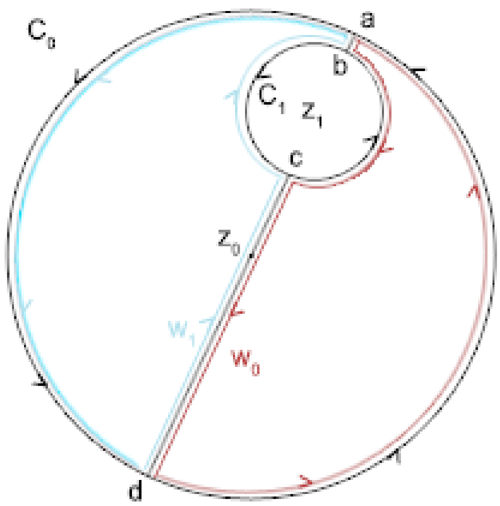
$$\int_{C_0} f(z)\,dz \;=\; \int_{c_1} f(z)\,dz$$

wobei C_j die Kreislinie um z_j mit Radius r_j ist, also die Kurve, welche durch

$$\varphi_j : [0,1] \ni t \mapsto z_j + r_j e^{2\pi i t} \in C_j \subset D$$

gegeben ist.

Beweis. Sei w_0 der stückweise glatte, geschlossene Weg, der bei a beginnt, dann der Strecke $\overline{ab}$ nach b folgt, entlang dem rechten Halbkreis von C_1 nach c verläuft, dann der Strecke $\overline{cd}$ nach d folgt und entlang des rechten Halbkreises von C_0 zurück nach a verläuft.
Bilde den Weg w_1 analog mit den linken Halbkreisen von C_0 und C_1 so dass die Laufrichtung von w_1 auf dem Kreis C_0 der Laufrichtung von w_0 entspricht.
Die offenen Flächen W_0 und W_1, die so gegeben sind, dass der Weg w_0 bzw. w_1 noch gerade in W_0 bzw. W_1 enthalten ist, sind Elementargebiete, denn:



Konstruiere auf z_1 eine auf der Strecke $\overline{ad}$ senkrecht stehende Gerade und Teile die Fläche entlang dieser Strecke in zwei sich zusammenhängend überlappende Teilflächen. Diese Teilflächen sind Sterngebiete. Nach dieser Konstruktion liegen die geschlossenen Wege w_0 und w_1 vollständig in einem Elementargebiet, also gilt

$$\int_{w_0} f(z)\,dz \;=\; 0 \;=\; \int_{w_1} f(z)\,dz$$

Schauen wir uns die Integrationswege w_0 und w_1 genauer an, erhalten wir

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{w_0} f(z)\,dz + \int_{w_1} f(z)\,dz \\
&= \int_{C_0} f(z)\,dz + \int_a^b f(z)\,dz + \int_c^d f(z)\,dz + \int_{-C_1} f(z)\,dz + \int_b^a f(z)\,dz + \int_d^c f(z)\,dz \\
&= \int_{C_0} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_a^b f(z)\,dz - \int_a^b f(z)\,dz + \int_c^d f(z)\,dz - \int_c^d f(z)\,dz \\
&= \int_{C_0} f(z)\,dz - \int_{C_1} f(z)\,dz
\end{aligned}$$

Und dies war die Behauptung! □

Satz 12.2 *(Die Cauchy'sche Integralformel)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in D$ derart, dass $\overline{\mathrm{U}_{r_0}(z_0)}$ vollständig in D liegt. Weiter sei $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt für alle $z_1 \in \mathrm{U}_{r_0}(z_0)$

$$f(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz$$

wobei C_0 die Kreislinie um z_0 mit Radius r_0 bezeichne.

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f holomorph ist, ist f (insbesondere) in z_1 stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$ derart, dass für alle $z \in \mathrm{U}_\delta(z_1)$ gilt

$$\left|f(z) - f(z_1)\right| < \varepsilon$$

Ohne Einschränkung liege $\mathrm{U}_\delta(z_1)$ vollständig in $\mathrm{U}_{r_0}(z_0)$, denn δ darf verkleinert werden. Wähle $0 < r_1 < \delta$, dann definiert

$$\begin{aligned}
\varphi : [0,1] &\to C_1 \subset \mathbb{C} \\
t &\mapsto z_1 + r_1 \cdot e^{2\pi i t}
\end{aligned}$$

eine Kurve C_1, die vollständig in $U_\delta(z_1)$ liegt. Nach Bemerkung 12.1 gilt dann

$$\begin{aligned}
\int_{C_0} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz &= \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz \\
&= \int_{C_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}\,dz + \int_{C_1} \frac{f(z_1)}{z - z_1}\,dz \\
&= \int_{C_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}\,dz + f(z_1) \cdot \int_{C_1} \frac{1}{z - z_1}\,dz \\
&\overset{(*)}{=} \int_{C_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}\,dz + f(z_1) \cdot \int_K \frac{1}{\zeta}\,d\zeta \\
&= \int_{C_1} \frac{f(z) - f(z_1)}{z - z_1}\,dz + f(z_1) \cdot 2\pi i
\end{aligned} \tag{12.1}$$

Substituiere bei $(*)$ $\zeta := z - z_1$, dann verschiebt sich der Integrationsweg auf den Kreis um 0 mit Radius r_1, den wir mit K bezeichnen. Wir wollen nun zeigen, dass der erste Summand in der Gleichung

(12.1) beliebig klein wird, dazu schätzen wir ihn Betragsmäßig nach oben ab:

$$\begin{aligned}\left|\int_{C_1} \frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}\,dz\right| &\leq \int_{C_1} \left|\frac{f(z)-f(z_1)}{z-z_1}\right| dz \\ &< \int_{C_1} \frac{\varepsilon}{|z-z_1|}\,dz \\ &= \frac{\varepsilon}{r_1}\cdot\int_{C_1} 1\,dz \;=\; 2\pi i\,\varepsilon\end{aligned}$$

Da ε beliebig war folgt die Cauchy'sche Integralformel aus Gleichung (12.1). □

Bemerkung 12.3 *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f : D \to \mathbb{C}$ stetig und $C \subset D$ eine stückweise glatte Kurve. Dann Setze für $\zeta \in D\backslash C$ und $n \in \mathbb{N}$*

$$F_n(\zeta) \;:=\; \int_C \frac{f(z)}{(z-\zeta)^n}\,dz$$

Dann ist F_n holomorph auf $D\backslash C$ mit der Ableitung $F_n' = n \cdot F_{n+1}$.

Beweis. Sei $z_0 \in D\backslash C$. Nach Aufgabe 2.c auf dem fünften Übungsblatt ist die Kurve C kompakt, also ist $D\backslash C$ offen. Daher gibt es ein $r > 0$, so dass

$$\mathrm{U}_r(z_0) \;\subseteq\; D\backslash C$$

Setze $s := \frac{r}{2}$ und wähle $z_1 \in \mathrm{U}_s(z_0)$, dann gilt für alle z die auf der Kurve C liegen

$$\begin{aligned}|z_1 - z| &= |z_1 - z_0 + z_0 - z| \;\geq\; \big|\,|z_1 - z_0| - |z - z_0|\,\big| \\ &\geq |s - r| \;=\; r - \frac{r}{2} \;=\; \frac{r}{2}\end{aligned}$$

Betrachte nun den Abstand des Differenzenquotienten von F_n und der vermuteten Ableitung:

$$\frac{F_n(z_1)-F_n(z_0)}{z_1-z_0} - n\cdot F_{n+1}(z_0) \;=\; \int_C \frac{f(z)}{z_1-z_0}\cdot\left(\frac{1}{(z-z_1)^n} - \frac{1}{(z-z_0)^n}\right) dz \;-\; nF_{n+1}(z_0)$$

Wir benutzen die folgende Teleskopsumme

$$\frac{1}{a^n} - \frac{1}{b^n} \;=\; \frac{1}{a^n b^n}\cdot\left(\sum_{j=0}^{n-1} a^j\, b^{n-j-1}\right)\cdot(b-a) \tag{12.2}$$

Mit $a := z - z_1$ und $b := z - z_0$ gilt $a - b = z_0 - z_1$. Setze nun die Gleichung (12.2) in die obige Rechnung ein, dann gilt

$$\begin{aligned}&\frac{F_n(z_1)-F_n(z_0)}{z_1-z_0} - n\cdot F_{n+1}(z_0) \\ &\quad= \int_C f(z)\frac{f(z)}{(z-z_1)^n(z-z_0)^n}\cdot\left(\sum_{j=0}^{n-1}(z-z_1)^j\,(z-z_0)^{n-j-1}\right) dz \\ &\qquad\qquad - n\cdot\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz \\ &\quad= \int_C f(z)\frac{f(z)}{(z-z_0)^n}\cdot\underbrace{\left[\frac{1}{(z-z_1)^n}\cdot\sum_{j=0}^{n-1}(z-z_1)^j\,(z-z_0)^{n-j-1} - \frac{n}{z-z_0}\right]}_{=:\,h(z,z_1)} dz\end{aligned}$$

Für die im letzten Schritt definierte Hilfsfunktion $h : C \times \mathrm{U}_s(z_0) \;\to\; \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} h(z,z_0) &= \frac{1}{(z-z_0)^n} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} (z-z_0)^j\,(z-z_0)^{n-j-1} \;-\; \frac{n}{z-z_0} \\ &= \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{z-z_0} \right) - n \cdot \frac{1}{z-z_0} \;=\; 0 \end{aligned}$$

für alle $z \in C$. Weiter ist das kartesische Produkt $C \times \overline{\mathrm{U}_s(z_0)} \subset \mathbb{R}^4$ kompakt also ist h sogar gleichmäßig stetig und für alle $\varepsilon > 0$ gibt es insbesondere ein $\delta > 0$ so dass gilt

$$\forall\, z_1 \in \overline{\mathrm{U}_s(z_0)} \quad \forall\, z \in C \qquad \Big(|z_1 - z_0| < \delta \Rightarrow |h(z,z_1) - h(z,z_0)| < \varepsilon \Big)$$

Da $|f|$ stetig ist, und die Kurve C kompakt ist, nimmt $|f|$ auf C ihr Maximum an, sei nun dieses Maximum mit M bezeichnet. Betrachte

$$\begin{aligned} \left| \frac{F_n(z_1) - F_n(z_0)}{z_1 - z_0} - n \cdot F_{n+1}(z_0) \right| &= \left| \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \cdot h(z,z_1)\, dz \right| \\ &\le \int_C \left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \right| \cdot \big| h(z,z_1) \big|\, dz \\ &\le \int_C \frac{M}{|z-z_0|^n} \cdot \big| h(z,z_1) \big|\, dz \\ &\le \frac{M}{r^n} \cdot \int_C \big| h(z,z_1) \big|\, dz \\ &\le \frac{M}{|z-z_0|} \cdot \ell(C) \cdot \varepsilon \qquad\qquad \forall\; z_1 \in \mathrm{U}_\delta(z_0) \end{aligned}$$

Damit gilt also

$$\frac{F_n(z_1) - F_n(z_0)}{z_1 - z_0} \quad \overset{z_1 \to z_0}{\longrightarrow} \quad n \cdot F_{n+1}(z_0)$$

□

Satz 12.4 *(Verallgemeinerte Cauchy'sche Integralformel)*
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f.D \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien weiter $z_0 \in D$ und $r \in \mathbb{R}_+$, so dass die abgeschlossene r Umgebung $\overline{\mathrm{U}_r(z_0)}$ um z_0 noch komplett in D enthaten ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $z_1 \in \mathrm{U}_r(z_0)$

$$f^{(n)}(z_1) \;=\; n! \cdot \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}}\, dz$$

wobei C die positivdurchlaufene Kreislinie um z_0 mit Radius r ist.

Beweis. Induktiv über n:
Der Induktionsanfang für $n = 0$ ist genau die Cauchy'sche Integralformel (Satz 12.2):

$$2\pi i\, f(z_1) \;=\; F_1(z_1) \qquad \text{mit } F_1(z_1) \;:=\; \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)}\, dz$$

Nach Bemerkung 12.3 ist F_1 holomorph und es gilt

$$2\pi i\, f'(z_1) \;=\; 1 \cdot F_2(z_1) \qquad \text{mit } F_2(z_1) \;:=\; \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^2}\, dz$$

Erneut folgt mit Bemerkung 12.3, dass auch F_2 holomorph ist und es gilt

$$2\pi i\, f''(z_1) \;=\; 1 \cdot 2 \cdot F_3(z_1) \qquad \text{mit } F_3(z_1) \;:=\; \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^3}\, dz$$

Im allgemeinen n-ten Schritt gilt also

$$2\pi i\, f^{(n)}(z_1) \;=\; n! \cdot F_{n+1}(z_1) \qquad \text{mit } F_{n+1}(z_1) \;:=\; \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}}\, dz$$

□

Alternativer Beweis Wir leiten beide Seiten n-mal nach z_1 ab, und erhalten

$$\begin{aligned} 2\pi i f^{(n)}(z_1) \;&=\; \frac{\partial^n}{\partial z_1^n} 2\pi i f(z_1) \;=\; \frac{\partial^n}{\partial z_1^n} \int_C \frac{f(z)}{z-z_1}\, dz \\ &\overset{!}{=}\; \int_C \frac{\partial^n}{\partial z_1^n} \frac{f(z)}{z-z_1}\, dz \;=\; n! \cdot \int_C \frac{f(z)}{(z-z_1)^{n+1}}\, dz \end{aligned}$$

Das Gleichheitszeichen unter dem Rufzeichen „!“ ist korrekt, muss aber noch begründet werden.

Notation 3 *Für die Kreislinie um $z_0 \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$, gegeben durch die Parametergleichung $\varphi : [0,1] \ni t \mapsto z_0 + re^{2\pi i t} \in \mathbb{C}$, schreiben wir im Folgenden $C_r(z_0)$.*

Beispiel 17 *Sei $r \neq 0$, dann gilt*

$$\int_{C_r(z_0)} \frac{1}{z}\, dz \;=\; \begin{cases} 2\pi i & \text{falls } |z_1| < r \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Im Fall $|z_1| < r$ liegt der Nullpunkt innerhalb der offenen Kreisscheibe um z_0 mit Radius r, also ist $\frac{1}{z}$ nicht auf ganz $\mathrm{U}_r(z_0)$ holomorph, und die Gleichung gilt nach der Cauchy'schen Integralformel (Satz 12.2) mit $f(z) = 1$:

$$f(0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_r(z_0)} \frac{1}{z-0}\, dz$$

Im Falle $|z_1| \geq r$ hat $\frac{1}{z}$ eine Stammfunktion nach dem Cauchy'schen Integralsatz 11.6 und die Formel folgt aus dem Hauotsatz der Differential und Integralrechnung für Kurvenintegrale.

Beispiel 18 *(Anwendungen der Cauchy'schen Integralformeln)*

$$\int_{C_2(-1)} \frac{\cos(z)}{z}\, dz \;=\; 2\pi i \cdot \cos(0) \;=\; 2\pi i$$

$$\int_{C_2(-1)} \frac{\sin(z)}{z}\, dz \;=\; 2\pi i \cdot \sin(0) \;=\; 0$$

$$\int_{C_2(-1)} \frac{\cos(z)}{z^2}\, dz \;=\; 2\pi i \cdot \frac{1}{1!} \cdot \cos'(0) \;=\; 2\pi i \sin(0) \;=\; 0$$

$$\int_{C_2(-1)} \frac{\cos(z)}{z^3}\, dz \;=\; 2\pi i \cdot \frac{1}{2!} \cdot \cos''(0) \;=\; -\pi i \cos(0) \;=\; -\pi i$$

$$\int_{C_2(-1)} \frac{1}{z^n}\, dz \;=\; 2\pi i \cdot \frac{1}{(n-1)!} \cdot \mathbb{1}^{(n-1)}(z) \;=\; \begin{cases} 0 & \text{falls } n > 1 \\ 2\pi i & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$

13 Folgerungen aus der Cauchy'schen Integralformel

Bemerkung 13.1 *(Cauchy'sche Ungleichungen)*
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Seien weiter $z_0 \in D$ und $r \in \mathbb{R}_+$, so dass die abgeschlossene r Umgebung $\overline{\mathrm{U}_r(z_0)}$ um z_0 noch komplett in D enthaten ist. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \;\leq\; M \cdot n! \cdot \frac{1}{r^n}$$

wobei $|f(z)| < M$ für $z \in C_r(z_0)$ gelte.

Beweis. Sei $0 < \rho < r$, dann gilt mit der verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel 12.4

$$\begin{aligned}
\left|f^{(n)}(z_0)\right| &= \left|\frac{n!}{2\pi i} \cdot \int_{C_\rho(z_0)} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, dz\right| \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \int_{C_\rho(z_0)} \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^{n+1}}\, dz \\
&\leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \int_{C_\rho(z_0)} \frac{M}{|\rho|^{n+1}}\, dz \\
&= \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot \ell\left(C_\rho(z_0)\right) \;=\; \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{\rho^{n+1}} \cdot 2\pi\rho \;=\; \frac{n! \cdot M}{\rho^n}
\end{aligned}$$

□

Definition 13.2 *(Ganze Funktion)*
Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nennen wir auch eine ganze Funktion.

Satz 13.3 *(Satz von Lioville)*
Jede beschränkte ganze Funktion ist Konstant.

Beweis. Sei f eine ganze Funktion, die durch $M \geq 0$ auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt ist. Mit der ersten Cauchy'schen Ungleichung (Bemerkung 13.1) gilt dann

$$|f'(z)| \;\leq\; \frac{M}{r} \qquad \forall\, z \in \mathbb{C} \;\; \forall\, r \in \mathbb{R}_+$$

Da dies für alle $r \in \mathbb{R}_+$ gilt, ist f' notwendig konstant Null. Die komplexe Ebene ist zusammenhängend, also ist f konstant. □

Satz 13.4 *(Fundamentalsatz der Algebra)*
Jedes nichtkonstante Polynom mit komplexe Koeffizienten hat eine Nullstelle.

Beweis. Sei $f \in \mathbb{C}[Z]$, also

$$f(Z) \;=\; \sum_{j=0}^{n} a_j\, Z^j \qquad \text{mit } a_n \neq 0 \text{ und } n > 0$$

In einem **ersten Schritt** zeigen wir, dass es ein $r > 0$ gibt, so dass für alle $|z| \geq r$ gilt: $|f(z)| > 1$. Dazu betrachte

$$
\begin{aligned}
\big|f(z)\big| &= \left|\sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j\right| \geq \Big|\left|a_n\, z^n\right| - \left|a_{n-1}\, z^{n-1} + \ldots + a_0\right|\Big| \\
&= |z| \cdot \left|\,|a_n| - \underbrace{\left|\sum_{j=0}^{n-1} a_j\, \frac{z^j}{z^n}\right|}_{\to 0 \text{ für } |z| \to \infty}\,\right|
\end{aligned}
$$

Im **zweiten Schritt** nehmen wir an, f habe keine Nullstelle, dann ist $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ eine ganze Funktion. Weiter nimmt g auf $\overline{\mathrm{U}_r(0)}$ ihr Maximum an. Nach dem ersten Schritt ist g auf $\mathbb{C} \setminus \mathrm{U}_r(0)$ durch 1 beschränkt, also ist g auf ganz $\mathbb{C}$ beschränkt. Nach dem Satz von Lioville 13.3 ist g und damit auch f konstant. □

Folgerung 13.5 *Jedes komplexe Polynom $f \in \mathbb{C}[Z]$ ist von der Form*

$$
f(Z) = \alpha \cdot \prod_{j=1}^{n} (Z - z_j)
$$

mit $\alpha, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$.

Beweis. Induktiv über den Grad $\deg(f)$ von f:
Ist $\deg(f) = 0$ so ist f konstant, das heißt $f(z) = \alpha \in \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$ und damit ist nicht zu zeigen. Die Induktionsvoraussetzung gelte nun für $n-1$ und der Grad von f sei n. Nach dem Hauptsatz der Algebra 13.4 hat f eine Nullstelle z_n. Nach Polynomdivision ergibt sich

$$
f(z) = (z - z_n) \cdot f_1(z) + r(z)
$$

mit $\deg(r) < \deg(z - z_n) = 1$, also $\deg(r) = 0$, und $\deg(f_1) = n-1$. Wegen $f(z_n) = 0 = 0 + r(z_n)$ folgt $r(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Nach Induktionsvoraussetzung ist f_1 bereits von der gewünschten Form und damit folgt die Behauptung. □

Satz 13.6 *(Taylor-Formel)*
Sei $f : \mathrm{U}_r(z_0) \to \mathbb{C}$ mit $r \in \mathbb{R}_+$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$
f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \cdot (z - z_0)^m
$$

für alle $z \in \mathrm{U}_r(z_0)$.

Beweis. Sei $h(z) := f(z + z_0)$, dann ist $h : \mathrm{U}_r(0) \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist h in eine Potenzreihe

$$
h(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h^{(m)}(0)}{m!} \cdot z^m
$$

entwickelbar, dann gilt mit $w := z + z_0 \Rightarrow z = w - z_0$

$$f(w) \;=\; f(w - z_0 + z_0) \;=\; h(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!} \cdot (w - z_0)^m$$

Sei also ohne Einschränkung $z_0 = 0$. Weiter seien $0 < \rho < \rho_1 < r$ und $z_1 \in \mathrm{U}_\rho(0)$. Wir betrachten zunächst ein Nebenergebnis. Es gilt für $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{z - z_1} \;=\; \frac{1}{z} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{z_1}{z}}\right) \;=\; \frac{1}{z} \cdot \left(\left(\frac{z_1}{z}\right)^0 + \ldots \left(\frac{z_1}{z}\right)^{n-1} + \frac{\left(\frac{z_1}{z}\right)^n}{1 - \frac{z_1}{z}}\right) \tag{13.1}$$

Nach der Cauchy'schen Integralformel 12.2 gilt

$$\begin{aligned}
f(z_1) \;&=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_{\rho_1}(0)} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz \\
&\overset{(13.1)}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_{\rho_1}(0)} \left[\left(\sum_{m=0}^{n-1} \frac{z_1^m}{z^{m+1}}\right) + \left(\frac{z_1}{z}\right)^n \cdot \frac{1}{z - z_1}\right] dz \\
&=\; \sum_{m=0}^{n-1} \frac{z_1^m}{2\pi i} \cdot \int_{C_{\rho_1}(0)} \frac{1}{z^{m+1}} \cdot f(z)\, dz + \int_{C_{\rho_1}(0)} \left(\frac{z_1}{z}\right)^n \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz
\end{aligned}$$

Mit der verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel 12.4 gilt dann

$$f(z_1) \;=\; \sum_{m=0}^{n-1} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \cdot z_1^m \;+\; \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{\rho_1}(0)} \left(\frac{z_1}{z}\right)^n \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz \tag{13.2}$$

Wegen $0 < \rho < \rho_1 < r$, $|z| = \rho_1$ und $|z_1| < \rho$ gilt

$$\left|\frac{z_1}{z}\right| \;<\; \frac{\rho}{\rho_1} \;<\; 1$$

und mit der unteren Dreiecksungleichung des Betrags 2.4 gilt

$$|z - z_1| \;\geq\; \Big||z| - |z_1|\Big| \;\geq\; \rho_1 - \rho \;>\; 0$$

Mit diesen Abschätzungen können wir den zweiten Summanden aus Gleichung (13.2) abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_{\rho_1}(0)} \left(\frac{z_1}{z}\right)^n \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz\right| \;&\leq\; \frac{1}{2\pi} \int_{C_{\rho_1}(0)} \left|\frac{z_1}{z}\right|^n \frac{|f(z)|}{|z - z_1|}\, dz \\
&\leq\; \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \int_{C_{\rho_1}(0)} \frac{|f(z)|}{\rho_1 - \rho}\, dz \\
&\leq\; \rho_1 \cdot \max_{z \in C_{\rho_1}(0)} |f(z)| \cdot \frac{1}{\rho_1 - \rho} \left(\frac{\rho}{\rho_1}\right)^n \;\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}\; 0
\end{aligned}$$

Betrachte nun Gleichung (13.2) für $n \to \infty$ und erhalte die Behauptung. □

Beispiel 19 ***Exponentialfunktion***
Die allgemeine n-te Ableitung der Exponentialfunktion ist die Exponentialfunktion selber, also gilt $\exp^{(n)}(0) = \exp(0) = 1$ *und damit erhalten wir aus der Taylor-Formel*

$$\exp(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp^{(n)}(0)}{m!}\, z^m \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!}$$

die uns bereits bekannte Potenzreihendarstellung der Exponentialfunktion zurück.

Beispiel 20 ***Hauptzeig des Logarithmus***
Wir betrachten einige Ableitungen vom Hauptzeig des komplexen Logarithmus. Es gelten

$$\mathrm{Log}'(z) \;=\; \frac{1}{z} \qquad \mathrm{Log}''(z) \;=\; (-1)\frac{1}{z^2} \qquad \mathrm{Log}^{(3)}(z) \;=\; (-1)\,(-2)\frac{1}{z^3} \qquad \ldots$$

damit erhalten wir für die allgemeine n-te Ableitung die Formel

$$\mathrm{Log}^{(n)}(z) \;=\; (m-1)! \cdot \frac{(-1)^{m-1}}{z^m}$$

Für $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ erhalten wir dann aus dem Satz von Taylor

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}(z) \;&=\; \mathrm{Log}(z_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} \cdot (m-1)!}{z_0^m \cdot m!} \cdot (z-z_0)^m \\ &=\; \mathrm{Log}(z_0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{m \cdot z_0^m} \cdot (z-z_0)^m \end{aligned}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist nach der Formel von Cauchy-Hadamadt

$$\frac{1}{\limsup\limits_{m\to\infty} \sqrt[m]{\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{|z_0|^m}}} \;=\; |z_0| \;=\; r$$

Was passiert nun, wenn die negative reelle Achse die r Umgebung von z_0 schneidet, also wenn $\mathrm{U}_r(z_0) \cap \mathbb{C}_- \neq \varnothing$. Eine Voraussetzung für die Taylor-Formel ist die holomorphie, diese liegt aber in diesem Fall nicht auf der gesamten Umgebung vor, daher ist davon auszugehen, dass die obige Potenzreihe nicht überall den Hauptzweig des Logarithmus darstellt. Ist beispielsweise $\mathrm{Im}(z_0) > 0$, so kann gezeigt werden, dass die Potenzreihe auf $\mathrm{U}_r(z_0) \cap \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \leq 0 \,\}$ gegen einen anderen Zweig des komplexen Logarithmus konvergiert.

Definition und Folgerung 13.7 *(Analytische Funktion)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine Funktion, dann nenn wir f analytisch auf D, wenn es zu jedem Punkt $z_0 \in D$ eine offene Umgebung $\mathrm{U}_r(z_0) \subset D$ mit $r > 0$ gibt, auf der sich f in eine Potenzreihe entwickeln lässt.

(a) *Eine komplexe Funktion ist genau dann holomorph, wenn sie analytisch ist.*

(b) *Ist f analytisch, so stimmt die Potenzreihe mit der Taylor-Formel überein.*

Beweis. Teil (b) haben wir bereits in Folgerung 7.8 gesehen. Für Teil (a) haben wir in Satz 7.7 gezeigt, dass jede Potenzreihe eine holomorphe Funktion ist und die Gegenrichtung, dass jede holomorphe Funktion analytisch ist, haben wir mit der Taylor-Formel 13.6 gesehen. □

Definition 13.8 *(lokal gleichmäßige - und kompakte Konvergenz)*
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen. Wir sagen

- *die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f, wenn es für jeden Punkt $z_0 \in D$ ein $r > 0$ gibt, so dass gelten*

$$(1)\ \ \mathrm{U}_r(z_0) \subset D \qquad\qquad (2)\ \ f_n \to f \text{ gleichmäßig auf } \mathrm{U}_r(z_0)$$

- *die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist kompakt konvergent gegen f, wenn die Folge auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Bemerkung 13.9 *Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_n, f : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ Funktionen, dann gelten*

(a) *Es sind äquivalent*

1. *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen f.*
2. *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert kompakt gegen f.*

(b) *Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen f und sind weiter alle f_n stetige Funktionen, dann ist auch die Grenzfunktion f stetig.*

(c) *Sei $C \subset D$ eine stückweise glatte Kurve und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiere gleichmäßig gegen f auf C. Weiter seien alle f_n stetig. Dann dürfen die Grenzprozesse Limesbildung und Integration vertauscht werden, das heißt es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_C f_n(z)\, dz \;=\; \int_C \lim_{n\to\infty} f_n(z)\, dz \;=\; \int_C f(z)\, dz$$

Beweis. Übungsblatt 7

Satz 13.10 *(Weierstraß)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf D definierter holomorpher Funktionen. Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $f : D \to \mathbb{C}$, dann gelten

(a) *Die Grenzfunktion f ist holomorph.*

(b) *Die Folge der Ableitungen $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen die Ableitung der Grenzfunktion f'.*

Beweis. Für Teil **(a)** sei $z_0 \in D$ gegeben. Wähle $r > 0$, so dass die abgeschlossene r-Umgebung $\overline{\mathrm{U}_r(z_0)}$ noch vollständig in D liegt. Nach Bemerkung 13.9 ist f stetig in D. Seien nun $0 < \rho < r$ und $z_1 \in \mathrm{U}_\rho(z_0)$ dann gibt uns die Cauchy'sche Integralformel 12.2

$$f_n(x) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_r(z_0)} \frac{f_n(z)}{z - z_1}\, dz \qquad\qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Die Folge $\left(\frac{f_n(z)}{z-z_1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist für $z \in \mathrm{U}_r(z_0)$ gleichmäßig konvergent, denn es gelten

$$|z - z_1| \;=\; |z - z_0 + z_0 - z_1| \;\geq\; \big||z - z_0| + |z_0 - z_1|\big| \;\geq\; r - \rho \;>\; 0$$

und, da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung auf $C_r(z_0)$ gleichmäßig konvergent ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ und alle $z \in C_r(z_0)$ gilt $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$. Insgesamt erhalten wir

$$\left|\frac{f_n(z) - f(z)}{z - z_1}\right| \;<\; \frac{\varepsilon}{r - \rho}$$

Wir dürfen also nach Bemerkung 13.9 die Limesbildung mit der Integration vertauschen. Betrachte

$$\begin{aligned} f(z_1) &= \lim_{n\to\infty} f_n(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_r(z_0)} \frac{f_n(z)}{z - z_1}\, dz \\ &\overset{(13.9)}{=} \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_r(z_0)} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(z)}{z - z_1}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_1}\, dz \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 12.3 ist f damit holomorph auf $\mathrm{U}_\rho(z_0)$ also insbesondere in z_0 selber.
Zum Nachweis von Teil **(b)** seien z_0, r und $\mathrm{U}_r(z_0)$ wie oben. Da $\overline{\mathrm{U}_r(z_0)}$ eine kompake Teilmenge von D ist und die Folge der f_n nach Voraussetzung auf kompakten Teilmengen von D gleichmäßig gegen f konvergiert, gilt für $z_1 \in \mathrm{U}_{\frac{r}{2}}(z_0)$

$$\begin{aligned} \left|f_n'(z_1) - f'(z_1)\right| &\overset{(12.4)}{=} \frac{1}{2\pi} \cdot \left|\int_{C_r(z_0)} \frac{f_n(z)}{(z - z_1)^2} - \frac{f(z)}{(z - z_1)^2}\, dz\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{C_r(z_0)} \frac{|f_n(z) - f(z)|}{|z - z_1|^2}\, dz \quad \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad 0 \end{aligned}$$

□

14 Lokale Abbildungseigenschaften holomorpher Funktionen

Im letzten Abschnitt haben wir gesehen, dass eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $D \subset \mathbb{C}$ genau dann holomorph ist, das heißt zu jedem Punkt in D gibt es eine offene Umgebung auf der f komplex differenzierbar ist, wenn sie analytisch ist, das heißt wenn es zu jedem Punkt aus D eine offene Umgebung gibt, auf der sich f in eine Potenzreihe entwickeln lässt. Diese Äquivalenz wollen wir nun benutzen um die Eigenschaften holomorpher Funktionen genauer zu untersuchen.

Bemerkung 14.1 *Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und*

$$f(z) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(z - z_0)^m$$

eine Potenzreihe, die für $r > 0$ auf $\mathrm{U}_r(z_0)$ konvergiere. Sei weiter $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{U}_r(z_0)$ eine Folge komplexer Zahlen mit den Eigenschaften $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $z_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} z_0$.
Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(z_n) = 0$, dann gilt $a_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir nehmen an, die Bemerkung wäre falsch. Dann gibt es ein minimales $M \in \mathbb{N}$ mit $a_M \neq 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=M}^{\infty} a_m\,(z - z_0)^m \\ &= (z - z_0)^M \cdot \left(a_M + \sum_{j=1}^{\infty} a_{M+j}\,(z - z_0)^j\right) \end{aligned}$$

Wir können dann f durch $(z-z_0)^M$ teilen und erhalten eine stetige Funktion. Es gilt insbesondere

$$\frac{f(z_n)}{(z_n-z_0)^M} \;=\; a_M + \sum_{j=1}^{\infty} a_{M+j}\,(z_n-z_0)^j$$

Betrachten wir nun auf beiden Seiten der Gleichung den Grenzwert für $n \to \infty$

$$\begin{aligned} 0 \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{f(z_n)}{(z_n-z_0)^M} \;&=\; \lim_{n\to\infty} a_M + \sum_{j=1}^{\infty} a_{M+j}\,(z_n-z_0)^j \\ &=\; a_M + \sum_{j=1}^{\infty} a_{M+j}\,(z_0-z_0)^j \;=\; a_M \end{aligned}$$

Da wir oben M so gewählt haben, dass $a_M \neq 0$, ist dies ein Widerspruch zur unserer Annahme, dass die Bemerkung falsch wäre. □

Satz 14.2 *(Identitätssatz für Potenzreihen)*
Sei $z_0 \in \mathbb{C}$ und seien für $r > 0$

$$f(z) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} a_m\,(z-z_0)^m \quad \text{und} \quad g(z) \;:=\; \sum_{m=0}^{\infty} b_m\,(z-z_0)^m$$

zwei auf $\mathrm{U}_r(z_0)$ konvergente Potenzreihen. Sei weiter $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{U}_r(z)$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und Grenzwert z_0.
Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(z_n) = g(z_n)$, dann gilt $a_n = b_n$, das heißt dann stimmen f und g auf ganz $\mathrm{U}_r(z_0)$ überein.

Beweis. Setze

$$h(z) \;:=\; f(z) - g(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} (a_m - b_m)\cdot(z-z_0)^m$$

Es gilt $h(z_n) = 0$ für alle n und damit gilt nach Bemerkung 14.1 $a_m - b_m = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$. □

Satz 14.3 *(Identitätssatz für holomorphe Funktionen)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen. Weiter sei $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ eine konvergente Folge komplexer Zahlen mit Grenzwert $z_0 \in D$ und $z_n \neq z_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
Falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f(z_n) = g(z_n)$, so sind die Funktionen f und g auf ganz D identisch.

Beweis. Setze $F(z) := f(z) - g(z)$, dann ist F holomorph auf D. Sei nun $a \in D$ beliebig aber fest gewählt. Nach dem Satz von der Taylor-Entwicklung 13.6 gibt es ein $r > 0$, so dass sich F auf $\mathrm{U}_r(a)$ in eine Potenzreihe entwickeln lässt, also

$$F(z) \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(a)}{m!}\,(z-a)^m \qquad \text{für } z \in \mathrm{U}_r(a)$$

Wir definieren die folgenden Teilmengen von D:

$$\begin{aligned} A \;&:=\; \left\{ a \in D \,\middle|\, F^{(m)}(a) = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N} \right\} \\ B \;&:=\; \left\{ a \in D \,\middle|\, \exists\, m \in \mathbb{N} \quad F^{(m)}(a) \neq 0 \right\} \end{aligned}$$

Behauptung 1 *A ist offen und nicht leer.*

Beweis. Sei $a \in A$, dann gibt es ein $r > 0$ derart, dass F auf $\mathrm{U}_r(a)$ in eine Taylorreihe entwickelbar ist. Nach Voraussetzung sind die Koeffizienten dieser Taylorreihe alle gleich Null, also ist F auf $\mathrm{U}_r(a)$ identisch Null und daher liegt die gesamte Umgebung in A. Also ist A offen.
Nach Voraussetzung ist $F(z_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Bemerkung 14.1 ist dann die Taylorreihe von F auf $\mathrm{U}_r(z_0)$ identisch Null und insbesondere liegt diese Umgebung in A. △

Behauptung 2 *B ist offen.*

Beweis. Sei $a \in B$, dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so dass $F^{(m)}(a) \neq 0$. Wegen der Stetigkeit von $F^{(m)}$ gibt es eine offene Umgebung U von a derart, dass $F^{(m)}(z) \neq 0$ für alle $z \in U$, also ist $U \subset B$ und damit B offen. △

Wir können D nun als disjunkte Vereinigung offener Mengen $A \dot\cup B = D$ schreiben. Nach Voraussetzung ist D aber ein Gebiet, also insbesondere zusammenhängend. Daher muss A oder B leer sein. Wie gesehen ist A nicht leer, also muss B leer sein, damit folgt $A = D$ und die Taylorreihe von F verschwindet für jeden Punkt $a \in D$, das heißt F ist die Nullfunktion. □

Definition und Folgerung 14.4 *(Eindeutigkeit der holomorphen Fortsetzung)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $M \subset D$ eine Teilmenge, die einen Häufungspunkt enthält. Sei weiter $f : M \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Wenn es eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}$ von f auf D gibt, das heißt wenn $\tilde{f} : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $\tilde{f}_{|M} = f$ gelten, dann ist $\tilde{f}$ eindeutig bestimmt.

Beweis. Seien $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ zwei holomorphe Fortsetzungen von f. Da M einen Häufungspunkt enthält gibt es eine nicht konstante Folge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M$, die gegen diesen Häufungspunkt konvergiert. Nach Definition stimmen $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ auf dieser Folge überein, denn $\tilde{f}(z_n) = f(z_n) = \tilde{g}(z_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also sind $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ nach Satz 14.3 identisch. □

Folgerung 14.5 *Die Nullstellenmenge einer nicht-konstanten holomorphen Funktion ist diskret, das heißt sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht die Nullfunktion, dann ist die Menge $N_f := \{\, z \in D \mid f(z) = 0 \,\}$ diskret, enthält als keinen Häufungspunkt.*

Beweis. Angenommen N_f enthalte einen Häufungspunkt, dann sind nach Satz 13.3 die Nullfunktion und f auf D identisch. □

Beispiel 21 *Die reellen Funktionen*

$$\sin, \cos, \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

haben eindeutige Fortsetzungen auf die komplexe Ebene, nämlich die in den Definitionen 8.1 und 8.3 eingeführten.

Definition 14.6 *(Holomorpher Zweig des Logarithmus)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ heißt holomorpher Zweig des Logarithmus von f, wenn g die folgende Bedingung erfüllt

$$f(z) \;=\; \exp\big(g(z)\big)$$

Satz 14.7 *(Existenz des holomorphen Zweigs des Logarithmus)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph ohne Nullstelle in D, das heißt $f(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann gibt es einen holomorphen Zweig des Logarithmus von f.

Beweisidee Wir wollen eine Funktion g, die wir in die Exponentialfunktion „stecken“ können, so dass die Funktion f heraus kommt. Für komplexe Zahlen haben wir den Logarithmus bereits definiert, daher bekommen wir die Idee uns

$$\int \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \;=\; \operatorname{Log}\big(f(z)\big) + \text{Konst.}$$

genauer anzusehen.

Beweis. Setze

$$h(z) \;=\; \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Da f auf D keine Nullstellen hat, ist h holomorph auf D. Weiter ist D nach Voraussetzung ein Elementargebiet, also gibt es eine Stammfunktion H von h. Betrachte nun

$$\begin{aligned}\left(\frac{\exp\big(H(z)\big)}{f(z)}\right)' &= \frac{\exp\big(H(z)\big)\cdot h(z)\cdot f(z) - \exp\big(H(z)\big)\cdot f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} \\ &= \frac{\exp\big(H(z)\big)\cdot \frac{f'(z)}{f(z)}\cdot f(z) - \exp\big(H(z)\big)\cdot f'(z)}{\big(f(z)\big)^2} \;=\; 0\end{aligned}$$

Da D insbesondere ein Gebiet ist, gibt es ein $c \in \mathbb{C}$, so dass

$$\exp\big(H(z)\big)\cdot c \;=\; f(z) \qquad \forall\, z \in D$$

es gibt weiter ein $d \in \mathbb{C}$ mit $\exp(d) = c$, also erfüllt $g(z) := H(z) + d$ die Forderung, denn

$$\exp\big(g(z)\big) \;=\; \exp\big(H(z) + d\big) \;=\; \exp\big(H(z)\big)\cdot c \;=\; f(z)$$

□

Folgerung 14.8 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion ohne Nullstellen in D. Sei weiter $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, dann gibt es eine holomorphe Funktion $g : D \to \mathbb{C}$ mit*

$$\big(g(z)\big)^n \;=\; f(z) \qquad \forall\, z \in D$$

Beweis. Sei $h : D \to \mathbb{C}$ der holomorphe Zweig des Logarithmus von f nach Satz 14.7, dann erfüllt die Funktion

$$g(z) \;:=\; \exp\left(\frac{1}{n}\cdot h(z)\right)$$

die Forderung, denn

$$\big(g(z)\big)^n \;=\; \left(\exp\left(\frac{1}{n}\cdot h(z)\right)\right)^n \;=\; \exp\big(h(z)\big) \;=\; f(z)$$

□

Satz 14.9 *(Satz über die implizite Funktion - komplexe Version)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph.

(i) *Sei $a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$. Dann gibt es eine offene Menge $D_a \subset D$ mit $a \in D_a$ derart, dass $f_{|D_a}$ injektiv ist. Ferner ist $f(D_a)$ offen.*

(ii) *Sei f auf ganz D injektiv und $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist $\mathrm{Img}(f) = f(D)$ offen und es gibt eine holomorphe Funktion $g : \mathrm{Img}(f) \to \mathbb{C}$ mit den Eigenschaften*

1. *g ist Umkehrfunktion von f, das heißt für alle $z \in D$ gilt $g\big(f(z)\big) = z$*
2. *$g'\big(f(z)\big) = \frac{1}{f'(z)}$ für alle $z \in D$*

Beweis. Wir wollen die komplexe Version des Satzes aus dem reellen Satz über die implizite Funktion folgern, dazu schreiben wir für $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ die Funktion f wie bereits in Abschnitt 6 als $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ mit den Funktionen $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Weiter benutzen wir wieder die Kurzschreibweisen

$$u_x = \frac{\partial}{\partial x} u \quad \text{und} \quad u_y = \frac{\partial}{\partial y} u$$

Sei nun $a \in D$ mit $f'(a) \neq 0$, dann ist f nach Satz 6.8 total differenzierbar in a mit der Jacobi-Matrix

$$J_f(a) = \begin{pmatrix} u_x(a) & u_y(a) \\ -u_y(a) & u_x(a) \end{pmatrix}$$

Wegen $f'(a) = u_x(a) - iu_y(a) \neq 0$ gilt weiter

$$\det\big(J_f(a)\big) = u_x^2(a) + u_y^2(a) \neq 0$$

Die Jacobi-Matrix zu f im Punkte a ist also regulär. Nun können wir mit den Ergebnissen der reellen Analysis schließen, dass f in einer Umgebung D_a von a stetig invertierbar ist und somit ist $f(D_a)$ offen.
Mit diesem Ergebnis haben wir Teil **(a)** gezeigt, für den Nachweis von **(b)** sei nun $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D$. Dann ist $\mathrm{Img}(f) = f(D)$ nach Teil (a) offen, denn jeder Punkt $f(z) \in \mathrm{Img}(f)$ ist enthalten in einer offenen Menge $f(D_z)$. Mit den Ergebnissen der reellen Analysis dürfen wir nun auf die Existenz einer total differenzierbaren Funktion $g : \mathrm{Img}(f) \to \mathbb{C}$ schließen. Nach der Kettenregel ist die Jacobi-Matrix zu g im Punkt $a = f(z_0)$

$$J_g(a) = \Big(J_f(z_0)\Big)^{-1} = \frac{1}{u_x^2(z_0) + u_y^2(z_0)} \cdot \begin{pmatrix} u_x(z_0) & -u_y(z_0) \\ u_y(z_0) & u_x(z_0) \end{pmatrix}$$

also erfüllt g die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen und ist holomorph. $\square$

Satz 14.10 *(Satz von der Gebietstreue)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ eine nicht konstante holomorphe Funktion. Dann ist $\mathrm{Img}(f) = f(D)$ *ein Gebiet.*

Beweis. Sei $a \in D$. Wir zeigen zunächst, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathrm{Img}(f)$ mit $f(a) \in U$ gibt. Ohne Einschränkung[6] sei dazu $a = 0$ und $f(a) = 0$. Betrachte die Taylorentwicklung von f um den Punkt $a = 0$

$$f(z) \;=\; f(0) + z^m \cdot \big(a_m + a_{m+1}\, z + a_{m+2}\, z^2 + \dots\big) \;=\; z^m \cdot \sum_{j=0}^{\infty} a_{m+j} z^j$$

mit $m \geq 1$, $a_m \neq 0$ und Konvergenzradius $r > 0$.
Sonderfall $(m = 1)$: Es gilt unmittelbar $f'(0) = a_m \neq 0$ und somit bildet f nach Satz 14.9 über die implizite Funktion offene Mengen auf offene Mengen ab.
Hauptfall $(m > 1)$: Definiere die Hilfsfunktion

$$h(z) \;:=\; \sum_{j=0}^{\infty} a_{m+j} z^j$$

Dann gilt $f(z) = z^m \cdot h(z)$ und h ist eine holomorphe Funktion auf $\mathrm{U}_r(0)$. Wegen $h(0) = a_m \neq 0$ gibt es ein $0 < r' < r$, so dass h auf $\mathrm{U}_{r'}(0)$ keine Nullstelle hat. Nach Satz 14.8 besitzt h dann auf $U_{r'}(0)$ eine m-te Wurzel, das heßt es gibt eine holomorphe Funktion $h_0 : \mathrm{U}_{r'}(0) \to \mathbb{C}$ mit

$$\big(h_0(z)\big)^m \;=\; h(z) \qquad \forall\, z \in \mathrm{U}_{r'}(0)$$

Damit können wir die Funktion f auf $\mathrm{U}_{r'}(0)$ schreiben als

$$f(z) \;=\; z^m \cdot h(z) \;=\; z^m \cdot \big(h_0(z)\big)^m \;=\; \big(z \cdot h_0(z)\big)^m \;=:\; f_0^m(z)$$

Wir wenden nun den Satz 14.9 über die implizite Funktion auf f_0 an, und erhalten ein $0 < r'' < r'$ mit der Eigenschaft, dass f_0 auf $\mathrm{U}_{r''}(0)$ injektiv und $f\big(\mathrm{U}_{r''}(0)\big)$ offen ist. Sei

$$P : \mathbb{C} \ni z \mapsto z^m \in \mathbb{C}$$

dann gilt $f \;=\; P \circ f$. Um zu zeigen, dass f offene Mengen, die die Null enthalten, auf offene Mengen, die die Null enthalten, abbildet, genügt es zu zeigen, dass P Umgebungen der Form $\mathrm{U}_\delta(0)$ surjektiv auf Umgebungen der Form $\mathrm{U}_{\delta^m}(0)$ abbildet.
Sei dazu $\delta > 0$ und $z \;=\; s \cdot e^{2\pi i t} \in \mathrm{U}_\delta(0)$, also $0 < s < \delta$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$P(z) \;=\; s^m \cdot e^{2\pi i m t} \in \mathrm{U}_{\delta^m}(0)$$

Umgekehrt sei $w \;=\; u \cdot e^{2\pi i t} \in \mathrm{U}_{\delta^m}(0)$, also $0 < u < \delta^m$ und $t \in \mathbb{R}$. Dann ist $u^{\frac{1}{m}} \cdot e^{\frac{2\pi i t}{m}} \in \mathrm{U}_\delta(0)$ ein Urbild zu w unter P, das heißt

$$P\Big(u^{\frac{1}{m}} \cdot e^{\frac{2\pi i t}{m}}\Big) \;=\; w$$

Wir haben nun gezeigt, dass $f(0)$ in einer offenen Umgebung liegt, die noch Vollständig in $\mathrm{Img}(f)$ enthalten ist. Da wir mit der Reduktion auf $a = 0$ keine Einschränkung vorgenommen haben, haben

[6] Dies kann wirklich ohne Einschränkung angenommen werden, denn für $f(a) = c$ betrachte $g(a) := f(a) - c$ und für $a \neq 0$ betrachte $g(z) := f(z - a)$ und das verschieben einer Menge um eine komplexe Zahl erhält die Offenheit bzw. Abgeschlossenheit der Menge.

wir dies damit für alle $a \in D$ gezeigt. Also bildet f offene Mengen auf offene Mengen ab.

Nun können wir zeigen, dass $\mathrm{Img}(f)$ ein Gebiet ist. Dazu nehmen wir an, $\mathrm{Img}(f)$ sei kein Gebiet. Da wir schon wissen, dass $\mathrm{Img}(f)$ offen ist, kann $\mathrm{Img}(f)$ nach Annahme nicht zusammenhängend sein. Also gibt es offene Mengen $U_1, U_2 \in \mathrm{Img}(f)$ mit den Eigenschaften

1. U_1 und U_2 sind nicht leer, das heißt $U_1 \neq \varnothing \neq U_2$
2. U_1 und U_2 haben leeren Schnitt, das heißt $U_1 \cap U_2 \ = \ \varnothing$
3. $\mathrm{Img}(f)$ ist die disjunkte Vereinigung von U_1 und U_2, also $\mathrm{Img}(f) = U_1 \,\dot{\cup}\, U_2$

Betrachten wir in 3. die Urbilder, dann erhalten wir

$$f^{-1}\big(\mathrm{Img}(f)\big) \ = \ D \ = \ f^{-1}(U_1) \,\dot{\cup}\, f^{-1}(U_2)$$

Per Definition der Stetigkeit sind $f^{-1}(U_1)$ und $f^{-1}(U_2)$ offen. Das heißt aber, dass D nicht zusammenhängend ist, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Damit muss also auch $f(D) = \mathrm{Img}(f)$ ein Gebiet sein. □

Folgerung 14.11 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Ist weiter $\mathrm{Re}(f)$ oder $\mathrm{Im}(f)$ oder $|f|$ konstant, dann ist f selbst konstant.*

Beweis. Sei $\mathrm{Re}(f) = x_0$ konstant, dann gilt

$$\mathrm{Img}(f) \subset \big\{ \, x_0 + iy \, \big| \, y \in \mathbb{R} \, \big\} \ =: \ M$$

Die Menge M hat keinen inneren Punkt, also gibt es keine Teilmenge $A \subseteq M$ die offen ist. Da auch $\mathrm{Img}(f)$ damit kein Gebiet sein kann folgt die Aussage aus Satz 14.10. Die Aussage für konstanten Imaginärteil von f folgt analog. Sei $|f| = r > 0$ konstant, dann gilt

$$\mathrm{Img}(f) \subset C_r(0)$$

Die Kreislinie mit Radius $r > 0$ um den Nullpunkt enthält keine inneren Punkte, also kann $\mathrm{Img}(f)$ kein Gebiet sein. Nach Satz 14.10 ist f dann konstant. □

Folgerung 14.12 *(Maximumprinzip)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Wenn f auf D ein Betragsmaximum hat, dann ist f konstant.

Beweis. Sei $a \in D$ ein Punkt, in dem f ein Betragsmaximum habe, das heißt es ist $|f(z)| \leq |f(a)|$ für alle $z \in D$. Wäre f nun nicht konstant, dann gäbe es nach Satz 14.10 eine offene Umgebung $\mathrm{U}_\delta\big(f(a)\big)$ mit $\delta > 0$, die noch vollständig in $\mathrm{Img}(f) = f(D)$ enthalten wäre. Diese Umgebung enthielte aber Punkte w mit $|w| > |f(a)|$ und das widerspricht der Maximumseigenschaft von $f(a)$. □

Folgerung 14.13 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann nimmt f auf jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ ein Betragsmaximum an und dieses liegt auf dem Rand von K.*

Beweis. Ist f konstant, so ist jeder Punkt $f(z) \in \mathrm{Img}(f)$ ein Betragsmaximum, also insbesondere wird dieses in jedem Randpunkt einer jeden kompakten Teilmenge von D angenommen.
Sei f nicht konstant und $K \subset D$ eine kompakt, dann ist

$$g := |f| : D \to \mathbb{R}$$

stetig und g bildet K auf eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ab, also nimmt g ein Maximum an. Würde g das Maximum an der Stelle a im innern von K annehmen, dann gäbe es eine offene Umgebung $\mathrm{U}_r(a) \subset K$ mit $r > 0$ und nach Satz 14.10 enthielte die offene Menge $f\big(\mathrm{U}_r(a)\big)$ sowohl $f(a)$ also auch Punkte, die im Betrag größer als $f(a)$ wären. Dann wäre $f(a)$ aber kein Betragsmaximum, also a keine Maximalstelle von g. □

Folgerung 14.14 *(Minimumprinzip)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und nicht konstant.

(a) *Dann hat $|f|$ kein lokales Maximum.*

(b) *Hat $|f|$ ein lokales Minimum, dann ist dieses Null.*

Beweis. Zu **(a)**: Hätte f in $a \in D$ ein lokales Maximum, dann gibt es per Definition eine Umgebung $\mathrm{U}_\delta(a)$ mit $\delta > 0$ derart, dass für alle $z \in \mathrm{U}_\delta(a)$ gilt $|f(a)| \geq |f(z)|$. Nach dem Maximumsprinzip (Folgerung 14.12) ist $f|_{U_\delta(a)}$ konstant. Mit dem Identitätssatz 14.3 ist f dann auf ganz D konstant, da die Umgebung $\mathrm{U}_\delta(a)$ einen Häufungspunkt enthält.
Zu **(b)**: Wäre das lokale Minimum $|f(a)| \neq 0$, dann wäre $g(z) := \frac{1}{f(z)}$ auf einer Umgebung U von a holomorph und hätte ein (lokales) Maximum. Dies kann aber nach Teil (a) nicht auftreten. □

Notation 4 *Als abkürzende Schreibweisen führen wir ein:*
- $\mathbb{E} := \mathrm{U}_1(0) = \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, |z| < 1 \,\}$ *für die Einheitskreisscheibe und*
- $\mathbb{H} := \{\, z \in \mathbb{C} \,:\, \mathrm{Im}(z) > 0 \,\}$ *für die obere Halbebene*

Satz 14.15 *(Lemma von Schwartz)*
Sei $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ eine holomorphe Funktion mit $f(0) = 0$, dann gelten

(a) $|f'(0)| \leq 1$ *und für alle $z \in \mathbb{E}$ gilt $|f(z)| \leq |z|$.*

(b) *Gibt es einen Punkt $a \in \mathbb{E}\setminus\{0\}$ mit $|f(a)| = |a|$, dann gibt es ein $c \in C_1(0)$ derart, dass f von der Form $f(z) = c \cdot z$ ist.*

Beweis. f lässt sich auf $\mathbb{E}$ um den Punkt 0 in eine Taylorreihe entwickeln

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^{(m)}(0)}{m!}\, z^m \\ &= z \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\rho^{(m)}(0)}{m!}\, z^{m-1} \right) =: z \cdot g(z) \qquad (14.1) \end{aligned}$$

Die Funktion $g : \mathbb{E} \to \mathbb{C}$ ist holomorph, nimmt also nach Folgerung 14.13 auf $\overline{U_r(0)}$ mit $0 < r < 1$ ihr Betragsmaximum auf dem Rand, also auf $C_r(0)$ an. Damit gilt für alle $0 < r < 1$ und alle $z \in \overline{U_r(0)}$ mit $z \neq 0$

$$|g(z)| \;=\; \frac{|f(z)|}{|z|} \;\leq\; \frac{1}{r}$$

Wegen $f(0) = 0$ folgt damit für $r \to 1$, dass $|g(z)| \leq 1$ für alle $z \in \mathbb{E}$. Insgesamt erhalten wir

$$|f(z)| \;=\; |g(z)| \cdot |z| \;\leq\; |z|$$

Weiter folgt damit aus Gleichung (14.1)

$$|f'(0)| \;=\; |g(0)| \;\leq\; 1$$

Damit haben wir Teil **(a)** gezeigt. In der Situation von Teil **(b)** gibt es ein $a \in \mathbb{E}\setminus\{0\}$ mit $|f(a)| = |a|$. Dann ist $g(a) = 1$, das heißt g nimmt ein Betragsmaximum auf einem Gebiet an, ist also nach dem Maximumprinzip 14.12 konstant. Also gibt es ein $c \in \mathbb{C}$ mit $|c| = 1$ und $g(z) = c$. Mit Gleichung (14.1) Folgt die Behauptung. □

Definition 14.16 *(Automorphismengruppe)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Wir definieren die Automorphismengruppe von D als

$$\mathrm{Aut}(D) \;:=\; \left\{ f : D \to D \,\middle|\, f \text{ holomorph und bijektiv} \right\}$$

Anmerkung Die Automorphismengruppe ist mit der Hintereinanderausführung „$\circ$" als Gruppenoperation und der Identität als neutrales Element eine Gruppe.

15 Singularitäten

Im besherigen Verlauf dieser Vorlesung haben wir holomorphe Funktionen betrachtet. Nun wollen wir Funktionen die in (mindestens) einem Punkt nicht holomorph sind, auf einer Umgebung des Punktes aber schon, untersuchen. Dazu betrachten wir zunächst drei Standartbeispiele auf die wir über den gesamten Abschnitt zurückkommen werden.

Beispiel 22 *(Singularitäten)*
(1) *Die Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\setminus\{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{\sin(z)}{z} \end{aligned}$$

ist holomorph auf ihrem Definitionsbereich, aber im Nullpunkt nicht definiert. Betrachten wir die Potenzreihenentwicklung von $\sin$ *um* 0*, dann erhalten wir*

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n} \;=:\; \tilde{f}(z)$$

Die so erhaltene Funktion $\tilde{f}$ ist eine ganze Funktion, also ist $\tilde{f}$ eine holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathbb{C}$, also insbesondere eine Fortsetzung von f auf den Nullpunkt.

Einen solchen Fall wollen wir in diesem Abschnitt als eine „hebbare Singularität" von f definieren.

***(2)** Die Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\setminus\{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{\exp(z)}{z} \end{aligned}$$

ist holomorph auf ihrem Definitionsbereich, aber im Nullpunkt nicht definiert. Betrachte den Grenzwert für $z \to 0$:

$$\lim_{z\to 0} |f(z)| = \lim_{z\to 0} \left|\frac{\exp(z)}{z}\right| = \lim_{z\to 0} \frac{1}{|z|} = \infty$$

Gäbe es eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{f}$ von f, dann wäre $\tilde{f}$ in einer Umgebung des Nullpunktes beschränkt und damit wäre auch f in dieser Umgebung beschränkt. Dies ist jedoch wie gesehen nicht der Fall.

Einen solchen Fall wollen wir in diesem Abschnitt als einen „Pol" von f definieren.

***(3)** Die Funktion*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C}\setminus\{0\} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \exp\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

ist holomorph auf ihrem Definitionsbereich, aber im Nullpunkt nicht definiert. Für die Folge komplexer Zahlen $z_n := \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} |\exp(z_n)| = \lim_{n\to\infty} |\exp(n)| = \infty$$

Weiter gilt für die Folge $w_n := \frac{1}{2\pi i n}$

$$\lim_{n\to\infty} |\exp(w_n)| = \lim_{n\to\infty} |\exp(2\pi i n)| = 1$$

Das Verhalten dieser Funktion ist also weder so wie in (1) noch wie in (2). Einen solchen Fall wollen wir in diesem Abschnitt als eine „wesentliche Singularität" von f definieren.

Notation 5 *(Punktierte Umgebung)*
Sei $a \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{R}_+$. Die punktierte Umgebung von a mit Radius r definieren wir als

$$\dot{\mathrm{U}}_r(a) := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; 0 < |z-a| < r \right\} = \mathrm{U}_r(a)\setminus\{a\}$$

Definition 15.1 *(Singularität, hebbare Singularität)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Ein Punkt $a \in \mathbb{C}\setminus D$ heißt Singularität von f, wenn es ein $r \in \mathbb{R}_+$ gibt, so dass $\dot{\mathrm{U}}_r(a)$ komplett in D enthalten ist.

Wir nennen eine Singularität a von f hebbar, falls es ein $\rho \in \mathbb{R}_+$ und eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : \mathrm{U}_\rho(a) \to \mathbb{C}$ gibt, so dass $\dot{\mathrm{U}}_\rho(a) \subseteq D$ und $\tilde{f}(z) = f(z)$ für $z \in \dot{\mathrm{U}}_\rho(a)$ gelten.

Beispiel 23 *Ein Beispiel für eine Funktion mit hebbarer Singularität haben wir mit $f(z) := \frac{\sin(z)}{z}$ in Beispiel 22 Teil (1) gesehen.*

Satz 15.2 *(Riemannscher Hebbarkeitssatz)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Sei weiter $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine Singularität von f, dann sind äquivalent:

(i) *Die Singularität ist hebbar.*

(ii) *Es gibt ein $r > 0$, so dass $|f|$ auf $\dot{\mathrm{U}}_r(a) \subseteq D$ beschränkt ist.*

Beweis. Für **„(i)⇒(ii)“** ist a nach Voraussetzung hebbar, also gibt es insbesondere eine holomorphe Funktion $\tilde{f} : \mathrm{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ mit $\tilde{f}(z) = f(z)$ für $z \in \dot{\mathrm{U}}_r(a)$. Da $\tilde{f}$ holomorph auf $\mathrm{U}_r(a)$ ist, ist $\tilde{f}$ stetig auf $\mathrm{U}_r(a)$, also im Besonderen im Punkt a. Somit gibt es ein $0 < \rho < r$ mit

$$\left|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a)\right| \;<\; 1 \qquad \forall\, z \in \mathrm{U}_\rho(0)$$

Damit gilt für $z \in \dot{\mathrm{U}}_\rho(a)$

$$\begin{aligned} |f(z)| &= \left|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a) + \tilde{f}(a)\right| \\ &\leq \left|\tilde{f}(z) - \tilde{f}(a)\right| + \left|\tilde{f}(a)\right| \;<\; 1 + \left|\tilde{f}(a)\right| \end{aligned}$$

Für **„(ii)⇒(i)“** ist $|f|$ nach Vorraussetzung auf einer Umgebung $\dot{\mathrm{U}}_r(a) \subseteq D$ beschränkt. Sei diese Schranke mit $M \in \mathbb{R}_+$ bezeichnet. Definiere

$$g(z) \;:=\; \begin{cases} (z-a)^2 \cdot f(z) & \text{falls } z \in \dot{\mathrm{U}}_r(a) \\ 0 & \text{falls } z = a \end{cases}$$

dann ist $g : \mathrm{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ stetig in a, denn

$$\lim_{z\to a} |g(z)| \;=\; \lim_{z\to a} |z-a|^2 \cdot |f(z)| \;\leq\; \lim_{z\to a} |z-a|^2 \cdot M \;=\; 0$$

weiter ist g sogar komplex differenzierbar in a mit $g'(a) = 0$, denn

$$\lim_{z\to a} \frac{g(z) - g(a)}{z-a} \;=\; \lim_{z\to a} \frac{(z-a)^2 \cdot f(z)}{z-a} \;=\; \lim_{z\to a} (z-a) \cdot f(z) \;=\; 0$$

Wegen $g(a) = 0$ und $g'(a) = 0$ beginnt die Taylorreihe von g frühestens mit dem 2-ten Term, ist also von der Form

$$g(z) \;=\; \frac{g''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{g'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \frac{g^{(4)}(a)}{4!}(z-a)^4 + \ldots$$

Definieren nun eine Hilfsfunktion

$$h(z) \;:=\; \frac{g(z)}{(z-a)^2} \;=\; \sum_{m=0}^{\infty} \frac{g^{(m+2)}(a)}{(m+2)!}(z-a)^m$$

dann ist h wie g auf ganz $\mathrm{U}_r(a)$ definiert und für $z \in \dot{\mathrm{U}}_r(a)$ gilt $f(z) \;=\; \frac{g(z)}{(z-a)^2} \;=\; h(z)$. Also ist h eine holomorphe Fortsetzung von f auf $\mathrm{U}_r(a)$. □

Definition 15.3 *(Pol)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Singularität a von f heißt ein Pol, wenn es ein $r > 0$, eine holomorphe Funktion $g : \mathrm{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ und ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gibt, so dass

(i) $\dot{\mathrm{U}}_r(a)$ *liegt ganz in* D

(ii) $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ *für alle* $z \in \dot{\mathrm{U}}_r(a)$

(iii) $g(a) \neq 0$

erfült sind. Wir nennen m die Pol(stellen)ordnung von a, bzw. a einen Pol m-ter Ordnung von f.

Beispiel 24 *Ein Beispiel für eine Funktion mit einem Pol erster Ordnung haben wir in Beispiel 22 Teil (2) mit $f(z) := \frac{\exp(z)}{z}$ gesehen.*

Bemerkung 15.4 *Die Polstellenordnung ist eindeutig bestimmt.*

Beweis. Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph sowie a ein Pol von f. Weiter seien $g, g_1 : \mathrm{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen, welche mit $m, m_1 \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Bedingungen (i),(ii) und (iii) aus Definition 15.3 erfüllen. Es gilt

$$\frac{g(z)}{(z-a)^m} = f(z) = \frac{g_1(z)}{(z-a)^{m_1}}$$

Sei ohne Einschränkung $m_1 \geq m$, dann können wir g schreiben als

$$g(z) = g_1(z) \cdot (z-a)^{m-m_1}$$

Betrachte nun den Grenzwert von g für $z \to a$, es gilt

$$\begin{aligned} 0 \overset{15.3\,(iii)}{\neq} g(a) &= \lim_{z \to a} g(z) = \lim_{z \to a} g_1(z) \cdot (z-a)^{m-m_1} \\ &= g_1(a) \cdot \lim_{z \to a} (z-a)^{m-m_1} \end{aligned}$$

Wegen $g_1(a) \neq 0$ folgt sofort $m = m_1$. □

Bemerkung 15.5 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter habe f in $a \in \mathbb{C} \setminus D$ einen Pol m-ter Ordnung, dann gibt es ein $r > 0$ und für $n \geq -m$ komplexe Zahlen $b_n \in \mathbb{C}$, so dass*

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} b_n \cdot (z-a)^n$$

auf $\dot{\mathrm{U}}_r(a)$.

Beweis. Nach Definition 15.3 gibt es eine holomorphe Funktion

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$$

auf $\mathrm{U}_r(a)$ mit der Eigenschaft, dass $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ ist. Setze $b_n := a_{n+m}$. □

Beispiel 25 *Betrachte die Taylorentwicklung von $\exp(z)$ um 0 und ersetze diese in der Funktion $f(z) = \frac{\exp(z)}{z}$ aus Beispiel 22 Teil (2). Wir erhalten*

$$\frac{\exp(z)}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \ldots$$

Satz 15.6 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph und $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine Singularität von f. Dann sind äquivalent*

(i) *a ist ein Pol von f.*

(ii) *Für alle $c \in \mathbb{R}_+$ gibt es ein $\delta > 0$ so dass für alle $z \in \dot{\mathrm{U}}_\delta(a)$ gilt $|f(z)| > c$.*
Also: $\lim\limits_{z \to a} |f(z)| = \infty$

Beweis. Für **„(i)⇒(ii)"** ist a nach Voraussetzung ein Pol, also gibt es ein $r > 0$, eine holomorphe Funktion $g : \mathrm{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ und ein $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, die die Bedingungen (i),(ii) und (iii) aus Definition 15.3 erfüllen. Es gilt

$$\lim_{z \to a} |f(z)| \;=\; \lim_{z \to a} \left| \frac{g(z)}{(z-a)^m} \right| \;=\; |g(a)| \cdot \lim_{z \to a} \frac{1}{|z-a|^m} \;=\; \infty$$

Für **„(i)⇒(ii)"** definiere

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \dot{\mathrm{U}}_r(a) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{f(z)} \end{aligned}$$

dann hat $\tilde{f}$ nach Voraussetzung für genügend kleines $r > 0$ auf $\dot{\mathrm{U}}_r(a)$ keine Nullstellen, also ist $\tilde{f}$ holomorph. Ferner ist $\tilde{f}$ auf $\dot{\mathrm{U}}_r(a)$ beschränkt und es gilt

$$\lim_{z \to a} \tilde{f}(z) \;=\; \lim_{z \to a} \frac{1}{f(z)} \;=\; 0$$

Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 15.2 ist a dann eine hebbare Singularität von $\tilde{f}$, also lässt sich $\tilde{f}$ zu einer holomorphen Funktion $\bar{f} : \mathrm{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ fortsetzen. Insbesondere ist wegen der Stetigkeit $\bar{f}(a) = 0$. Betrachte nun die Taylorentwicklung von $bar f$ um a

$$\bar{f}(z) \;=\; (z-a)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n \;=:\; (z-a)^m \cdot h(z)$$

mit $a_0 \neq 0$ und $m \in \mathbb{N}_{>0}$. Die Funktion $h : \mathrm{U}_r(a) \to \mathbb{C}$ ist holomorph und besitzt wegen $h(a) = a_0 \neq 0$ keine Nullstelle auf $\mathrm{U}_r(a)$. Setze $g(z) = \frac{1}{h(z)}$, dann ist auch $g(z)$ holomorph und es gelten$g(a) \neq 0$ und

$$f(z) \;=\; \frac{1}{f(z)} \;=\; \frac{1}{(z-a)^m \cdot h(z)} \;=\; \frac{g(z)}{(z-a)^m}$$

□

Definition 15.7 *(Wesentliche - / außerwesentliche Singularität)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Eine Singularität $a \in \mathbb{C} \setminus D$ von f heißt eine wesentliche Singularität, falls a weder eine hebbare Singularität noch ein Pol ist.
Eine nicht wesentliche Singularität heißt auch außerwesentlich.

Beispiel 26 *Die Funktion $f(z) = \exp(\frac{1}{z})$ aus Beispiel 22 Teil (3) hat bei 0 eine wesentliche Singularität, denn sie ist weder hebbar (sonst wäre $\exp(\frac{1}{z})$ in einer Umgebung von 0 beschränkt) noch ein Pol (da der Grenzwert von $f(z)$ für $z \to a$ nicht existiert).*

Satz 15.8 *(Satz von Casaroti-Weierstrass)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $a \in \mathbb{C}\backslash D$ eine wesentliche Singularität von f. Dann kommt f auf jeder beliebigen punktierten Umgebung von a jeder komplexen Zahl $b \in \mathbb{C}$ beliebig nahe. Das heißt

$$\forall\ \dot{\mathrm{U}}_\delta(a) \subseteq D \qquad \forall\, b \in \mathbb{C} \qquad \forall\ \varepsilon > 0 \qquad \exists\, z \in \dot{\mathrm{U}}_\delta(a) \qquad |f(z) - b| < \varepsilon$$

Beweis. Wir nehmen an, dass die Aussage falsch sei, das heißt

$$\exists\ \dot{\mathrm{U}}_\delta(a) \subseteq D \qquad \exists\, b \in \mathbb{C} \qquad \exists\ \varepsilon > 0 \qquad \forall\, z \in \dot{\mathrm{U}}_\delta(a) \qquad |f(z) - b| \geq \varepsilon$$

Definiere

$$\begin{aligned} g : \dot{\mathrm{U}}_\delta(a) &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{f(z) - b} \end{aligned}$$

Die so definierte Funktion g ist wegen $|f(z) - b| \geq \varepsilon > 0$ holomorph und durch $\frac{1}{\varepsilon}$beschränkt. nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz 15.2 ist a eine hebbare Singularität von g, daher gibt es eine holomorphe Fortsetzung $\tilde{g} : \mathrm{U}_\delta(a) \to \mathbb{C}$ von g.
Fall I ($\tilde{g}(a) \neq 0$): Für $z \in \mathrm{U}_\delta(a)$ setze

$$\tilde{f}(z) \ := \ \frac{1}{\tilde{g}(z)} + b$$

Da diese Funktion wegen $\tilde{g}(a) \neq 0$ überall auf $\mathrm{U}_\delta(a)$ holomorph ist, ist $\tilde{f}$ eine holomorphe Fortsetzung von f. Also ist a eine hebbare Singularität von f. Dies wiederspricht der Voraussetzung, das a eine wesentliche Singularität ist.

Fall II ($\tilde{g}(a) = 0$): In diesem Fall hat Taylorentwicklung von $\tilde{g}$ um a keinen konstanten Term, also gibt es ein $m \in \mathbb{N}_{>0}$ und eine holomorphe Funktion $h : \mathrm{U}_\delta(a) \to \mathbb{C}$ mit $h(a) \neq 0$, so dass wir $\tilde{g}$ schreiben können als

$$\tilde{g}(z) \ = \ (z - a)^m \cdot h(z)$$

Für $z \in \dot{\mathrm{U}}_\delta(a)$ gilt dann

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{\tilde{g}(z)} + b \ = \ \frac{1 + b \cdot (z-a)^m \cdot h(z)}{(z-a)^m \cdot h(z)} \\ &= \frac{\frac{1}{h(z)} + b \cdot (z-a)^m}{(z-a)^m} \end{aligned}$$

Der Zähler ist auf einer Umgebung $\mathrm{U}_{\delta'}(a)$ für ein $0 < \delta' < \delta$ holomorph, denn h hat auf dieser Umgebung keine Nullstellen. Nach Definition ist a dann ein Pol von f. Dies wiederspricht der Voraussetzung, das a eine wesentliche Singularität ist. $\square$

16 Laurent-Reihen

Zur weiteren Charakterisierung von Singularitäten $a \in \mathbb{C}$ betrachten wir sogenannte Laurent-Reihen. Das sind Reihen der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \cdot (z-a)^n$$

In diesem Abschnitt zeigen wir

Die Singularität a ist dann hebbar, wenn $a_n = 0$ für $n < 0$ gilt.

Die Singularität a ist dann ein Pol der Ordnung $m > 0$, wenn $a_n = 0$ für $n < -m$ und $a_{-m} \neq 0$ gilt.

Damit ist die Singularität wesentlich, wenn $a_n \neq 0$ für unendlich viele negative Indizes ist. Als ersten Schritt beweisen wir die Existenz und Eindeutigkeit der Laurent-Trennung aus welcher wir dann die Laurent-Reihe ableiten.

Definition 16.1 *(Ringgebiet)*
Sei $a \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl und seien $0 \leq r < R \leq \infty$ reelle Zahlen. Das Ringgebiet um a von Innenradius r und Außenradius R ist definiert als

$$\mathfrak{R}_{r,R}(a) \;:=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \mid r < |z-a| < R \right\} \;=\; \mathrm{U}_R(a) \backslash \overline{\mathrm{U}_r(a)}$$

Anmerkung Die soeben definierte Menge $\mathfrak{R}_{r,R}(a)$ ist offen und zusammenhängend, also tatsächlich ein Gebiet. Weiter ist das Ringgebiet eine Verallgemeinerung der punktierten Umgebung, denn

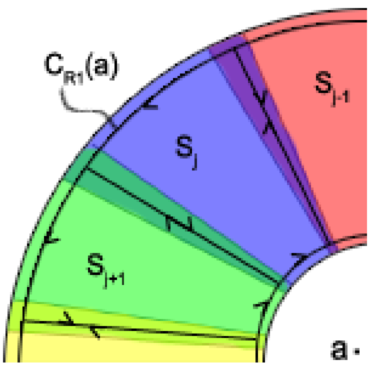
$$\mathfrak{R}_{0,R}(a) \;=\; \dot{\mathrm{U}}_R(a)$$

Bemerkung 16.2 *Seien $a \in \mathbb{C}$, $r, R \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq r < R \leq \infty$ und $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_{r,R}(a)$. Weiter sei $G : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann gilt für alle $r_1, R_1 \in \mathbb{R}$ mit $r < r_1 < R_1 < R$:*

$$\int_{C_{r_1}(a)} G(w)\, dw \;=\; \int_{C_{R_1}(a)} G(w)\, dw$$

Beweis. Teile das Ringgebiet in $n \in \mathbb{N}$ sich überlappende Segmente S_j auf. Diese Segmente sind offensichtlich Sterngebiete, wenn sie klein genug sind (Wähle als Sternmittelpunkt den Schnittpunkt zweier Tangenten an $C_{r_1}(a)$ nahe bei $C_{R_1}(a)$).

Wähle nun für jede Überlappungsfläche eine Verbindungsstrecke C_j zwischen $C_{r_1}(a)$ und $C_{R_1}(a)$ so dass $C_j \subset S_j \cap S_{j-1}$. Definiere zu jedem Segment S_j einen Integrationsweg W_j wie folgt:
Starte beim Schnittpunkt von C_j mit $C_{R_1}(a)$ und folge dem Kreisbogen in mathematisch positiver Richtung bis zu seinem Schnittpunkt mit C_{j+1}. Folge nun der Strecke C_{j+1} bis zu ihrem Schnittpunkt mit $C_{r_1}(a)$ und folge von dort aus dem inneren Kreisbogen in mathematisch negativer Richtung bis zu seinem Schnittpunkt mit C_j. Folge dieser Strecke nun zurück zum Startpunkt.



Wir haben nun zu jedem Segment S_j einen geschlossenen Integrationsweg $W_j \subset S_j$ also gilt nach dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete

$$\int_{W_j} G(w)\, dw \;=\; 0 \qquad \text{für alle } W_j$$

Addiere nun die so konstruierten Integrale, dann gilt

$$0 \;=\; \sum_{j=1}^{n} \int_{W_j} G(w)\,dw \;=\; \int_{C_{R_1}(a)} G(w)\,dw - \int_{C_{r_1}(a)} G(w)\,dw$$

denn jede Strecke C_j wird einmal in der einen und einmal in der anderen Richtung durchlaufen, so dass sich die Integrale darüber wegheben. Es bleiben also die Integrale über die Kreisbögen von Radius R_1 (positiv durchlaufen) sowie die Integrale über die Kreisbögen vom Radius r_1 (negativ durchlaufen) übrig. □

Achtung Wie in diesem Beweis gesehen, können wir eine Ringgebiet zwar mit einer endlichen Anzahl von Elementargebieten so überdecken, dass bei je zwei Segmenten der Schnitt nicht-leer und zusammenhängend ist, dennoch ist ein Ringgebiet $\mathfrak{R}$ <u>kein</u> Elementargebiet, da wir $\mathfrak{R}$ nicht als Vereinigung von zwei Gebieten schreiben können, deren Schnitt zusammenhängend und nicht-leer ist (es wird immer mindestens zwei disjunkte Schnittmengen geben).

Definition und Satz 16.3 *(Laurent-Zerlegung)*
Seien $o < r < R < \infty$ reelle Zahlen, dann setze $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_{r,R}(0)$. Weiter sei $f : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gibt es zwei holomorphe Funktionen

$$g : \mathrm{U}_R(0) \to \mathbb{C} \qquad \textit{und} \qquad h : \mathrm{U}_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$$

mit $h(0) = 0$, so dass für alle $z \in \mathfrak{R}$ gilt

$$f(z) \;=\; g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right)$$

Die Funktionen g und h sind durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. Wir nennen g den Nebenteil und h den Hauptteil von f bezüglich $\mathfrak{R}$.

Beweis. 1. Eindeutigkeit:
Seien g, h und $\tilde{g}, \tilde{h}$ Funktionen mit den im Satz geforderten Eigenschaften, dann setze

$$\begin{aligned} G(z) &:= g(z) - \tilde{g}(z) && \text{für } z \in \mathrm{U}_R(0) \\ H(z) &:= h(z) - \tilde{h}(z) && \text{für } z \in \mathrm{U}_{\frac{1}{r}}(0) \end{aligned}$$

Die Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich holomorph. Nach Voraussetzung gilt

$$g(z) + h\left(\frac{1}{z}\right) \;=\; f(z) \;=\; \tilde{g}(z) + \tilde{h}\left(\frac{1}{z}\right)$$

für alle $z \in \mathfrak{R}$. Nach Umformung erhalten wir $G(z) = -H(\frac{1}{z})$ für $z \in \mathfrak{R}$. Setze

$$F(z) \;:=\; \begin{cases} G(z) & \text{falls } z \in \mathrm{U}_R(0) \\ -H(\frac{1}{z}) & \text{falls } |z| > r \end{cases}$$

Die Funktion F ist wegen $G(z) = -H(\frac{1}{z})$ für $z \in \mathrm{U}_R(0)$ mit $|z| > r$ wohldefiniert auf ganz $\mathbb{C}$. Da sowohl G als auch H holomorph sind, ist $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ganz. Weiter ist F beschränkt, denn sei $r < \rho < R$, dann ist G auf $\overline{\mathrm{U}_\rho(0)}$ und H auf $\overline{\mathrm{U}_{\frac{1}{\rho}}(0)}$ beschränkt. Nach dem Satz von Liouville 13.3 ist F konstant mit $F(z) = c \in \mathbb{C}$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Es gilt

$$c \;=\; \lim_{z\to\infty} F(z) \;=\; \lim_{z\to\infty} -H\left(\frac{1}{z}\right) \;=\; (-1)\cdot \lim_{z\to\infty} \left[h\Big(\frac{1}{z}\Big) - \tilde{h}\Big(\frac{1}{z}\Big)\right] \;=\; 0$$

Also folgen $G(z) = 0$ für alle $z \in \mathrm{U}_R(0)$ und $H(\frac{1}{z}) = 0$ für $z \in \mathrm{U}_{\frac{1}{r}}(0)$. Das heißt aber nicht anderes als dass $g = \tilde{g}$ und $h = \tilde{h}$ gelten.

2. Existenz

Seien $r_1, R_1 \in \mathbb{R}$ mit $r < r_1 < R_1 < R$. Wir zeigen die Existenz der Zerlegung auf $\mathfrak{R}' := \mathfrak{R}_{r_1,R_1}(0)$. Dadurch, dass r_1 und R_1 beliebig sind folgt daraus die Existenz der Zerlegung auf $\mathfrak{R}$. Sei $z \in \mathfrak{R}'$ gegeben dann definiere für $w \in \mathfrak{R}'$

$$\tilde{G}(w) \;:=\; \begin{cases} \frac{f(w)-f(z)}{w-z} & \text{falls } z \neq w \\ f'(z) & \text{falls } z = w \end{cases}$$

dann ist $\tilde{G} : \mathfrak{R}' \to \mathbb{C}$ nach Bemerkung 6.3 stetig auf ganz $\mathfrak{R}'$ und sogar holomorph auf $\mathfrak{R}' \setminus \{z\}$. Nach dem Riemannschen Hebbarkeitssatz gibt es eine holomorphe Fortsetzung $G : \mathfrak{R}' \to \mathbb{C}$ von $\tilde{G}$, denn $\tilde{G}$ ist wegen der Stetigkeit auf jeder Umgebung von z beschränkt. Wegen der Stetigkeit folgt weiter $G = \tilde{G}$ auf $\mathfrak{R}'$ und insbesondere in $z = w$. Nach Bemerkung 16.2 gilt

$$\int_{C_{R_1}(0)} G(w)\, dw \;=\; \int_{C_{r_1}(0)} G(w)\, dw$$

Wenn wir auf beiden Seiten den Differenzenquotienten einsetzen, und die Integrale auseinander ziehen erhalten wir die Gleichung

$$\int_{C_{R_1}(0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - f(z) \int_{C_{R_1}(0)} \frac{1}{w-z} \;=\; \int_{C_{r_1}(0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw - \int_{C_{r_1}(0)} \frac{f(z)}{w-z} \tag{16.1}$$

Betrachten wir nun die Integrale im Einzelnen, es gelten

$$I_2 \;:=\; f(z) \int_{C_{R_1}(0)} \frac{1}{w-z}\, dw \;=\; 2\pi i \cdot f(z)$$

nach der Cauchy'schen Integralformel 12.2, denn $|z| < R_1$.

$$I_4 \;:=\; f(z) \int_{C_{r_1}(0)} \frac{1}{w-z}\, dw \;=\; 0$$

nach dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete 11.6, denn $|z| > r_1$.

$$I_1 \;:=\; \int_{C_{R_1}(0)} \frac{1}{w-z}\, dw \;=\; 2\pi i \cdot g(z) \qquad \text{mit } g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}(0)} \frac{f(w)}{w-z}\, dw$$

$$I_3 \;:=\; \int_{C_{r_1}(0)} \frac{1}{w-z}\, dw \;=\; 2\pi i \cdot h\Big(\frac{1}{z}\Big) \qquad \text{mit } h(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{R_1}(0)} \frac{z \cdot f(w)}{zw-1}\, dw$$

Wir erhalten also aus Gleichung (16.1)

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 \;=\; I_3 - I_4 \;&\Leftrightarrow\; 2\pi i \cdot g(z) - 2\pi i \cdot f(z) \;=\; 2\pi i \cdot h\Big(\frac{1}{z}\Big) - 0 \\ &\Leftrightarrow\; f(z) \;=\; g(z) + h\Big(\frac{1}{z}\Big) \end{aligned}$$

Die so definierten Funktionen $g : \mathrm{U}_{R_1}(0) \to \mathbb{C}$ und $h : \mathrm{U}_{\frac{1}{r_1}}(0) \to \mathbb{C}$ sind nach Bemerkung 12.3 holomorph. Die Eigenschaft $h(0) = 0$ ist offensichtlich. $\square$

Definition 16.4 *(Laurent-Reihen)*
Eine unendliche Reihe der Form

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \qquad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}$$

ist ein Paar von unendlichen Reihen

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \, , \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right)$$

Der Grenzwert dieser Reihe ist definiert als die Summe der Grenzwerte der beiden Teile, sofern diese existieren. Das heißt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Weiter heißt diese Reihe (absolut) konvergent, wenn $\sum a_{-n}$ *und* $\sum a_n$ *(absolut) kovergent sind.*
Eine Laurent-Reihe mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{C}$ *ist eine Reihe der Form*

$$L_a(z) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \, (z-a)^n \qquad \text{mit } a_n \in \mathbb{C}$$

Weiter heißt eine Laurent-Reihe gleichmäßg konvergent, lokal gleichmäßig konvergent, gleichmäßig konvergent auf kompakten Mengen (auch eventuell mit dem Zusatz „absolut“), wenn sowohl

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \, (z-a)^{-n}$$

als auch

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \, (z-a)^n$$

diese Eigenschaft haben.

Satz 16.5 *(Laurent-Entwicklung)*
Seien $0 \leq r < R \leq \infty$ und $a \in \mathbb{C}$. Bezeichne $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_{r,R}(a)$ und sei $f : \mathfrak{R} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gelten

(a) *f lässt sich auf $\mathfrak{R}$ eindeutig durch eine Laurent-Reihe*

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\,(z-a)^n$$

darstellen, welche auf $\mathfrak{R}$ absolut und auf jeder kompakten Teilmenge von $\mathfrak{R}$ sogar gleichmäßig absolut konvergiert.

(b) ***Koeffizientenformel:*** *Es gilt*

$$a_n \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_\rho(a)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw$$

für jedes $r < \rho < R$ und alle $n \in \mathbb{Z}$.

Beweis. Ohne Einschränkung sei $a = 0$[7]. Nach Satz 16.3 gibt es für alle $z \in \mathfrak{R}$ eine eindeutige Laurent-Zerlegung $f(z) := g(z) + h(\frac{1}{z})$ mit den holomorphen Funktionen $g : \mathrm{U}_R(0) \to \mathbb{C}$ und $h : \mathrm{U}_{\frac{1}{r}}(0) \to \mathbb{C}$ und $h(0) = 0$. Nach der Taylor-Formel 13.6 gibt es zu g und h je eine eindeutige Taylor-Reihe

$$g(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n \qquad \text{und} \qquad h(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} b_n\, z^n$$

Definiere $a_{-n} := b_n$ für $n \in \mathbb{N}_{>0}$, dann folgt

$$\begin{aligned} f(z) \;&=\; g(z) + h\Big(\frac{1}{z}\Big) \\ &=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}\, z^{-n} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

Weiter sind die Taylorreihen von g und h absolut und auf kompakten Teilmengen sogar gleichmäßig absolut konvergent. Damit folgen diese Aussagen unmittelbar für die Laurent-Reihe von f und Teil (a) ist bewiesen. Für die Koeffizientenformel sei zunächst $n \geq 0$, dann gilt nach Teil (a) zusammen mit der verallgemeinerten Cauchy'schen Integralformel

$$a_n \;=\; \frac{g^{(n)}(a)}{n!} \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(0)} \frac{g(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \tag{16.1}$$

für $\rho < R$. Mit der Substitution $w = \frac{1}{v}$ und dem Cauchy'schen Integralsatz gilt

$$\begin{aligned} \int_{C_\rho(0)} \frac{h\big(\frac{1}{w}\big)}{w^{n+1}}\,dw \;&=\; \int_{C_{\frac{1}{\rho}}(0)} \frac{h(v)}{\big(\frac{1}{v}\big)^{n+1}}\,\frac{1}{v^2}\,dv \\ &=\; \int_{C_{\frac{1}{\rho}}(0)} h(v)\cdot v^{n-1}\,dv \;=\; 0 \end{aligned}$$

[7] Falls $a \neq 0$ ersetze f durch $\tilde{f}(z) := f(z+a)$.

denn $h(v)\, v^{n-1}$ ist auf ganz $\mathrm{U}_{\frac{1}{r}}(0)$ holomorph[8]. Damit folgt aus Gleichung (16.1)

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(0)} \frac{f(w)}{(w)^{n+1}}\, dw \\
&= \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{g^{(n)}(a) + h^{(n)}\big(\frac{1}{a}\big)}{n!} \\
&= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_\rho(0)} \frac{g(w)}{(w)^{n+1}}\, dw + \int_{C_\rho(0)} \frac{h(\frac{1}{w})}{(w)^{n+1}}\, dw \right) \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(0)} \frac{g(w)}{(w)^{n+1}}\, dw
\end{aligned}$$

Die Formel für $n < 0$ folgt analog mit vertauschten Rollen von h und g. □

Anmerkung Die Eindeutigkeit der Laurent-Reihe in Satz 16.5 folgt sowohl aus der Eindeutigkeit von Laurent-Zerlegung und Taylor-Reihe, als auch aus der Koeffizientenformel.

Beispiel 27 *(Laurent-Reihen I)*

- *Die erste Funktion aus Beispiel 22 hat eine hebbare Singularität bei $a = 0$. wir erwarten, dass die Laurent-Reihe um a mit der Taylorreihe der Funktion um a übereinstimmt, und tatsächlich gilt*

$$\frac{\sin(z)}{z} = \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \cdot z^{2n}}_{=g(z)} + \underbrace{0}_{=h(\frac{1}{z})}$$

- *Die zweite Funktion aus diesem Beispiel hat einen Pol, wir erwarten einen endlichen Hauptteil für die Laurent-Entwicklung um $a = 0$. Es gilt*

$$\frac{\exp(z)}{z} = \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \underbrace{\frac{1}{z}}_{=h(\frac{1}{z})} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}}_{=g(z)}$$

- *Die letzte Funktion aus Beispiel 22 hat eine wesentliche Singularität bei $a = 0$. Wir Erwarten unendlichen Hauptteil der Laurent-Entwicklung um a. Es gilt*

$$\exp\Big(\frac{1}{z}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\big(\frac{1}{z}\big)^n}{n!} = \underbrace{1}_{=g(z)} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{z^n}{(-n)!}}_{=h(\frac{1}{z})}$$

[8] Auch für $n = 0$ ist $h(v)\, v^{n-1}$ holomrph, denn betrachte die Taylor-Reihe $\frac{h(v)}{v} = \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_n v^{n-1}$.

Beispiel 28 *(Laurent-Reihen II)*
Wir betrachten die Funktion

$$f(z) \;:=\; \frac{2}{(z-1)(z-3)} \;=\; \frac{1}{1-z}+\frac{1}{z-3}$$

An der Partialbruch-Zerlegung ist gut zu sehen, dass $f:\mathbb{C}\setminus\{1,3\}\to\mathbb{C}$ holomorph ist. Wir betrachten einige Laurent-Entwicklungen von f auf verschiedenen Ringgebieten:

(i) $\mathfrak{R}:=\mathfrak{R}_{0,1}(1)$ *Wir entwickeln also um die Singularität $a=1$, so dass die Singularität $b=3$ nicht im Ringgebiet liegt. Die Laurent-Entwicklung von $\frac{1}{1-z}$ ist $\frac{-1}{z-1}$. Für $\frac{1}{z-3}$ gilt für $\frac{|z-1|}{2}<1$ mit der geometrischen Reihe die folgende Umformung*

$$\frac{1}{z-3} \;=\; \frac{-1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} \;=\; -\frac{1}{2}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-1}{2}\right)^n$$

Damit erhalten wir als Laurent-Entwicklung von f auf $\mathfrak{R}$:

$$f(z)=\frac{-1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(z-1)^n$$

(ii) *Laurent-Entwicklung um 0 mit verschiedenen Radien*

(a) $\mathfrak{R}:=\mathfrak{R}_{0,1}(0)=\dot{\mathrm{U}}_1(0)$ *Wir entwickeln auf der Punktierten Umgebung um 0 mit Radius 1. Die Funktion f ist holomorph auf $\mathrm{U}_1(0)$ also insbesondere auch auf $\mathfrak{R}$. Mit der geometrischen Reihe gelten*

$$\frac{1}{1-z} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}z^n \qquad \text{da } |z|<1$$

$$\frac{1}{z-3} \;=\; \frac{-1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{3}} \;=\; -\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{3}\right)^n \;=\; -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n \qquad \text{da } |z|<3$$

Insgesamt erhalten wir die Laurent-Reihe von f auf $\mathfrak{R}$ als

$$f(z) \;=\; \frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-3} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3^{n+1}}\right)\cdot z^n$$

Also ist die Laurent-Reihe gleich der Taylor-Reihe, was wir wegen der Holomorphie von f auf ganz $\mathrm{U}_1(0)$ erwartet haben.

(b) $\mathfrak{R}:=\mathfrak{R}_{1,3}(0)$ *Wir entwickeln auf dem Ringgebiet um 0, welches genau zwischen den beiden Singularitäten 1 und 2 liegt. f ist holomorph auf $\mathfrak{R}$ und mit der geometrischen Reihe gilt*

$$\frac{1}{z-1} \;=\; \frac{-11}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} \;=\; -\sum_{n=1}^{\infty}z^{-n} \qquad \text{da } |z|>1$$

Die Formel für $\frac{1}{z-3}$ aus Teil (a) können wir weiter verwenden, da $|z|<3$ für $z\in\mathfrak{R}$ gilt. Wir erhalten also die Laurent-Entwicklung von f auf $\mathfrak{R}$ als

$$f(z),=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z-3} \;=\; -\sum_{n=-\infty}^{-1}z^n-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^{n+1}}z^n$$

Diese Laurent-Reihe hat unendlichen Haupt- und Nebenteil ***obwohl*** *keine der beiden Singularitäten eine wesentliche ist!*

(c) $\mathfrak{R} := \mathfrak{R}_{3,\infty}(0) = \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{U}_3(0)}$ *Wir entwicklen auf* $\mathbb{C}$ *ohne die abgeschlossene Kreisscheibe mit Radius* 3 *um* 0*, das heißt beide Singularitäten liegen im „Loch" des Ringgebietes, also ist* f *holomorph auf* $\mathfrak{R}$*. Wir bilden eine Weitere Umformung mit der geometrischen Reihe. Für* $|z| > 3$ *gilt*

$$\frac{1}{z-3} \;=\; \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{3}{z}} \;=\; \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{3^{n-1}}\, z^n$$

Die Formel für $\frac{1}{1-z}$ *aus Teil (b) können wir weiter verwenden, da* $|z| > 1$ *für* $z \in \mathfrak{R}$ *gilt. Wir erhalten also die Laurent-Entwicklung von* f *auf* $\mathfrak{R}$ *als*

$$f(z), = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-3} \;=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{3^{n-1}} - 1 \right) z^n$$

Diese Laurent-Reihe hat überhaupt keinen Nebenteil, obwohl keine der Singularitäten wesentlich ist.

Bei Entwicklung um eine Singularität können wir die Art der Singularität am Hauptteil der Laurent-Reihe ablesen: Ist die Laurent-Reihe gleich der Taylor-Reihe so ist die Singularität hebbar. Hat die Laurent-Reihe einen Hauptteil mit endlich vielen Summanden mit höchstem Grad m*, dann ist die Singularität ein Pol* m*-ter Ordnung. Hat die Laurent-Reihe einen unendlichen Hauptteil, so ist die Singularität wesentlich.*

Achtung: *Bei Entwicklung um einen beliebigen Punkt, der keine Singularität ist, ist die Form der Laurent-Reihe im Allgemeinen unabhängig von der Art der Singularität.*

Kapitel IV

Der Residuensatz

17 Umlaufzahl

Wir betrachten die k-Fach umlaufende Kreislinie $C \subset \mathbb{C}$ um $a \in \mathbb{C}$ von Radius $r > 0$, das heißt

$$\begin{array}{rcll} \varphi_k : [0,1] & \to & C \subset \mathbb{C} & \\ t & \mapsto & a + r \cdot e^{2\pi i k t} & \qquad k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Für $z \notin C$ setzen wir

$$\chi(C; z) \;:=\; \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w - z}\, dw$$

Dann gilt

$$\chi(C; z) \;=\; \begin{cases} k & \text{falls } |z - a| < r \\ 0 & \text{falls } |z - a| > r \end{cases}$$

denn wir können C als stückweise glatte Kurve aus k-mal der Kreislinie $C_r(a)$ zusammensetzen, also

$$C \;=\; \sum_{j=1}^{k} C_r(a)$$

Für $|z - a| < r$ erhalten wir mit der Cauchy'schen Integralformel (Satz 12.2)

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_r(a)} \frac{1}{w - z}\, dw \;=\; 1$$

Für $|z - a| > r$ erhalten wir mit dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete 11.6

$$\frac{1}{2\pi i} \cdot \int_{C_r(a)} \frac{1}{w - z}\, dw \;=\; 0$$

denn $\frac{1}{w-z}$ ist holomorph auf $\mathrm{U}_{r+\varepsilon}(a)$ für $\varepsilon > 0$.
In diesem Beispiel gibt die „Zahl" $\chi(C; z)$ an, wie oft der Punkt z von der Kurve C umlaufen wird. Dieser Umstand motiviert die folgende

Definition 17.1 *(Umlaufzahl)*
Sei $C \subset \mathbb{C}$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve. Wir definieren

$$\chi(C; z) \; := \; \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w - z} \, dw$$

für $z \notin C$ und nennen $\chi(C; z)$ die Umlaufzahl von C um den Punkt z.

Diese „ungeometrische“ Funktion $\chi(C; z)$ stimmt mit der Anschauung überein, aber wir können das in dieser Vorlesung nicht beweisen. Obwohl wir diese Eigenschaft in keinem Beweis gebrauchen, wollen wir die so „ungeometrisch“ definierte Umlaufzahl untersuchen und dabei einige Plausibilitätsgründe für die obige These angeben. Als erstes zeigen wir, dass die Umlaufzahl tatsächlich eine ganze Zahl ist:

Satz 17.2 *Sei $C \subset \mathbb{C}$ eine glatte geschlossene Kurve, dann ist $\chi(C; z) \in \mathbb{Z}$ für $z \notin C$.*

Beweis. Sei C durch die Parametergleichung $\varphi : [a, b] \to C$ gegeben, dann gilt

$$\chi(C; z) \; = \; \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w - z} \, dw \; = \; \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - z} \, du$$

Wir definieren die Hilfsfunktion

$$h(t) := \int_a^t \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - z} \, du$$

für $t \in [a, b]$. Wegen der Glattheit von C ist h differenzierbar mit $h'(t) = \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - z}$

> **Beweisidee.** Zur Veranschaulichung woher die Formeln im weiteren Beweis kommen und mit welchem Ziel wir diese herleiten betrachten wir die *falsche* Rechnung:
>
> $$\begin{aligned} h(t) \quad &= \quad \int_a^t \frac{\varphi'(u)}{\varphi(u) - z} \, du \text{ „=“ } \int_a^t \operatorname{Log}\big(\varphi(u) - z\big)' \, du \\ &\text{„=“} \quad \operatorname{Log}\big(\varphi(t) - z\big) - \operatorname{Log}\big(\varphi(a) - z\big) \end{aligned}$$
>
> Damit erhalten wir die Vermutung, dass
>
> $$e^{h(t)} \; = \; \frac{\varphi(t) - z}{\varphi(a) - z}$$
>
> gilt. Leider mach die Periodizität des komplexen Logarithmus Probleme, so dass die obige Rechnung so nicht stimmt. Wir werden nun das vermutete Ergebnis ohne den komplexen Logarithmus beweisen.

Wir definieren

$$H(t) \; := \; e^{-h(t)} \cdot \big(\varphi(t) - z\big)$$

Dann ist H differenzierbar. Betrachte also die Ableitung

$$\begin{aligned} H'(t) \; &= \; -h'(t) \cdot e^{-h(t)} \cdot \big(\varphi(t) - z\big) + e^{-h(t)} \cdot \varphi'(t) \\ &= \; -\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t) - z} \cdot e^{-h(t)} \cdot \big(\varphi(t) - z\big) + e^{-h(t)} \cdot \varphi'(t) \; = \; 0 \end{aligned}$$

Also ist H lokal konstant. Da $[a, b]$ zusammenhängend ist, ist H auf dem gesamten Intervall konstant. Damit gilt für alle $t \in [a, b]$

$$H(t) \;=\; H(a) \;=\; e^{-h(a)}\big(\varphi(a) - z\big) \;=\; \big(\varphi(a) - z\big)$$

Wir erhalten durch umstellen dieser Formel

$$e^{h(t)} \;=\; \frac{\varphi(t) - z}{\varphi(a) - z}$$

Diesen Ausdruck wollen wir nun bei b auswerten. Weil die Kurve C geschlossen ist gilt $\varphi(a) = \varphi(b)$, also

$$e^{h(b)} \;=\; \frac{\varphi(b) - z}{\varphi(a) - z} \;=\; 1$$

Damit ist $h(b)$ nach Bemerkung 8.5 von der Form $2\pi i k$ für $k \in \mathbb{Z}$. Insgesamt folgt

$$\chi(C; z) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot h(b) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i \cdot k \;=\; k \in \mathbb{Z}$$

□

Anmerkung Dieser Beweis kann (mit Modifikationen) auch für nur stückweise glatte, geschlossene Kurven geführt werden.

Bemerkung 17.3 *Sei $C \subset \mathbb{C}$ eine glatte geschlossene Kurve und seien weiter zwei komplexe Zahlen $z_1, z_2 \notin C$ so gegeben, dass es eine stetige Kurve γ, gegeben durch $\psi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ mit $\psi(0) = z_1$ und $\psi(1) = z_2$, gibt, welche die Kurve C nicht schneidet, das heißt $\psi(t) \notin C$ für alle $t \in [0, 1]$.*
Dann gilt $\chi(C; z_1) \;=\; \chi(C; z_2)$.

Beweis. Definiere

$$\alpha(t) \;:=\; \chi\big(C; \psi(t)\big) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{w - \psi(t)}\, dw$$

dann ist α eine stetige Funktion, deren Bild in $\mathbb{Z}$ liegt. Eine stetige Funktion die nur Werte einer diskreten Menge annimmt ist lokal konstant. Da das Intervall $[0, 1]$ zusammenhängend ist, ist α konstant auf $[0, 1]$ und damit gilt

$$\alpha(t) \;=\; \chi\big(C; \psi(t)\big) \;=\; \chi\big(C; \psi(0)\big) \;=\; \chi(C; z_1)$$

für alle $t \in [0, 1]$, also insbesondere auch für 1. □

Definition 17.4 *(Inneres & Äußeres einer Kurve)*
Sei $C \subset \mathbb{C}$ eine geschlossene, stückweise glatte Kurve. Wir definieren das Innere von C als

$$\mathrm{Int}(C) \;:=\; \big\{\, z \in \mathbb{C} \setminus C \;\big|\; \chi(C; z) \neq 0 \,\big\}$$

Analog definieren wir das Äußere von C als

$$\mathrm{Ext}(C) \;:=\; \big\{\, z \in \mathbb{C} \setminus C \;\big|\; \chi(C; z) = 0 \,\big\}$$

Satz 17.5 *Sei $C \subset \mathbb{C}$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve, dann ist das Äußere von C eine nicht-leere, unbeschränkte und das Innere von C eine beschränkte Menge.*

Beweis. Für $z \in \mathbb{C}$ mit $z = 0$ oder falls $z \neq 0$ und $\frac{1}{z} \notin C$ definiere

$$\beta(z) \ := \ \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{z}{wz - 1}\, dw$$

dann ist β stetig und es gilt $\beta(z) = \chi(C; \frac{1}{z})$, falls $z \neq 0$ und $\frac{1}{z} \notin C$. Ferner gilt $\beta(0) = 0$. Insbesondere ist β stetig in 0 und lokal konstant, also gibt es ein $\delta > 0$, so dass $\beta(z) = 0$ für $z \in \mathrm{U}_\delta(0)$. Damit folgt dann für alle $z \in \dot{\mathrm{U}}_\delta(0)$, dass $\chi(C; z) = 0$ also

$$\chi(C; z) = 0 \qquad \forall\, |z| > \frac{1}{\delta}$$

Damit gilt

$$\mathrm{Ext}(C) \ \supseteq \ \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| > \frac{1}{\delta} \,\right\} \ \neq \ \varnothing$$

also ist $\mathrm{Ext}(C)$ unbeschränkt und insbesondere nicht leer. Weiter folgt

$$\mathrm{Int}(C) \ \subseteq \ \left\{\, z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z| \leq \frac{1}{\delta} \,\right\}$$

also ist $\mathrm{Int}(C)$ als Teilmenge einer beschränkten Menge selbst beschränkt. $\square$

18 Residuum und der Residuensatz

Sei $a \in \mathbb{C}$ und betrachten wir die Funktion $f(z) = (z - a)^{-n}$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für jede geschlossene, stückweise glatte Kurve $C \subset \mathbb{C}$ mit $a \in \mathrm{Int}(C)$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{1}{(z-a)^n} dz \ = \ \begin{cases} 0 & \text{falls } n \neq 1 \\ 1 & \text{falls } n = 1 \end{cases}$$

Für $n = 1$ bleibt also etwas von der Funktion $f(z) = (z - a)^{-n}$ über. Diese beobachtung motivert die folgende

Definition 18.1 *(Residuum)*
Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Singularität $a \in \mathbb{C} \setminus D$. Ferner sei

$$f(z) \ = \ \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \,(z - a)^n$$

die Laurent-Reihe von f auf $\mathfrak{R}_{0,R}(a) \ = \ \dot{\mathrm{U}}_R(0) \subseteq D$ mit einem $R > 0$. Wir nennen

$$\mathrm{Res}(f; a) \ := \ a_{-1}$$

das Residuum von f bei a.

Bemerkung 18.2 *Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit einer Singularität $a \in \mathbb{C} \setminus D$. Es gelten*

(a) *Residuenformel*

$$\operatorname{Res}(f; a) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\rho(0)} f(w)\, dw$$

für ein beliebiges $\rho \in (0, R)$.

(b) *Ist a hebbar, dann gilt* $\operatorname{Res}(f; a) = 0$.

Beweis. Teil **(a)** ist die Koeffizientenformel für Laurent-Reihen aus Satz 16.5 für a_{-1}. In Teil **(b)** ist ebenfalls nichts zu zeigen, da bei hebbarer Singularität die Laurent-Reihe mit der Taylor-Reihe übereinstimmt. □

Satz 18.3 *(Residuensatz)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und seien $z_1, \ldots, z_k \in D$ für $k \in \mathbb{N}$ paarweise verschiedene Punkte. Weiter seien $f : D \setminus \{z_1, \ldots, z_k\} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion und $C \subset \mathbb{C}$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve. Dann gilt

$$\int_C f(w)\, dw \;=\; 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j) \cdot \chi(C; z_j)$$

Beweis. Die Laurent-Reihe um jeden der Punkte z_j ist von der Form

$$f(z) \;=\; \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{n,j}\, (z - z_j)^n$$

Die Hauptteile

$$h_j(z) \;:=\; \sum_{n=-\infty}^{-1} a_{n,j}\, (z - z_j)^n$$

dieser Reihen sind je holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{z_j\}$. Wir definieren

$$g(z) \;:=\; f(z) - \sum_{j=1}^{k} h_j(z)$$

dann ist g auf ganz D eine holomorphe Funktion, denn

- für $z \in D \setminus \{Z_1, \ldots, z_k\}$ ist g als differenz holomorpher Funktionen selbst holomorph.

- für $z = z_j$ für ein $j \in \{1, \ldots, k\}$ ist h_j komplex differenzierbar in allen z_l mit $l \neq j$ für $l = 1, \ldots, k$ und

  $$f(z) - h_j(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,j}\, (z - z_j)^n$$

  ist holomorph auf einer Umgebung von z_j.

Mit dem Cauchy'schen Integralsatz folgt also

$$\int_C g(w)\, dw \;=\; 0$$

denn D ist ein Elementargebiet nach Voraussetzung. Fassen wir die Ergebnisse zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_C f(w)\, dw &= \int_C \left(g(w) + \sum_{j=1}^{k} h_j(w) \right) dw \\ &= \sum_{j=1}^{k} \int_C \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{n,j}\,(w-z_j)^n\, dw \qquad (18.1)\end{aligned}$$

Weil die Laurent-Reihe auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert, dürfen in Gleichung (18.1) die Reihenfolge von unendlicher Summation und Integration vertauscht werden. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\int_C f(w)\, dw &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{n=-1}^{-\infty} a_{n,j} \int_C (w-z_j)^n\, dw \\ &\overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{k} a_{-1,j} \int_C (w-z_j)^n\, dw \\ &= \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; z_j) \cdot 2\pi i \cdot \chi(C; z_j)\end{aligned}$$

$(*)$ betrachte die Formel für $(z-a)^{-n}$ aus der Motivation. □

Beispiel 29 *(Residuen)*

- $f(z) := \frac{\sin(z)}{z}$ *Wir wissen bereits aus Beispiel 22, dass f in $a = 0$ eine hebbare Singularität besitzt, also ist f auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzbar. Die Taylor-Reihe dieser holomorphen Fortsetzung ist identisch mit der Laurent-Reihe von f, also gilt* $\operatorname{Res}(f, 0) = 0$

- $g(z) := \frac{\cos(z)}{z}$ *Offensichtlich hat g in $a = 0$ eine Singularität. Die Laurent-Reihe von g ergibt sich als Produkt der Taylor-Reihe von* $\cos(z)$ *mit $\frac{1}{z}$, also*

  $$g(z) \;=\; \frac{1}{z} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n} \;=\; \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n-1}$$

  Damit können wir das Residuum direkt ablesen, und es folgt $\operatorname{Res}(g, 0) = 1$

- $h(z) := \exp(\frac{1}{z})$ *Wir wissen bereits aus Beispiel 22, dass h in $a = 0$ eine wesentliche Singularität hat und kennen die Laurent-Reihe:*

  $$h(z) \;=\; \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{1}{(-n)!} z^n$$

  Damit lässt sich auch hier $\operatorname{Res}(h, 0) = \frac{1}{1!} = 1$ *ablesen.*

- $\tilde{h}(z) := \exp(z^{-2})$ *Auch* $\tilde{h}$ *hat bei* $a = 0$ *eine Singularität. Die Laurent-Reihe von* $\tilde{h}$ *ist*

$$\tilde{h}(z) \; = \; \sum_{n=0}^{-\infty} \frac{1}{(-n)!} z^{2n}$$

Da hier nur gerade Exponenten vorkommen, 1 *aber ungerade ist, gilt* $\operatorname{Res}(\tilde{h}, 0) = 0$.

Satz 18.4 *(Allgemeine Cauchy'sche Integralformel)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ *ein Elementargebiet und* $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorph. Weiter sei* $C \subset D$ *eine stückweise glatte, geschlossene Kurve, dann gilt für alle* $z \in D \backslash C$

$$\chi(C, z) \cdot f(z) \; = \; \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(w)}{w - z} \, dw$$

Beweis. Setze $g(w) := \frac{f(w)}{w-z}$, dann ist g auf $D \backslash \{z\}$ holomorph und es gilt

$$\operatorname{Res}(g, z) \; = \; f(z)$$

denn

$$g(w) \; = \; \frac{1}{w - z} \cdot \left(f(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (w - z)^n \right)$$

Mit dem Residuensatz 18.3 gilt weiter

$$\int_C g(w) \, dw \; = \; \int_C \frac{f(w)}{w - z} \, dw \; = \; 2\pi i \cdot \chi(C, z) \cdot \operatorname{Res}(g, z) \; = \; 2\pi i \cdot \chi(C, z) \cdot f(z)$$

□

Definition 18.5 *(Ordnung)*
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ *offen und* $f : D \to \mathbb{C}$ *holomorph. Weiter sei* $a \in \mathbb{C} \backslash D$ *eine außerwesentliche Singularität von* f.
Die Ordnung von f *an der Stelle* a *ist definiert als eindeutige ganze Zahl* $k \in \mathbb{Z}$ *für die gilt, dass die Laurent-Entwicklung von* f *um* a *von der folgenden Form ist*

$$f(z) \; = \; \sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - a)^n \qquad \text{mit } a_k \neq 0$$

Wir schreiben dann $\operatorname{ord}(f, a) = k$.
Sei $N(z)$ *die Nullfunktion, dann setzen wir* $\operatorname{ord}(N, a) := \infty$
Sei $b \in \mathbb{C} \backslash D$ *eine wesentliche Singularität von* f*, dann setzen wir* $\operatorname{ord}(f, b) := -\infty$.

Anmerkung Es gelten
(i) Ist $\operatorname{ord}(f, a) = k > 0$, dann hat f eine k-fache Nullstelle in a, das heißt
$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(k-1)}(a) = 0$
(ii) Ist $\operatorname{ord}(f, a) = k < 0$, dann hat f einen Pol bei a mit der Polstellenordnung $-k$.

Bemerkung 18.6 *(Rechenregeln für Residuen)*
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f, g : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter sei $a \in \mathbb{C} \setminus D$ eine außerwesentliche Singularität von f und g. Es gelten

(a) *Ist a ein Pol von f mit Polstellenordnung $k > 0$, dann gilt*

$$\operatorname{Res}(f, a) \;=\; \frac{\tilde{f}^{(k-1)}(a)}{(k-1)!} \qquad \text{mit } \tilde{f}(z) := (z-a)^k f(z)$$

Ferner lässt sich für $\operatorname{ord}(f, a) \geq -1$, also falls a ein Pol erster Ordnung oder hebbar ist, das Residuum von f an der Stelle a berechnen durch

$$\operatorname{Res}(f, a) \;=\; \lim_{z \to a} (z-a) \cdot f(z)$$

(b) *Sei a eine hebbare Singularität von f und g. Weiter sei a eine einfache Nullstelle von g, also $g(a) = 0$ und $g'(a) \neq 0$. Dann gilt*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) \;=\; \frac{f(a)}{g'(a)}$$

(c) *Sei $k = \operatorname{ord}(f, a)$ und sei weiter f bei a nicht lokal konstant Null, dann gilt*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) \;=\; k$$

(d) *Sei f bei a nicht lokal konstant Null und sei weiter a eine hebbare Singularität von g, dann gilt*

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f' \cdot g}{f}, a\right) \;=\; \operatorname{ord}(f, a) \cdot g(a)$$

Beweis. Nach der Definition von Polen der Polordnung k (Definition 15.3) hat $\tilde{f}$ bei a eine hebbare Singularität. Nach dem Satz von der Taylor-Entwicklung ist die Taylor-Reihe von $\tilde{f}$ um den Entwicklungspunkt a gegeben als

$$\tilde{f}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Damit ergibt sich die Laurent-Reihe von f um a als

$$f(z) \;=\; (z-a)^{-k} \cdot \tilde{f}(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{f}^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^{n-k}$$

und wir können das Residuum von f bei a ablesen. Es gilt

$$\operatorname{Res}(f, a) \;=\; \tilde{f}^{(k-1)}(a) \cdot \frac{1}{(k-a)!}$$

Damit haben wir den ersten Teil der Aussage **(a)** gezeigt. Ist die Ordnung von f in der Stelle a nun -1, haben wir den zweiten Teil ebenfalls schon gezeigt. Gilt jedoch $\operatorname{ord}(f, a) \geq 0$, dann ist a hebbar und es gilt

$$\operatorname{Res}(f, a) \;=\; 0 \;= (a-a) \cdot f(a) \;=\; \lim_{z \to a} (z-a) \cdot f(z)$$

Nach den Voraussetzungen für Aussage **(b)** sind die Taylorreihen von f und g von der Form

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \, (z-a)^n \\ g(z) &= g'(a) + \sum_{n=2}^{\infty} b_n \, (z-a)^n \end{aligned}$$

Betrachte

$$\begin{aligned} f(z) &:= (z-a) \, \frac{f(z)}{g(z)} \\ &= (z-a) \cdot \frac{f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \, (z-a)^n}{g'(a) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n \, (z-a)^n} \\ &= \frac{f(a) + \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \, (z-a)^n}{g'(a) + \sum\limits_{n=2}^{\infty} b_n \, (z-a)^{n-1}} \end{aligned}$$

Die so definierte Funktion ist als Quotient zweier in a komplex differenzierbarer Funktionen selbst komplex in a differenzierbar. Damit gilt $\operatorname{ord}(F, a) \geq 1$ und mit Aussage (a) folgt dann sofort

$$\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{(z-a)}, a\right) = \operatorname{Res}\left(\frac{f}{g}, a\right) = F(a) = \frac{f(a)}{g'(a)}$$

Nach den Voraussetzungen für Aussage **(c)** ist die Laurent-Reihe von f um a von der Form

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n \, (z-a)^n \qquad \text{mit } a_k \neq 0$$

Auf Übungszettel zehn zeigen wir, dass Laurent-Reihen genau wie Taylor-Reihen termweise ableitbar sind, damit gilt dann

$$f'(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n \, a_n \, (z-a)^{n-1}$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} F(z) &= (z-a) \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} \\ &= (z-a) \cdot \frac{(z-a)^{k-1}}{(z-a)^k} \cdot \frac{k \cdot a_k + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} n \, a_n \, (z-a)^{n-k}}{a_k + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n \, (z-a)^{n-k}} \\ &= \frac{k \cdot a_k + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} n \, a_n \, (z-a)^{n-k}}{a_k + \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n \, (z-a)^{n-k}} \end{aligned}$$

Damit hat $\frac{f'}{f}$ einen Pol der Polordnung 1 oder eine hebbare Singularität in a, das heißt $\operatorname{ord}(\frac{f'}{f}, a) \geq 1$. Mit Aussage (a) gilt dann

$$\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{(z-a)}, a\right) \;=\; \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) \;=\; F(a) \;=\; k\,\frac{a_k}{a_k} \;=\; k$$

Aussage **(d)** folgt aus Aussage (c), denn wir wissen schon, dass $\operatorname{ord}(\frac{f'}{f}, a) \geq 1$. Da g holomorph Fortsetzbar ist, folgt $\operatorname{ord}(\frac{f' \cdot g}{f}, a) \geq 1$. Setze nun $F(z) := (z-a)\frac{f'(z)}{f(z)} \cdot g(z)$, dann gilt mit den Teilen (a) und (c)

$$\operatorname{Res}\left(\frac{F(z)}{(z-a)}, a\right) \;=\; F(a) \;=\; \left(\lim_{z \to a} (z-a)\,\frac{f'(z)}{f(z)}\right) \cdot g(a) \;=\; \operatorname{ord}(f, a) \cdot g(a)$$

□

Beispiel 30 *(Berechnung von Residuen)*

- $f(z) := \frac{\exp(iz)}{z^2+1}$ *Die Funktion f hat Singularitäten in $a \in \{i, -i\}$. Der Pol bei i hat die Polordnung 1, also gilt mit Teil (a) der soeben gezeigten Rechenregeln*

$$\operatorname{Res}(f, i) \;=\; \lim_{z \to i} (z-i)\,\frac{\exp(iz)}{z^2+1} \;=\; \lim_{z \to i} \frac{\exp(iz)}{z+i} \;=\; \frac{1}{2ie}$$

- $g(z) := \pi\,\frac{\cos(\pi z)}{\sin(\pi z)}$ *Die Funktion g hat Singularitäten in allen $a \in \mathbb{Z}$. Nach Rechenregel (b) der Bemerkung 18.6 gilt*

$$\operatorname{Res}(f, a) \;=\; \frac{\pi \cdot \cos(\pi a)}{\big(\sin(\pi a)\big)'} \;=\; \frac{\pi \cdot \cos(\pi a)}{\pi \cdot \cos(\pi a)} \;=\; 1$$

- $h(z) := \frac{1}{(z^2+1)^3}$ *Die Funktion h hat Singularitäten in $a \in \{i, -i\}$. Bei i liegt ein Pol 3-ter Polordnung vor. Setze $\tilde{f}(z) := (z-i)^3\, f(z) = \frac{1}{(z+i)^3}$, dann gelten*

$$\tilde{f}'(z) \;=\; -3\,\frac{1}{(z+i)^4} \qquad\qquad \tilde{f}''(z) \;=\; 12\,\frac{1}{(z+i)^5}$$

Damit ergibt sich mit der Rechenregel (a) für Residuen

$$\operatorname{Res}(f, i) \;=\; \frac{\tilde{f}''(i)}{2!} \;=\; \frac{12}{2 \cdot (z+i)^6} \;=\; \frac{3}{16i}$$

19 Funktionentheoretische Anwendungen

In diesem Abschnitt interressieren wir uns hauptsächlich für das Zählen von Null- und Polstellen von Funktionen, die außer Polstellen keine weiteren Singularitäten haben. Solche Funktionen beschrieben wir zunächst in einer

Definition 19.1 *(meromorphe Funktion)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen. Eine meromorphe Funktion f auf D ist eine diskrete Punktmenge $P \subset D$ zusammen mit einer holomorphen Funktion $f : D\backslash P \to \mathbb{C}$ derart, dass jeder Punkt $a \in P$ ein Pol von f ist.
Wir nennen P die Polstellenmenge von f.

Alternativ Setze $\overline{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, dann setze f als

$$\begin{array}{rcl} f : D & \to & \overline{\mathbb{C}} \\ z & \mapsto & \begin{cases} f(z) & \text{falls } z \notin P \\ \infty & \text{falls } z \in P \end{cases} \end{array}$$

Im vorhergehenden Abschnitt haben wir in Definition 18.5 die Ordnung einer Funktion f in einer Singularität a definiert. Wir haben weiter die Sprechweisen

- ⋆ f hat eine Nullstelle mit Vielfachheit k, falls $\operatorname{ord}(f; a) = k > 0$ und
- ⋆ f hat eine Polstelle mit Ordnung $-k$, falls $\operatorname{ord}(f; a) = k < 0$

Eingeführt.

Bemerkung *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und sei $C \subset D$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve sowie f eine meromorphe Funktion auf D, aber nicht die Nullfunktion, mit Polstellenmenge P und Nullstellenmenge N. Dann gelten*

$$\sharp\big(\operatorname{Int}(C) \cap P\big) < \infty \qquad \text{und} \qquad \sharp\big(\operatorname{Int}(C) \cap N\big) < \infty$$

Beweis. Nach Satz 17.5 ist $\operatorname{Int}(C)$ beschränkt, also ist insbesondere der Abschluss vom Inneren der Kurve kompakt. Nach dem Identitätssatz ist die Nullstellenmenge, per Definition ist die Polstellenmenge von f diskret. Nach dem Heine-Borellschen Überdeckungssatz enthält der Schnitt einer Kompakten mit einer diskreten Menge nur endlich viele Elemente. □

Satz 19.2 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und f eine meromorphe Funktion auf D, aber nicht die Nullfunktion. Weiter seien $C \subset D$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve auf der keine Null- und keine Polstelle von f liegt und $\{a_1, \ldots, a_k\}$ die Menge der Null- und Polstellen von f auf $\operatorname{Int}(C)$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{k} \chi(C; a_j) \cdot \operatorname{ord}(f; a_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

Beweis. Mit dem Residuensatz 18.3 und Bemerkung 18.6 Teil (c) gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw &= \sum_{j=1}^{k} \chi(C; a_j) \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \chi(C; a_j) \cdot \operatorname{ord}(f; a_j) \end{aligned}$$

□

Definition und Folgerung 19.3 *(Null- und Polstellen zählendes Integral)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und f eine meromorphe Funktion auf D, aber nicht die Nullfunktion. Weiter sei $C \subset D$ eine stückweise glatte, geschlossene Kurve auf der keine Null- und keine Polstelle von f liegt und die jede Null- und jede Polstelle in ihrem Innern einmal positiv durchläuft. Bezeichne P die Menge der Polstellen und N die Menge der Nullstellen von f im Innern von C, dann definieren wir

$$N(0) \;:=\; \sum_{a\in N} \operatorname{ord}(f;a)$$

die Anzahl der mit Vielfachheit gezählten Nullstellen von f innerhalb von C und

$$N(\infty) \;:=\; \sum_{a\in P} -\operatorname{ord}(f;a)$$

die Anzahl der mit Vielfachheit gezählten Polstellen von f innerhalb von C. Wir nennen dann

$$N(0) - N(\infty) \;=\; \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw$$

das Null- und Polstellen zählende Integral von f im innern von C.

Beweis. Das Null- und Polstellen zählende Integral von f ist nach Satz 19.2 von der beschriebenen Form. □

Satz 19.4 *(Satz von Hurwitz)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen, derart dass kein f_n eine Nullstelle auf D habe. Weiter konvergiere die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$, dann ist f entweder die Nullfunktion oder Nullstellenfrei auf D.

Beweis. Die Grenzfunktion f ist wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz der f_n holomorph. Wir nehmen an, dass f nicht die Nullfunktion sei und es ein $a \in D$ gäbe, so dass $f(a) = 0$ gilt. Da die Nullstellenmenge von f nach Annahme diskret ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass

$$f(z) \neq 0 \qquad \forall z \in \dot{\text{U}}_{2\delta}(a) \subset D$$

Behauptung 1 *Die Folge $(\frac{f_n'}{f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert lokal gleichmäßig gegen $\frac{f'}{f}$.*

Sobald diese Behauptung 1 gezeigt ist, dürfen in der folgenden Rechnung - wegen der lokal gleichmäßigen Konvergenz - die Grenzprozesse Limesbildung und Integration vertauscht werden. Mit Satz 19.2 gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta(a)} \frac{f_n'(w)}{f_n(w)}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta(a)} \lim_{n\to\infty} \frac{f_n'(w)}{f_n(w)}\,dw \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{C_\delta(a)} \frac{f'(w)}{f(w)}\,dw \end{aligned}$$

Für den **Beweis der Behauptung 1** wissen wir bereits

(a) $f_n' \to f'$ lokal gleichmäßig

(b) $\frac{1}{f_n} \to \frac{1}{f}$ lokal gleichmäßig

(c) Eine Funktionenfolge ist genau dann lokal gleichmäßige konvergent, wenn sie gleichmäßig konvergent auf kompakten Mengen ist.

Sei nun $K \subset \dot{\mathrm{U}}_{2\delta}(a)$ eine beliebige kompakte Teilmenge, dann gibt es nach dem Maximumsprinzip ein $M \in \mathbb{R}_+$ so dass $\frac{1}{|f(z)|} < M$ und $|f'(z)| < M$ gelten. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wegen den Punkten (a), (b) und (c) gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n > N$ und alle $z \in K$ gelten

$$\left|f_n'(z) - f'(z)\right| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \text{und} \quad \left|\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right| < \frac{\varepsilon}{3M}$$

Damit können wir abschätzen:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{f_n'(z)}{f_n(z)} - \frac{f'(z)}{f(z)}\right| &= \Bigg|\left(f_n'(z) - f'(z)\right) \cdot \left(\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right) \\
&\qquad + f'(z) \cdot \left(\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right) + \frac{1}{f(z)} \cdot \left(f_n'(z) - f'(z)\right)\Bigg| \\
&\le \left|f_n'(z) - f'(z)\right| \cdot \left|\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right| \\
&\qquad + |f'(z)| \cdot \left|\frac{1}{f_n(z)} - \frac{1}{f(z)}\right| + \frac{1}{|f(z)|} \cdot \left|f_n'(z) - f'(z)\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3M} \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} < \varepsilon \qquad \text{für } \varepsilon < 3M^2
\end{aligned}$$

□

Folgerung 19.5 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und seien $f_n : D \to \mathbb{C}$ für $n \in \mathbb{N}$ injektive und holomorphe Funktionen. Weiter konvergiere die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lokal gleichmäßig gegen $f : D \to \mathbb{C}$, dann ist f entweder konstant oder injektiv.*

Beweis. Angenommen f wäre weder injektiv noch konstant, dann gibt es zwei Punkte $a, b \in D$ mir $a \neq b$ und $f(a) = f(b)$. Für $n \in \mathbb{N}$ setze $g_n(z) = f_n(z) - f_n(a)$. Wegen der Injektivität der f_n hat keine der Funktionen g_n eine Nullstelle auf $D\backslash\{a\}$. Die Menge $D\backslash\{a\}$ ist offen und die Folge der g_n konvergiert lokal gleichmäßig gegen die Funktion $g(z) = f(z) - f(a)$. Nach Satz 19.4 hat g keine Nullstelle auf $D\backslash\{a\}$ aber nach Konstruktion gilt $g(b) = 0$ und $b \in D\backslash\{a\}$. □

Wir zeigen nun noch eine Variante des Satzes 19.2 für holomorphe Funktionen. Darin werden wir das „Nullstellenzählende Integral“ von f als Umlaufzahl ausweisen. Umlaufzahlen haben wir im Abschnitt 17 bereits besser kennengelernt und haben darüber schon einige Erkenntnisse gewonnen, so wissen wir zum Beispiel, dass die Umlaufzahl eine lokal konstante Funktion ist, die als diskrete Werte immer ganze Zahlen annimmt.

Folgerung 19.6 *(Argumentprinzip)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion mit der Nullstellenmenge N. Weiter sei $C \subset D$ eine stückweise glatte Kurve mit $N \cap C = \varnothing$. Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw = \chi(f \circ \varphi; 0) = \sum_{a \in N \cap \mathrm{Int}(C)} \chi(C; a)\, \mathrm{ord}(f; a)$$

Wobei $\varphi[a,b] \to C \subset D\backslash N$ eine Parametergleichung der Kurve C sei. Insbesondere ist dann auch $f \circ \varphi : [a,b] \to D \to \mathbb{C}$ eine Parametergleichung einer stückweise glatten, geschlossenen Kurve.

Beweis. Mit der Substitutionsregel gilt

$$\chi(f \circ \varphi; 0) \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\varphi} \frac{1}{w-0}\, dw \;=\; \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(w)}{f(w)}\, dw$$

und damit folgt die Behauptung aus Satz 19.2. □

Damit ist das nullstellenzählende Integral von f eine lokal konstante Funktion. Wir wollen daraus nun folgern, dass sich die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten) nicht ändern wenn wir die Funktion f stetig deformieren. Dazu der folgende

Satz 19.7 *(Satz von Rouché)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet und $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Weiter sei $C \subset D$ eine stückweise glatte geschlossene Kurve. Es gelte weiter $|f(w)| > |g(w)|$ für alle $w \in C$. Dann haben die Funktionenen f und $f + g$ im Innern der Kurve C gleichviele Nullstellen, also

$$\chi\big(f \circ \varphi; 0\big) \;=\; \chi\big((f+g) \circ \varphi; 0\big)$$

wobei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine Paramentergleichung der Kurve C sei.

Beweis. Wir definieren zunächst für $t \in [0,1]$ Hilfsfunktionen

$$h_t(z) \;:=\; f(z) + t \cdot g(z)$$

dann gelten $h_0(z) = f(z)$ und $h_1(z) = f(z) + g(z)$. Mit Folgerung 19.6 gilt dann

$$\mathbb{Z} \ni \chi(h_t \circ \varphi; 0) \overset{19.6}{=} \sum_{\substack{a \in \mathrm{Int}(C) \\ h_t(a)=0}} \chi(C; a)\, \mathrm{ord}(f; a)$$

Damit wissen wir, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{h_t'(w)}{h_t(w)}\, dw \;=\; \chi(h_t \circ \varphi; 0)$$

stetig von t abhängt <u>und</u> immer ganzzahlig ist. Da weiterhin das Intervall $[0,1]$ zusammenhängend ist, ist die Umlaufzahl $\chi\big(h_t \circ \varphi; 0\big)$ konstant bezüglich t. □

Beispiel 31 *(Anwendung zum Satz von Rouché)*
Wir betrachten die Funktion $F(z) = z^4 + 6z + 3$. Wo liegen die Nullstellen dieser Funktion?

- *Setze $f(z) := z^4$ und $g(z) := 6z + 3$. Dann gilt für $|z| = 2$*

  $$|f(z)| \;=\; |z|^4 \;=\; 16 \;>\; 15 = 6|z| + 3 \;\geq\; |6z+3| \;=\; |g(z)|$$

  Mit dem Satz von Rouché haben f und $F = f + g$ im innern des Kreises mit Radius 2 um 0 gleichviele Nullstellen. Da wir wissen, dass z^4 als einziges eine vierfache Nullstelle bei 0 hat, liegen auch alle Nullstellen von F in diesem Kreis.

- *Setze $f(z) := 6z$ und $g(z) = z^4 + 3$. Dann gilt für $|z| = 1$*

$$|f(z)| \;=\; 6\,|z| \;=\; 6 \;>\; 4 \;=\; |z|^4 + 3 \;\geq\; |z^4 + 3| \;=\; |g(z)|$$

  Mit dem Satz von Rouché haben f und $F = f + g$ gleichviele Nullstellen im Kreis mit Radius 1 um 0. Da $6z$ genau eine einfache Nullstelle in diesem Kreis hat, liegt auch nur eine Nullstelle von F in diesem Kreis.

Wir haben nun ohne großen Rechenaufwand die Lage der Nullstellen von F genauer bestimmt und wissen, dass eine der vier Nullstellen von F in $\mathrm{U}_1(0)$ und die restlichen drei in $\mathfrak{R}_{1,2}(0)$ liegen.

20 Berechnung von (reellen) Integralen vermöge des Residuensatzes

In desem Abschnitt wollen wir den Residuensatz auf zwei Typen von (reellen) Integralen anwenden.

Typ I

Wir betrachten Integrale der Form

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t, \sin t\big)\, dt$$

wobei R eine rationale Funktion mit reellen oder komplexen Koeffizienten ist.

Satz 20.1 [1] *Seien $P, Q \in \mathbb{C}[X, Y]$ Polynome, so dass $Q(x, y) \neq 0$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Dann gilt für die rationale Funktion $R(X, Y) := \frac{P(X,Y)}{Q(X,Y)}$*

$$\int_0^{2\pi} R\big(\cos t, \sin t\big)\, dt \;\;=\;\; 2\pi \cdot \sum_{j=1}^{k} \mathrm{Res}(f; a_j)$$

wobei $a_1, \ldots, a_k$ die Pole von f auf $\mathbb{E}$ sind und

$$f(z) \;\;:=\;\; \frac{1}{z} \cdot R\left(\frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big), \frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big)\right)$$

Beweis. Sei $w \in C_1(0) \;=\; \partial\,\mathbb{E}$, dann gilt $|w|^2 = w\overline{w} = 1$ also $\overline{w} = w^{-1}$ und somit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big(z + \frac{1}{z}\big) \;\;&=\;\; \frac{1}{2}\,(w + \overline{w}) \;\;=\;\; \mathrm{Re}(w) \\ \frac{1}{2i}\big(z - \frac{1}{z}\big) \;\;&=\;\; \frac{1}{2i}\,(w - \overline{w}) \;\;=\;\; \mathrm{Im}(w) \end{aligned}$$

Betrachte nun das Integral der Funktion f entlang der Einheitskreislinie

$$\begin{aligned} \int_{C_1(0)} f(w)\, dw \;\;&=\;\; \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \cdot i\, e^{it}\, dt \\ &=\;\; \int_0^{2\pi} \frac{i \cdot e^{it}}{e^{it}} \cdot R\big(\mathrm{Re}(e^{it}), \mathrm{Im}(e^{it})\big)\, dt \\ &=\;\; i \cdot \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt \end{aligned}$$

[1] Korrigierte Version nach [L1].

Andererseits ergibt die Anwendung des Residuensatzes 18.3 auf dieses Integral

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\, dt \;=\; \frac{1}{i}\int_{C_1(0)} f(w)\, dw \;=\; 2\pi \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f; a_j)$$

Wobei die $a_1, \ldots, a_k$ die Pole von R auf $\mathbb{E}$ sind. □

Beispiel 32 *(Beispiel für ein Integral vom Typ I)*
Wir wollen das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos(t) + a^2}\, dt \qquad \text{für } a \in \mathbb{E}$$

untersuchen. Setze $P(X,Y) := 1$ und $Q(X,Y) := -2aX + a^2 + 1$, dann gilt $Q(x,y) \neq 0$ für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Denn seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $Q(x,y) = 0$, dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= -2ax + a^2 + 1 \\ \Leftrightarrow \quad a &= x \pm \sqrt{x^2 - 1} \;=\; x \pm i\sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Damit gilt aber

$$|a|^2 \;=\; \operatorname{Re}(a)^2 + \operatorname{Im}(a)^2 \;=\; x^2 + \left(\sqrt{1 - x^2}\right)^2 \;=\; 1$$

was im Widerspruch zu $a \in \mathbb{E}$ steht. Damit kann Satz 20.1 zur Anwendung gebracht werden. Dazu sei $a \neq 0$, dann setze

$$\begin{aligned} f(z) \;&:=\; \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{-2a\left[\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right] + a^2 + 1} \;=\; \frac{1}{-az^2 - a + a^2 z + z} \\ &=\; \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{(z - a)(z - \frac{1}{a})} \end{aligned}$$

Die Funktion f hat zwei Pole erster Ordnung wobei der Pol bei $\frac{1}{a}$ nicht betrachtet werden muss, da er nicht innerhalb des Einheitskreises liegt. Wir wollen das Residuum von f an der Stelle a mit Bemerkung 18.6 Teil (a) berechnen:

$$\operatorname{Res}(f; a) \;=\; \frac{-1}{a} \cdot \frac{1}{a - \frac{1}{a}} \;=\; \frac{-1}{a^2 - 1} \;=\; \frac{1}{1 - a^2}$$

Damit folgt mit Satz 20.1

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - 2a\cos(t) + a^2}\, dt \;=\; \frac{1}{1 - a^2} \qquad \text{für } a \in \mathbb{E}$$

denn für $a = 0$ ist die Gleichung trivialerweise erfüllt.

Typ II

Wir betrachten uneigentliche reelle Integrale der Form

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$$

wobei R eine uneigentlich integrierbare, rationale Funktion mit reellen Koeffizienten ist.

Definition 20.2 *(Uneigentlich Integrierbar auf* $\mathbb{R}$*)*
Eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *heißt (uneigentlich) Integrierbar auf* $\mathbb{R}$*, falls beide Grenzwerte*

$$\lim_{A\to\infty}\int_0^A f(x)\,dx \qquad \text{und} \qquad \lim_{B\to\infty}\int_{-B}^0 f(x)\,dx$$

existieren. In diesem Fall setzen wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \;:=\; \lim_{A\to\infty}\int_0^A f(x)\,dx + \lim_{B\to\infty}\int_{-B}^0 f(x)\,dx$$

Weiter nennen wir den doppelten Grenzwert

$$\lim_{A\to\infty}\int_{-A}^A f(x)\,dx$$

den Cauchy'schen Hauptwert des Integrals.

Anmerkung/Warnung Ist die Funktion f uneigentlich Integrierbar auf $\mathbb{R}$, so ist der Cauchy'sche Hauptwert des Integrals gleich dem Wert des uneigentlichen Integrals über f. Aber aus der Existenz des Cauchy'schen Hauptwerts folgt im Allgemeinen nicht die uneigentliche Integrierbarkeit (so existiert zum Beispiel der Cauchy'sche Hauptwert von $f(x)=x$, aber f ist nicht uneigentlich Integrierbar). Nur in den folgenden netten Fällen folgt aus der Existenz des Cauchy'schen Hauptwerts die uneigentliche Integrierbarkeit

(i) f ist eine gerade Funktion, das heißt $f(x)=f(-x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$

(ii) f ist nicht negativ, das heißt $f(x)\geq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

Satz 20.3 *Seien* $P,Q\in\mathbb{R}[X]$ *zwei Polynome mit* $\deg(Q)\geq 2+\deg(P)$*. Weiter habe Q keine reellen Nullstellen. Dann gellten für die rationale Funktion* $R(X):=\frac{P(X)}{Q(X)}$

(a) *R ist (uneigentlich) Integrierbar auf* $\mathbb{R}$*.*

(b) *Das uneigentliche Integral über R berechnet sich als*

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx \;=\; 2\pi i\cdot\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}(R;a_j)$$

wobei $a_1,\dots,a_k$ die Pole von R mit positiven Imaginärteil sind.

Beweis. Die Existenz der beiden Grenzwerte aus Definition 20.2 von R folgt aus den Bedingungen an den Grad von P und Q. Betrachte

$$\begin{aligned} P(X) &:= \sum_{j=0}^{m} a_j X^j \qquad \text{mit } \deg(P) = m \\ Q(X) &:= \sum_{j=0}^{n} b_j X^j \qquad \text{mit } \deg(Q) = n \geq 2 + m \end{aligned}$$

Auf den ersten Übungsblatt zeigten wir in Aufgabe fünf, dass es ein $C > 1$ gibt, so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > C$ die Aussagen

$$\frac{|a_m\, z^m|}{2} \leq |P(z)| \leq 2\,|a_m\, z^m| \qquad \text{und} \qquad \frac{|b_n\, z^n|}{2} \leq |Q(z)| \leq 2\,|b_n\, z^n|$$

gelten. Setze $M := 4 \cdot \frac{|a_m|}{|b_n|}$, dann folgt

$$|R(z)| = \left|\frac{P(X)}{Q(X)}\right| \leq \frac{2\,|a_m\, z^m|}{\frac{1}{2}\,|b_n\, z^n|} \leq M \cdot \frac{1}{|z^{m-n}|} \leq M \cdot \frac{1}{|z|^2}$$

Damit können wir das „obere Teilintegral“ über R abschätzen durch

$$\begin{aligned} \left|\int_0^A R(x)\,dx\right| &\leq \int_0^A |R(X)|\,dx \\ &\leq M \cdot \int_C^A \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^C |R(x)|\,dx \\ &= M \cdot \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) + \int_0^C |R(x)|\,dx \qquad < \infty \qquad \text{für alle } A > C \end{aligned}$$

Damit folgt die Existenz des Grenzwertes für $A \to \infty$. Analog folgt die Existenz des „unteren Grenzwertes“

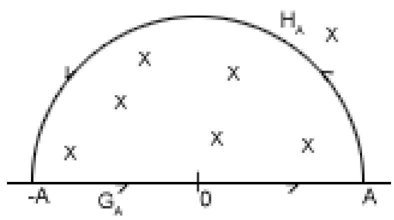
$$\lim_{B\to\infty} \int_{-B}^{0} R(X)\,dx$$

und wir haben Teil **(a)** gezeigt. Den Nachweis von Teil **(b)** wollen wir mit Hilfe des Residuensatzes erbringen. Dazu betrachte die folgenden Kurven:

Für $A \in \mathbb{R}_+$ sei die Strecke $\overline{-AA} \subseteq \mathbb{R}$ mit G_A bezeichnet und H_A bezeichne den „oberen Halbkreis“ um 0 mit Radius A, das heißt H_A wird durch die Parametergleichung

$$\varphi_A : [0,1] \ni t \mapsto A \cdot e^{i\pi t} \in \mathbb{C}$$

beschrieben.



Wir arbeiten nun mit der geschlossenen, stückweise glatten Kurve $\gamma_A = G_A + H_A$ und betrachten

$$\int_{\gamma_A} R(z)\,dz = \int_{-A}^{A} R(x)\,dx + \int_{H_A} R(w)\,dw \tag{20.1}$$

sei dazu $A \in \mathbb{R}_+$ so groß, dass alle Pole $a_1, \ldots, a_k$ von R mit positivem Imaginärteil in $U_A(0) \cap \mathbb{H}$ liegen, dann folgt mit Residuuensatz 18.3

$$\int_{\gamma_A} R(z)\,dz = 2\pi i \cdot \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(R; a_j)$$

Mit der bereits von oben bekannten Abschätzung gilt für das Integral entlang der Halbkreislinie

$$\begin{aligned}
\lim_{A\to\infty}\int_{H_A}|R(w)|\,dw &= \lim_{A\to\infty}\int_0^1 \left|R(A\cdot e^{i\pi t})\cdot Ai\pi\, e^{i\pi t}\right|\,dt \\
&= \lim_{A\to\infty} A\pi\cdot\int_0^1 |R(A\,e^{i\pi t})|\,dt \\
&\leq \lim_{A\to\infty} A\pi\cdot\int_0^1 M\cdot\frac{1}{A^2}\,dt \\
&\leq \lim_{A\to\infty}\frac{M\pi}{A} \qquad = \quad 0
\end{aligned}$$

Damit folgt aus Gleichung (20.1) und der bereits bekannten Anwendung des Residuensatzes

$$\sum_{j=1}^{k}\operatorname{Res}(R;a_j) \;=\; \lim_{A\to\infty}\int_{\gamma_A} R(z)\,dz \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\,dx$$

Wegen der in Teil (a) gezeigten uneigentlichen Integrierbarkeit reicht es hier den Cauchy'schen Hauptwert des Integrals auszurechnen. □

Beispiel 33 *(Beispiel für ein Integral vom Typ II)*
Wir wollen des uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^6}\,dt$$

berechnen. Setze $P(X) := 1$ und $Q(X) := X^6+1$ dann ist die Menge der Nullstellen N von Q auf $\mathbb{C}$ eine Teilmenge der 12-ten Einheitswurzeln. Es gilt

$$N \;=\; \{\, z\in\mathbb{C}\mid Q(z)=0\,\} \;=\; \left\{ e^{2\pi i\frac{n}{12}} \,\middle|\, n\in\{1,3,5,7,9,11\}\right\}$$

Nur für $n\in\{1,3,5\}$ haben die Nullstellen von Q positiven Imaginärteil, das heißt $e^{2\pi i\frac{n}{12}}\in\mathbb{H}$ und keine Nullstelle liegt auf der reellen Achse. Wir wissen bereits, dass die 12-ten Einheitswurzeln paarweise verschieden sind, also gilt $\sharp N = 6$, das heißt alle Nullstellen von Q sind Pole erster Ordnung von R. Mit Bemerkung 18.6 können wir nun die Residuen der Polstellen ausrechnen:

$$\operatorname{Res}(R;z_n) \;=\; \operatorname{Res}\left(\frac{1}{Q};z_n\right) \;=\; \frac{1}{6\,z_n^5} \qquad \text{mit } z_n := e^{2\pi i\frac{n}{12}}$$

Mit Satz 20.3 folgt dann

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+t^6}\,dt &= 2\pi i\cdot\left(\frac{1}{6\,z_1^5}+\frac{1}{6\,z_3^5}+\frac{1}{6\,z_5^5}\right) \\
&= \frac{\pi i}{3}\cdot\Bigg[\cos\left(\frac{-2\pi}{12}\right)+\cos\left(\frac{-2\pi 3}{12}\right)+\cos\left(\frac{-2\pi 5}{12}\right) \\
&\qquad\qquad +i\cdot\left(\sin\left(\frac{-2\pi}{12}\right)+\sin\left(\frac{-2\pi 3}{12}\right)+\sin\left(\frac{-2\pi 5}{12}\right)\right)\Bigg] \\
&= \frac{\pi i}{3}\left[\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+0-\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\left(\frac{-1}{2}-1-\frac{1}{2}\right)\right] \\
&= \frac{2\pi}{3}
\end{aligned}$$

Kapitel V

Kleiner Riemann'scher Abbildungssatz

21 Konforme Abbildungen

Wir wollen in diesem Abschnitt Gebiete in Äquivalenzklassen bezüglich Konformität (einer Äquivalenzrelation die wir in diesem Abschnitt definieren werden) vornehmen. Wir werden zeigen, dass zwei konforme Gebiete „gleiche Funktionentheoretische Eigenschaften“ haben. Am Ende des Abschnittes werden wir den kleinen Riemann'schen Abbildungssatz aufstellen und behaupten, dass die Menge der Elementargebiete - also der Gebiete auf denen jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion hat - in genau zwei Äquivalenzklassen zerfällt.
Wie gesagt wollen wir in diesem Abschnitt über Äquivalenzklassen reden, daher hier eine Erinnerung an die lineare Algebra

Definition *(Äquvalenzrelation / -klasse)*
Sei M eine Menge. Wir nennen eine Teilmenge R des kartesischen Produktes $M \times M$ eine Relation, und sagen $x, y \in M$ stehen in der Relation R, wenn $(x, y) \in R$ gilt. Wir schreiben dann $x \sim_R y$. Weiter heißt die Relation R

reflexiv *falls für alle $x \in M$ gilt $x \sim_R x$.*

symmetrisch *falls aus $x \sim_R y$ stets $y \sim_R x$ folgt.*

transitiv *falls aus $x \sim_R y$ und $y \sim_R z$ stets $x \sim_R z$ folgt.*

äquivalent *falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.*

Sei $\sim_R$ eine Äquivalenzrelation auf M, dann definieren wir die Äquivalenzklasse von $x \in M$ als

$$[x]_R \ := \ \left\{ y \in M \,\middle|\, x \sim_R y \right\}$$

Im Folgenden werden wir die Ergebnisse der Linearen Algebra zu Äquivalenzrelationen und -klassen voraussetzen. Nachlesen können Sie die Ergebnisse in [L2].

Definition 21.1 *(konforme Abbildungen, konform äquivalente Gebiete)*
Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ zwei Gebiete, dann heißt eine Abbildung $f : D_1 \to D_2$ konform, falls

(i) *f bijektiv,*

(ii) *f holomorph und*

(iii) *f^{-1} holomorph ist.*

Zwei Gebiete $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ heißen konform äquivalent, wenn es eine konforme Abbildung von D_1 nach D_2 gibt.

Anmerkung Es folgt sofort aus den symmetrischen Eigenschaften konformer Abbildungen, dass die soeben definierte Relation

$$D \sim G \;:\Leftrightarrow\; \text{Es gibt eine konforme Abbildung } f : D \to G$$

eine Äquivalenzrelation ist.

Beispiel 34 *(Konforme Äquivalenz)*

- *Die obere Halbebene $\mathbb{H}$ und die Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ sind konform Äquivalent, denn wie wir bereits auf dem zweiten Übungszettel gezeigt haben ist die Cayley-Abbildung*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{H} &\to \mathbb{E} \\ z &\mapsto \frac{z-i}{z+i} \end{aligned}$$

  biholomorph mit der holomorphen Umkehrabbildung

$$\begin{aligned} g : \mathbb{E} &\to \mathbb{H} \\ w &\mapsto i\frac{1+w}{1-w} \end{aligned}$$

- *Die komplexe Ebene $\mathbb{C}$ ist nicht konform Äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$, denn gäbe es eine konforme Abbildung $f : \mathbb{C} \to \mathbb{E}$, dann wäre diese Abbildung eine ganze und gleichzeitig beschränkte Funktion. Nach dem Satz von Lioville 13.3 also konstant. Eine konstante Funktion kann nicht bijektiv auf $\mathbb{E}$ abbilden, was ein Widerspruch ist.*

Bemerkung 21.2 *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und $f : D_1 \to D_2$ eine Abbildung. Es sind äquivalent*

(i) *f ist eine konforme Abbildung von D_1 nach D_2.*

(ii) *f ist bijektiv, holomorph und für alle $z \in D_1$ gilt $f'(z) \neq 0$.*

(iii) *f ist bijektiv und holomorph*

Beweis. Wir beweisen die Bemerkung per Ringschluss:

„(i)⇒(ii)„ Nach Voraussetzung ist f konform, also holomorph und bijektiv. Bezeichne $g := f^{-1}$ die holomorphe Umkehrabbildung von f. Mit der Kettenregel gilt dann für alle $z \in D_1$

$$g\big(f(z)\big) = z \;\Leftrightarrow\; f'(z) \cdot g'\big(f(z)\big) = 1$$

also gilt $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in D_1$.

„(ii)⇒(iii)„ trivial

„(iii)⇒(i)„ Nach Voraussetzung ist f holomorph und bijektiv. Sei $g = f^{-1}$ die Umkehrabbildung von f. Nach dem Satz von der Gebietstreue 14.10 gilt für f

$$U \overset{\text{offen}}{\subseteq} D_1 \;\Rightarrow\; f(U) \overset{\text{offen}}{\subseteq} D_2$$

Wegen $g = f^{-1}$ sind also Urbilder offener Mengen unter g selbst offen, also ist g stetig. Mit dem Satz über die implizite Funktion (Satz 14.9) g in jedem Punkt $f(z) \in D_2$ mit $f'(z) \neq 0$ holomorph. Da f' holomorph und nicht die Nullfunktion ist, ist die Nullstellenmenge von f' diskret, insbesondere ist also die Menge

$$N \;:=\; \left\{ f(w) \in D_2 \,|\, w \in D_1 \,\wedge\, f'(w) = 0 \right\}$$

diskret, denn f ist ein Homöomorphismus[1]. Da g auf ganz D_2 stetig ist, sind alle Punkte $a \in N$ hebbare Singularitäten von g und aus dem Riemann'schen Hebbarkeitssatz 15.2 folgt die Holomorphie von g auf ganz D_2

□

Mit Bemerkung 21.2 müssen wir nun, wenn wir eine Abbildung auf Konformität prüfen wollen, nur noch auf Bijektivität und Holomorphie testen und wissen dann bereits, dass auch die Umkehrabbildung holomorph ist.

Bemerkung 21.3 *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ Gebiete und $\varphi : D_1 \to D_2$ eine konforme Abbildung, dann gilt: D_1 ist genau dann ein Elementargebiet, wenn D_2 ein Elementargebiet ist.*

Beweis. Wegen der Symmetrie der Aussage genügt es eine Richtung zu zeigen. Sei also D_1 ein Elementargebiet, dann ist zu zeigen, dass jede holomorphe Funktion $f : D_2 \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion $F : D_2 \to \mathbb{C}$ hat. Definiere

$$g(z) \;:=\; f\big(\varphi(z)\big) \cdot \varphi'(z)$$

dann ist $g : D_1 \to \mathbb{C}$ holomorph. Da D_1 nach Voraussetzung ein Elementargebiet ist, hat g eine Stammfunktion $G : D_1 \to \mathbb{C}$. Definiere weiter

$$F(z) \;:=\; G\big(\psi(z)\big) \qquad \text{mit } \psi(z) = \varphi^{-1}(z)$$

Dann ist $F : D_2 \to \mathbb{C}$ holomorph. Mit der Kettenregel gilt

$$\begin{aligned} F'(z) \;&=\; \Big[G\big(\psi(z)\big)\Big]' \;=\; G'\big(\psi(z)\big) \cdot \psi'(z) \\ &=\; f\big(\varphi \circ \psi(z)\big) \cdot \varphi'\left(\psi'(z)\right) \cdot \psi'(z) \;=\; f(z) \end{aligned}$$

Also ist F eine Stammfunktion von f auf D_2. □

Mit dieser Bemerkung ergibt es Sinn die Menge der Elementargebiete in Äquivalenzklassen bezüglich Konformität einzuteilen. Die Charakterisierung dieser Äquivalenzklassen gibt uns der kleine Riemann'sche Abbildungssatz, dessen Beweis das gesamte nächste Kapittel einnehmen wird.

Satz 21.4 *(Kleiner Riemann'scher Abbildungssatz)*
Sei $D \subsetneqq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, dann ist D konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$.

Der große Riemann'sche Abbildungssatz besagt, dass jede einfach-zusammenhängende Riemann'sche Fläche äquivalent zu $\mathbb{E}$, $\mathbb{C}$ oder zur Riemann'schen Sphäre $\overline{\mathbb{C}}$ ist. Diesen Satz werden wir in dieser Vorlesung jedoch nicht behandeln und verweisen auf die Vorlesung „Riemann'sche Flächen".

[1] Eine Funktion f heißt homöomorph, falls f stetig und bijektiv mit stetiger Umkehrabbildung f^{-1} ist.

22 Beweis des kleinen Riemann'schen Abbildungssatzes

Satz 21.4 *(Kleiner Riemann'scher Abbildungssatz)*
Sei $D \subsetneqq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, dann ist D konform äquivalent zur Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$.

Damit gibt es also bezüglich Konformität nur zwei Äquivalenzklassen von Elementargebieten[2]

$$[\mathbb{C}] = \{\mathbb{C}\} \qquad \text{und} \qquad [\mathbb{E}] := \{D \subsetneqq \mathbb{C} \mid D \text{ ist Elementargebiet}\}$$

Den Beweis dieser Charakterisierung spalten wir in vier Abschnitte und beginnen mit

22.I Vorbereitung

Bemerkung 22.1 *Sei $D \subsetneqq \mathbb{C}$ ein Elementargebiet, dann ist D konform äquivalent zu einem Elementargebiet $\tilde{D} \subsetneqq \mathbb{C}$ mit $0 \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{E}$.*

Beweis. Diesen Beweis führen wir mit Schrittweisen konformen Veränderungen von D durch.

1. Ersetze D durch ein konform äquivalentes Gebiet D_1 mit $0 \notin D_1$. Wähle dazu ein $a \in \mathbb{C} \setminus D$ und definiere
$$f_1 : D \ni z \mapsto z - a \in \mathbb{C}$$
Die so gegebene Funktion f_1 ist holomorph und injektiv. Setze nun $D_1 := \mathrm{Img}(f_1) = f_1(D)$, dann ist D_1 konform äquivalent zu D mit $0 \notin D_1$.

2. Ersetze D_1 durch ein konform äquivalentes Gebiet D_2 mit $0 \notin D_2$ und der Eigenschaft
$$z \in D_2 \;\Rightarrow\; -z \notin D_2 \tag{22.1}$$
Setze dazu $f_2 : D_1 \to \mathbb{C}$ als die holomorphe Quadratwurzel aus $id : D_1 \ni z \mapsto z \in \mathbb{C}$. Nach Folgerung 14.7 existiert f_2 und per Defnninition gilt $f_2^2(z) = z$. Weiter ist f_2 wegen
$$f_2(z) = \pm f_2(w) \;\Leftrightarrow\; f_2^2(z) = \big(\pm f_2(w)\big)^2 \;\Leftrightarrow\; z = w$$
injektiv. Setze $D_2 := \mathrm{Img}(f_2) = f_2(D_1)$, dann sind die Elementargebiete D_1 und D_2 konform äquivalent mit $0 \notin D_2$. Angenommen es gelten $z \in D_2$ und $-z \in D_2$, dann können wir $z = f_2(w)$ und $-z = f_2(v)$ mit $v, w \in D_1$ schreiben. Damit erhalten wir einen Widerspruch, denn es folgt
$$f_2(w) = -f_2(v) \;\Rightarrow\; v = w \;\Rightarrow\; f(w) = -f(w) \;\Rightarrow\; f(w) = 0 \in D_2$$

3. Ersetze nun D_2 durch ein beschränktes und zu D_2 konform äquivalentes Elementargebiet D_3. Hierfür sei $a \in D_2$ gegeben. Wähle hierzu ein $r \in \mathbb{R}_+$, so dass $\mathrm{U}_r(a) \subseteq D_2$ gilt. Es gilt
$$-U_r(a) \;:=\; \big\{ -z \,\big|\, z \in \mathrm{U}_r(a) \big\} \;=\; U_r(-a)$$
Wegen der Eigenschaft (22.1) von D_2 folgt nun $\mathrm{U}_r(-a) \cap D_2 = \varnothing$. Definiere die Funktion
$$\begin{aligned} f_3 : D_2 &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{1}{z+a} \end{aligned}$$

[2] Lässt man auch die leere Menge als Gebiet zu, dann müssen wir im kleinen Riemann'schen Abbildungssatz zusätzlich fordern, dass $D \neq \varnothing$ und erhalten dann noch eine dritte Äquivalenzklasse: $[\varnothing] = \{\varnothing\}$.

Da $-a \notin D_2$ gilt, ist f_3 holomorph und injektiv auf D_2, denn der Pol bei $-a$ hat mindstens Abstand r zu D_2. Setze nun $D_3 := \mathrm{Img}(f_3) = f_3(D_2)$, dann sind D_2 und D_3 konform äquivalent. Weil $|z + a| \geq r$ für alle $z \in D_2$ gilt, folgt

$$|f_3(z)| = \frac{1}{|z+a|} \leq \frac{1}{r} \qquad \text{für alle } f_3(z) \in D_3$$

und somit ist D_3 beschränkt.

4. Ersetze wiederum D_3 durch ein beschränktes und zu D_3 konform äquivalentes Elementargebiet D_4 mit $0 \in D_4$. Sei dazu $a \in D_3$ beliebig, aber fest gewählt, dann setze

$$f_4 : D_3 \ni z \mapsto z - a \in \mathbb{C}$$

Die so gegebene Funktion f_4 ist holomorph und injektiv. Setze nun $D_4 := \mathrm{Img}(f_4) = f_4(D_3)$, dann ist D_4 konform äquivalent zu D_3 mit $0 \in D_4$.

5. Ersetze schließlich D_4 durch ein konform äquivalentes Elementargebiet $\tilde{D}$ mit $0 \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{E}$. Sei dazu $M \in \mathbb{R}_+$ so dass $D_4 \subseteq \mathrm{U}_M(0)$ gilt. Ein solches M existiert wergen der Beschränktheit von D_4. Setze nun

$$\begin{aligned} f_3 : D_4 &\rightarrow \mathbb{C} \\ z &\mapsto \frac{z}{M} \end{aligned}$$

dann erfüllt $\tilde{D} := \mathrm{Img}(f_5) = f_5(D_4)$ die Bedingung $0 \in \tilde{D} \subseteq \mathbb{E}$.

□

Mit Hilfe dieser Bemerkung können wir im Beweis des kleinen Riemann'schen Abbildungssatzes ohne Einschränkung annehmen, dass wir anstelle eines beliebigen Elementargebietes ein Elementargebiet D mit $0 \in D \subseteq \mathbb{E}$ betrachten.

22.II Rückführung auf ein Extremalproblem

Idee. Wir wollen ein Elementargebiet $0 \in D \subsetneq \mathbb{E}$ ausdehnen, so dass es noch in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$ enthalten ist. Um ein Elementargebiet auszudehnen, das heißt es durch ein größeres konform äquivalentes Elementargebiet zu ersetzen, müssen wir eine konforme sich ausdehnende Funktion f mit $|f| < 1$ und $|f'| > 1$ angeben.
Aus der reellen Analysis kennen wir die Wurzelfunktion, die wegen $x < \sqrt{x} < 1$ für $x \in (0, 1)$, diese Eigenschaft hat. Die Idee, dass die Wurzelfunktion hilfreich sein könnte, verwenden wir im Beweis der nächsten

Bemerkung 22.2 *Sei $0 \in D \subsetneq \mathbb{E}$ ein Elementargebiet, dann existiert eine injektive holomorphe Abbildung $\varphi : D \hookrightarrow \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $|\varphi'(0)| > 1$.*

Beweis. Auf dem achten Übungsblatt haben wir für $a \in \mathbb{E}$ Abbildungen der Form

$$\begin{aligned} f_a : \mathbb{E} &\rightarrow \mathbb{E} \\ z &\mapsto \frac{z - a}{\overline{a}z - 1} \end{aligned}$$

betrachtet. Wir haben gezeigt, dass die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) $f_a \circ f_a = id$ **(ii)** $f_a(0) = a$ **(iii)** $f_a(a) = 0$

Sei nun $b \in \mathbb{E} \setminus D$ ein Punkt, dann hat die Funktion $f_b : D \to \mathbb{E}$ keine Nullstelle. Nach Folgerung 14.7 existiert daher die holomorphe Quadratwurzel $h : D \to \mathbb{E}$ von f_b, das heißt es gilt $h^2(z) = f_b(z)$ für alle $z \in D$. Bezeichne $h(0) =: c \in \mathbb{E}$, dann gilt $c^2 = h^2(0) = f_b(0) = b$. Setze

$$\begin{aligned} \varphi : D &\to \mathbb{E} \\ z &\mapsto f_c\big(h(z)\big) \end{aligned}$$

Es gilt $\varphi(0) = f_c(c) = 0$. Wir müssen noch zeigen, dass $|\,\varphi'(0)| > 1$ ist, dazu betrachte zunächst

$$\big(h^2(z)\big)' \;=\; f_b'(z) \;=\; \left(\frac{z-b}{\bar{b}z-1}\right)' \;=\; \frac{|b|^2-1}{(\bar{b}z-1)^2}$$

Wegen der Kettenregel folgt dann

$$2 \cdot h(0) \cdot h'(0) \;=\; 2c\,h'(0) \;=\; \frac{|b|^2-1}{(0-1)^2} \;=\; |b|^2-1$$

Unter Verwendung der Quotienten- sowie der Kettenregel erhalten wir

$$\varphi'(z) \;=\; \left(\frac{h(z)-c}{\bar{c}h(z)-1}\right)' \;=\; h'(z) \cdot \frac{|c|^2-1}{(\bar{c}h(z)-1)^2}$$

Setze nun die gesammelten Ergebnisse ein und erhalte mit $c^2 = b$

$$\begin{aligned} \varphi'(0) \;&=\; h'(0) \cdot \frac{|c|^2-1}{(|c|^2-1)^2} \;=\; \frac{h'(0)}{|c|^2-1} \\ &=\; \frac{|b|^2-1}{2c\,(|c|^2-1)} \;\overset{c^2=b}{=}\; \frac{|b|^2-1}{2c\,(|b|-1)} \end{aligned}$$

Betrachten wir nun den Betrag von φ' so können wir abschätzen:

$$|\,\varphi'(0)| \;=\; \frac{\big|\,|b|^2-1\,\big|}{2\sqrt{|b|}\,\big|\,|b|-1\,\big|} \;=\; \frac{|b|+1}{2\sqrt{|b|}} \;>\; 1$$

Denn wegen $\sqrt{|b|}^2 - 2\sqrt{|b|} + 1 \;=\; (\sqrt{|b|}-1)^2 > 0$ gilt $|b| + 1 > 2\sqrt{|b|}$. $\square$

Definition *(Extremalproblem)*
Sei $0 \in D \subseteq \mathbb{E}$ ein Elementargebiet. Setze

$$\mathfrak{M}(D) \;:=\; \left\{\, \varphi : D \hookrightarrow \mathbb{E} \;\middle|\; \varphi \text{ ist holomorph und injektiv mit } \varphi(0) = 0 \right\} \;\neq\; \varnothing$$

Wir sagen, das Extremalproblem für D ist erfüllt, wenn es ein $\psi \in \mathfrak{M}(D)$ derart gibt, dass

$$\big|\psi'(0)\big| \;\geq\; \big|\,\varphi'(0)\big|$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{M}(D)$ gilt.

Folgerung 22.3 *Sei $0 \in D \subsetneqq \mathbb{E}$ ein Elementargebiet. Wenn das Extremalproblem für D erfüllt ist, dann sind $\mathbb{E}$ und D konform äquivalent.*

Beweis. Sei $\psi \in \mathfrak{M}(D)$ eine Lösung des Extremalproblems, das heißt es gilt

$$\left|\psi'(0)\right| \;\geq\; \left|\varphi'(0)\right|$$

für alle $\varphi \in \mathfrak{M}(D)$. Dann ist $\psi : D \to \mathbb{E}$ surjektiv, denn andernfalls wäre das Elementargebiet $\mathrm{Img}(\psi) = \psi(D)$ eine echte Teilmenge der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E}$. Nach Bemerkung 22.2 gäbe es in diesem Fall eine injektive und holomorphe Funktion $\varphi : \psi(D) \to \mathbb{E}$ mit $\varphi(0) = 0$ und $|\varphi'(0)| > 1$. Setze

$$\alpha \;:=\; \varphi \circ \psi : D \xrightarrow{\psi} \psi(D) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{E}$$

dann wäre unter unserer Annahme die Funktion α holomorph und injektiv mit $\alpha(0) = 0$, also $\alpha \in \mathfrak{M}(D)$. Weiter folgte aus der Kettenregel

$$|\alpha'(0)| \;=\; |\psi'(0)| \cdot \left|\varphi'\left(\psi(0)\right)\right| \;=\; |\psi'(0)| \cdot |\varphi'(0)| > |\psi'(0)|$$

Was ein Widerspruch zur Maximalität von $|\psi'(0)|$ wäre. Damit ist ψ also wirklich surjektiv und somit die benötigte konforme Abbildung von D nach $\mathbb{E}$. □

Wir haben nun gezeigt, dass der kleine Riemannsche Abbildungssatz für alle Elementargebiet gilt, für die das Extremalproblem erfüllt ist. Wir werden im folgenden zeigen, dass das Extremalproblem für alle Elementargebiete erfüllt ist.

22.III Lösung des Extremalproblems unter Verwendung des Satzes von Montel

Satz 22.4 *(Satz von Montel)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ gegeben. Falls es ein $C \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass gilt

$$\left|f_n(z)\right| \;<\; C \qquad \text{für alle } z \in D \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(f_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert.

Wir wollen diesen Satz zunächst voraussetzen und zeigen, dass dieser Satz die Erfülltheit des Extremalproblems für alle Elementargebiete $0 \in D \subsetneqq \mathbb{E}$ garantiert. Dann muss anschließend nur noch der Satz von Montel bewiesen werden um den Beweis des kleinen Riemannschen Abbildungssatzes abzuschließen.

Folgerung 22.5 *Sei $0 \in D \subsetneqq \mathbb{E}$ ein Elementargebiet, dann ist das Extremalproblem für D erfüllt.*

Beweis. Setze

$$M \;:=\; \sup_{\varphi\in\mathfrak{M}(D)} \left|\varphi'(0)\right|$$

Nach der Definition des Supremums gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(D)$ mit der Eigenschaft

$$\lim_{n\to\infty} \left|\varphi_n'(0)\right| \;=\; M$$

Die Folge der φ_n ist durch 1 beschränkt und erfült also die Voraussetzungen aus dem Satz von Montel. Damit gibt es eine konvergente Teilfolge $(\varphi_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert. Es gelten:

- Nach Satz 13.10 gibt es eine holomorphe Grenzfunktion $\psi : D \to \mathbb{C}$ von $(\varphi_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$. Weiter konvergiert die Folge der Ableitungen $(\varphi'_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die Ableitung der Grenzfunktion ψ'.
- Nach Folgerung 19.5 ist ψ entweder injektiv oder konstant.
- Wegen $|\psi'(0)| = M$ kann ψ nicht konstant sein.
- Weil für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\varphi_n(0) = 0$ gilt auch $\psi(0) = 0$.
- Weil für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $z \in D$ gilt $|\,\varphi(z)| < 1$, gilt $|\psi(z)| \leq 1$ für alle $z \in D$.
- Nach dem Maximumprinzip (Folgerung 14.12) gilt $|\psi(z)| < 1$ für alle $z \in D$, da ψ sonst konstant wäre.

Insgesamt ist $\psi : D \to \mathbb{E}$ also eine injektive und holomorphe Funktion mit $\psi(0) = 0$ und

$$M \;=\; \lim_{n\to\infty} |\,\varphi'_{\pi(n)}\,| \;=\; |\psi'(0)| \;<\; \infty$$

Damit ist ψ Lösung des Extremalproblems. □

Damit kommen wir zum letzten Schritt im Beweis des kleinen Riemann'schen Abbildungssatzes:

22.IV Beweis des Satzes von Montel

Definition und Bemerkung 22.6 *(Lebesgue'sche Zahl)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge $K \subset D$ eine kompakte Teilmenge von D, dann gibt es ein $r \in \mathbb{R}_+$ derart, dass für alle $a \in K$ die offene Kreisscheibe um a mit Radius r noch volständig in D liegt, das heißt $\mathrm{U}_r(a) \subseteq D$.
Ein solches $r > 0$ nenne wir (eine) Lebesgue'sche Zahl für K.

Beweis. Wähle für jedes $a \in K$ ein $r_a \in \mathbb{R}_+$ so dass $\mathrm{U}_{2r_a}(a) \subseteq D$ gilt. Dann ist

$$K \;\subseteq\; \bigcup_{a\in K} U_{r_a}(a)$$

eine offene Überdeckung von K. Da K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, das heißt es gibt endlich viele Punkte $a_1, \ldots, a_k \in K$ so dass gilt

$$K \;\subseteq\; \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{U}_{r_{a_j}}(a_j)$$

Setze nun $r := \min\{a_1, \ldots, a_k\}$, dann ist r eine Lebesgue'sche Zahl. Denn sei $a \in K$ und $z \in \mathrm{U}_r(a)$, dann gibt es einen Index $j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $a \in U_{r_{a_j}}(a_j)$. Also gilt $|a - a_j| < r_{a_j}$ und mit der Dreiecksungleichung folgt nun

$$\begin{aligned} |z - a_j| \;&=\; |z - a + a - a_j| \;\leq\; |z - a| + |a - a_j| \\ &\leq\; r + r_{a_j} \;\leq\; 2r_{a_j} \end{aligned}$$

Es gilt also

$$\mathrm{U}_r(a) \;\subset\; \mathrm{U}_{2r_{a_j}}(a_j) \subseteq D$$

□

Bemerkung 22.7 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einer dichten*[3] *Teilmenge $S \subset D$. Seien für $n \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ gegeben und gebe es weiter ein $C \in \mathbb{R}_+$ derart, dass gilt*

$$\big|f_n(z)\big| \;<\; C \qquad \text{für alle } z \in D \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

Es gilt: Falls die Folge der f_n für alle $s \in S$ punktweise(!) konvergiert, dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von D.

Beweis. Seien $K \subset D$ eine kompakte Teilmenge und $r > 0$ eine Lebesgue'sche Zahl für K.

Vorbereitung Wir wollen gleichmäßige Konvergenz der Folge auf K zeigen. Wir beweisen zunächst eine allgemeine Abschätzung für durch C beschränkre holomorphe Funktionen. Sei $g : D \to \mathbb{C}$ holomorph mit $g(D) \subseteq \mathrm{U}_C(0)$. Seien weiter $z_1, z_2 \in K$ mit $|z_1 - z_2| < \frac{r}{3}$, dann gilt mit der Cauchy'schen Integralformel 12.2 und dem Integrationsweg $W := C_{\frac{2}{3}r}(z_2)$ gilt

$$\begin{aligned}
\big|g(z_1) - g(z_2)\big| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_W \frac{g(w)}{w - z_1}\,dw - \int_W \frac{g(w)}{w - z_2}\,dw\right| \\
&\leq \frac{C}{2\pi}\int_W \left|\frac{1}{w - z_1} - \frac{1}{w - z_2}\right| dw \\
&= \frac{C}{2\pi}\int_W \left|\frac{z_1 - z_2}{(w - z_1)(w - z_2)}\right| dw \\
&= \frac{C\,|z_1 - z_2|}{2\pi}\int_W \frac{1}{|w - z_1|\,|w - z_2|}\,dw
\end{aligned}$$

Wegen $w \in W$ gilt $|w - z_2| = \frac{2}{3}r$ und wegen $|z_1 - z_2| < \frac{1}{3}r$ gilt $|z_1 - w| > \frac{1}{3}r$. Mit diesen beiden Ungleichungen können wir das Integral weiter abschätzen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\big|g(z_1) - g(z_2)\big| &\leq \frac{C\,|z_1 - z_2|}{2\pi}\cdot\frac{2}{3}\cdot 3\cdot\int_W 1\,dw \\
&= \frac{3C}{r}\,|z_1 - z_2| \qquad (22.1)
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann setze $\delta := \frac{r}{9C}\,\varepsilon$. Da wir nur an Aussagen über kleine ε interessiert sind kann ohne Einschränkung $\delta < \frac{r}{3}$ vorausgesetzt werden. Da $S \subset D$ dicht ist, gilt

$$K \;\subset\; \bigcup_{s\in S} \mathrm{U}_\delta(s)$$

Da K kompakt ist, gibt es nach dem Heine-Borell'schen Überdeckungssatz Elemente $s_1, \ldots, s_n \in S$ derart, dass

$$K \;\subset\; \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{U}_\delta(s_j) \qquad (22.2)$$

Wegen der Vorausgesetzten (punktweisen) Konvergenz der Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\{s_1, \ldots, s_n\}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ so dass für alle $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ mit $m_1, m_2 > N$ und alle $j = 1, \ldots n$ gilt

$$\big|f_{m_1}(s_j) \;-\; f_{m_2}(s_j)\big| \;<\; \frac{\varepsilon}{3}$$

[3] Eine Menge $A \subset B$ heißt dicht in der Menge B, wenn jede nicht-leere offene Umgebung von B eine Element von A enthält. Mit Begriffen der Topologie sagen wir auch: Eine Menge $A \subset B$ heißt dicht in B, wenn der Abschluss von A **in** B bereits ganz B ist.

Denn das Maximum der - dank Kompaktheit endlich vielen - entsprechenden Konvergenzschranken genügt dieser Bedingung, also

$$N := \max\left\{ N_j \in \mathbb{N} \;\middle|\; \left(m_1, m_2 \geq N_j \Rightarrow |f_{m_1}(s_j) - f_{m_2}(s_j)| < \frac{\varepsilon}{3}\right) \right\}$$

Wegen Gleichung (22.2) gibt es für alle $z \in K$ ein $j \in \{1, \dots, n\}$ so dass $|z - s_j| < \delta$ gilt. Mit der oben gezeigten Abschätzung (22.1) gilt dann für alle $z \in K$ und alle $m_1, m_2 > N$

$$\begin{aligned}
|f_{m_1}(z) - f_{m_2}(z)| &= |f_{m_1}(z) - f_{m_1}(s_j) + f_{m_1}(s_j) - f_{m_2}(s_j) + f_{m_2}(s_j) - f_{m_2}(z)| \\
&\leq |f_{m_1}(z) - f_{m_1}(s_j)| + |f_{m_1}(s_j) - f_{m_2}(s_j)| + |f_{m_2}(s_j) - f_{m_2}(z)| \\
&\leq \frac{3C}{r}\delta + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{3C}{r}\delta \;\leq\; 3\frac{\varepsilon}{3} \;=\; \varepsilon
\end{aligned}$$

□

Aus dieser Bemerkung erhalten wir den Satz von Montel nun sehr leicht:

Satz 22.4 *(Satz von Montel)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ holomorphe Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$ gegeben. Falls es ein $C \in \mathbb{R}_+$ derart gibt, dass gilt

$$\big|f_n(z)\big| \;<\; C \qquad \text{für alle } z \in D \text{ und alle } n \in \mathbb{N}$$

dann gibt es eine konvergente Teilfolge $(f_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die auf kompakten Mengen gleichmäßig konvergiert.

Beweis. Setze

$$S := \left\{ x + iy \in D \,\middle|\, x, y \in \mathbb{Q} \right\}$$

Dann ist $S \subset D$ eine abzählbare diskrete Teilmenge von D. Sei also $s_1, s_2, s_3, \dots$ eine Abzählung von S, also eine Bijektion von $\mathbb{N}$ auf S, und sei m das Supremum aller $k \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass es eine Teilfolge $(f_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, die auf $s_1, \dots, s_k$ punktweise konvergiert.

Annahme: $m < \infty$
Nach Annahme gibt es eine Teilfolge $(f_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die auf $s_1, \dots, s_m$ punktweise konvergiert. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass hat die durch C beschränkte Punktfolge $\big(f_{\pi(n)}(s_{m+1})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Teilfolge. Also war, da wir eine konvergente Teilfolge auf $s_1, \dots, s_{m+1}$ gefunden haben, m nicht das Supremum, was ein Widerspruch ist.

Also gilt $m = \infty$ und damit gibt es also eine Teilfolge $(f_{\pi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ die auf alle $s \in S$ punktweise konvergiert. Mit Bemerkung 22.7 folgt nun die Behauptung. □

Mit dem Beweis des Satzes von Montel ist der Beweis des kleinen Riemann'sche Abbildungssatzes 21.4 vollständig erbracht. □

23 Geometrische Charakterisierung von Elementargebieten

Wir haben in Definition 11.7 Elementargebiete als die Gebiete definiert, auf denen jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion hat. In diesem Abschnitt zeigen wir, dass die Elementargebiete genau die „einfach-zusammenhängenden" Gebiete sind. Grob gesagt heißt das, dass Elementargebiete genau die Gebiete ohne Löcher sind.
Als Erstes werden wir den Begriff des Kurvenintegrals, welches wir nur für glatte Kurven definiert hatten, auf beliebige Kurven Erweitern. Um dies Sinnvoll machen zu können benötigen wir noch eine

Bemerkung 23.1 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge und $C \subset D$ eine durch die stetige Parametergleichung $\varphi : [a,b] \to D$ gegebene Kurve. Dann gibt es eine Unterteilung $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ des Intervalls $[a,b]$ und ein $r \in \mathbb{R}_+$, so dass gelten:*

(i) *Für alle $z \in C$ gilt $\mathrm{U}_r(z) \subseteq D$*

(ii) *Setze $z_j := \varphi(a_j)$ für alle $j = 1, \ldots, n$, dann gilt für alle $j = 1, \ldots, n-1$*

$$\varphi\left([a_j, a_{j+1}]\right) \;\subset\; \mathrm{U}_r(z_j) \cap \mathrm{U}_r(z_{j+1})$$

Beweis. Da φ stetig ist, ist $C = \varphi\left([a,b]\right) \subset D$ eine kompakte Teilmenge, also gibt es nach Bemerkung 22.6 eine Lebesgue'sche Zahl $r > 0$. Da auch $[a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt ist, ist φ gleichmäßig stetig, also gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $t_1, t_2 \in [a,b]$ gilt

$$|t_1 - t_2| < \delta \;\Rightarrow\; \left|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)\right| < r$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl mit $\frac{b-a}{n} < \delta$. Setze $a_j := a + j\frac{b-a}{n}$ für $j = 0, \ldots, n$, dann ist $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ die gesuchte Unterteilung, denn sei $t \in [a_j, a_{j+1}]$, dann ist sowohl der Abstand von t zu a_j, als auch der Abstand von t zu a_{j+1} kleiner als δ. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von φ gelten dann sofort

$$\left|\varphi(t) - z_j\right| < r \quad \text{und} \left|\varphi(t) - z_{j+1}\right| < r$$

□

Definition 23.2 *(Kurvenintegral entlang beliebiger Kurven)*
Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Teilmenge und $C \subset D$ eine durch die stetige Parametergleichung $\varphi : [a,b] \to D$ gegebene Kurve. Weiter sei $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ eine Unterteilung des Intervalls $[a,b]$ nach Bemerkung 23.1.
Wir definieren das Kurvenintegral einer holomorphn Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ entlang der Kurve C als

$$\int_C f(z)\,dz \;:=\; \sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} f(w)\,dw$$

mit $z_j := \varphi(a_j)$ für $j = 0, \ldots, n$.

Wir integrieren also nicht entlang der Kurve C selber, sondern entlang eines Polygonzuges mit den Stützstellen $z_0, \ldots, z_n$. Nach Bemerkung 23.1 liegt $\overline{z_j z_{j+1}}$ vollständig innerhalb von D.

Ist nun C bereits eine glatte Kurve, so haben wir zwei unterschiedliche Definitionen für den Ausdruck $\int_C f(z)\,dz$. In der folgenden Bemerkung zeigen wir unter anderem, dass es egal ist, welche Definition wir verwenden:

Bemerkung 23.3 *In der Situation von Definition 23.2 gelten:*

(a) *Das in 23.2 definierte Kurvenintegral hängt nicht von der Wahl der Unterteilung und ebenfalls nicht von der Lebesgue'schen Zahl $r > 0$ ab. Das heißt für jede andere Unterteilung des Intervalls $a = a'_0 < a'_1 < \ldots < a'_m = b$ mit den beiden Eigenschaften aus Bemerkung 23.1 gilt*

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} f(w)\,dw \;=\; \sum_{j=0}^{m-1} \int_{z'_j}^{z'_{j+1}} f(w)\,dw$$

(b) *Ist C eine stückweise glatte Kurve, dann stimmt das in 23.2 definierte Kurvenintegral mit dem bisherigen Kurvenintegral aus Definition 10.7 überein.*

Beweis. Ordne die Punkte $a_0, a_1, \ldots, a_n, a'_0, a'_1, \ldots, a'_m$ der größe nach an und erhalte eine Unterteilung der Form

$$a = c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_k = b \qquad \text{mit } k \leq m + n$$

Es genügt nun zu zeigen, dass

$$\int_{z_j}^{z'_{j+1}} f(w)\,dw \;=\; \sum_{i=0}^{l-1} \int_{\varphi(c_{s+i})}^{\varphi(c_{s+i+1})} f(z)\,dz$$

gilt, falls $a_j = c_s < c_{s+1} < \ldots < c_{s+l} = a_{j+1}$ gilt. Denn dann folgt aus Symmetriegründen

$$\sum_{j=0}^{n-1} \int_{z_j}^{z_{j+1}} f(w)\,dw \;=\; \sum_{i=0}^{k} \int_{\varphi(c_i)}^{\varphi(c_{i+1})} f(z)\,dz \;=\; \sum_{j=0}^{m-1} \int_{z'_j}^{z'_{j+1}} f(w)\,dw$$

Nach Bemerkung 23.1 liegen die stükweisen glatten Kurven

$$W_1 := \overline{z_j z_{j+1}} \qquad \text{und} \qquad W_2 := \sum_{i=0}^{l-1} \overline{c_{s+i} c_{s+i+1}}$$

komplett in der offenen Kreisscheibe vom Radius r um z_j. Diese Kreisscheibe ist ein Sterngebiet und die Kurve $W := W_1 + W_2$ ist stückweise glatt. Mit dem Cauchy'schen Integralsatz 11.6 folgt nun die Behauptung von Teil **(a)**. Teil **(b)** folgt ganz analog. Setze dazu als W_2 das Kurvenstück von C zwischen z_j und z_{j+1}, dann folgt die Behauptung mit der gleichen Argumentation wie oben. □

Es genügt also endlich viele Stützpunkte für einen Polygonzug zu wählen um ein Kurvenintegral entlang einer Kurve zu berechnen. Dieses Ergebnis ist in sofern überraschend, dass wir in der reellen Analysis gewöhnt sind Integrale durch immer feinere Unterteilungen zu approximieren.
Im nächsten Schritt auf dem Weg zum Begriff „einfach-zusammenhängend“ wollen wir Kurven deformieren.

Definition 23.4 *(homotope Kurven / - Abbildungen)*
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $C_0, C_1 \subset D$ zwei durch die Parametergleichungen $\varphi_0, \varphi_1 : [0,1] \to D$ gegebene Kurven, die den gleichen Anfangspunkt und den gleichen Endpunkt haben. Die Kurven C_0 und C_1 heißen homotop in D, falls es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times [0,1] \to D$ gibt, mit

(i) *Für alle $t \in [0,1]$ gelten $H(t,0) = \varphi_0(t)$ und $H(t,1) = \varphi_1(t)$*

(ii) *Für alle $s \in [0,1]$ gelten $H(0,s) = \varphi_0(0) = \varphi_1(0)$ und $H(1,s) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1)$*

In diesem Fall nennen wir H eine Homotopie.

Anmerkung Für jedes $s \in [0,1]$ ist

$$\begin{aligned} \varphi_s : [0,1] &\to D \\ t &\mapsto H(t,s) \end{aligned}$$

eine Parametergleichung einer Kurve mit Anfangspunkt $\varphi_s(0) = H(0,s) = \varphi_0(0) = \varphi_1(0)$ und Endpunkt $\varphi_s(1) = H(1,s) = \varphi_0(1) = \varphi_1(1)$. Für $s = 0$ erhalte die Kurve C_0 für $s = 1$ erhalte die Kurve C_1.
Wichtig Für alle $(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ gilt $\varphi_s(t) \in D$.

Beispiel 35 *(Homotopie)*
Betrachte die Kurven

$$\begin{aligned} \varphi_0 : [0,1] &\to C_0 \subset \mathbb{C} \\ t &\mapsto \cos(\pi t) + i\sin(\pi t) \end{aligned} \quad \text{und} \quad \begin{aligned} \varphi_1 : [0,1] &\to C_1 \subset \mathbb{C} \\ t &\mapsto \cos(\pi t) \end{aligned}$$

Dann haben C_0 und C_1 gleichen Anfangs- und gleichen Endpunkt, denn $\varphi_0(0) = \varphi_1(0) = 1$ und $\varphi_0(1) = \varphi_1(1) = -1$. Setze für $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} \varphi_s : [0,1] &\to C_s \subset \mathbb{C} \\ t &\mapsto \cos(\pi t) + (1-s) \cdot i\sin(\pi t) \end{aligned}$$

dann ist $H : [0,1] \times [0,1] \ni (s,t) \mapsto \varphi_s(t) \in \mathbb{C}$ eine Homotopie zwischen C_0 und C_1.

Notation 6 *Wir führen folgende Bezeichnung ein*

$$\mathrm{Q} := [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$$

Bemerkung 23.5 *SeiD $\subseteq \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet[4] Dann sind je zwei Kurven mit demselben Anfangs- und demselben Endpunkt homotop.*

Beweis. Seien die Kurven $C_0, C_1 \subset D$ durch die Parametergleichungen $\varphi_0, \varphi_1 : [0,1] \to D$ gegeben. Setze

$$\begin{aligned} H : \mathrm{Q} &\to \mathbb{C} \\ (t,s) &\mapsto \varphi_0(t) + s\big(\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\big) \end{aligned}$$

dann ist H als Summe stetiger Funktionen stetig. Da D konvex ist, gilt $H(\mathrm{Q}) = \mathrm{Img}(H) \subset D$. □

Jetzt haben wir alles beisammen um zu definieren, was einfach zusammenhängende Gebiete sind:

[4]Eine Menge $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt konvex, wenn zu je zwei Punkten $a, b \in D$ auch die Verbindungsstrecke $\overline{ab}$ komplett in D liegt.

Definition 23.6 *(Nullhomotop / einfach zusammenhängendes Gebiet)*

- *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $C \subset D$ eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt $z_0 \in D$. Dann heißt C nullhomotop, wenn C zur in z_0 konstanten Kurve C_{z_0} homotop ist.*
- *Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ heißt einfach zusammenhängend, falls jede geschlossene Kurve nullhomotop ist.*

„Wenn ein Gebiet ein ‚Loch' hat, dann lässt sich eine Kurve, die das Loch einmal umläuft nicht zu einem Punkt zusammen ziehen. Daher ist diese Kurve nicht nullhomotop und Gebiete mit einem Loch sind also nicht einfach zusammenhängend."

Anmerkung: In einem einfach zusammenhängendem Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ sind je zwei Kurven $C_1, C_2 \subset D$ mit je dem gleichen Anfangs- und Endpunkt homotop, denn erstens ist die Kurve C_1 homotop zur Kurve $C := C_1 - C_2 + C_2$ da die geschlossene Kurve $-C_2 + C_2$ nullhomotop ist und zweitens ist die Kurve C homotop zur Kurve C_2 da auch die geschlossene Kurve $C_1 - C_2$ nullhomotop ist.

Folgerung 23.7 *Konvexe Gebiete sind einfach zusammenhängend.*

Beweis. Nach Bemerkung 23.5 sind auf konvexen Gebieten zu zwei geschlossene Kurven mit demselben Anfangs- und Endpunkt homotop. Insbesondere ist also eine vorgegebene geschlossene Kurve C mit Anfangs- und Endpunkt z_0 zur in z_0 konstanten Kurve C_{z_0} homotop. □

Beispiel 36 *Die Gebiete $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ sind einfach zusammenhängend, da sie konvex sind.*

Bemerkung 23.8 *Seien $D_1, D_2 \subseteq \mathbb{C}$ zwei konform äquivalente Gebiete, dann ist D_1 genau dann einfach zusammenhängend, wenn D_2 einfach zusammenhängend ist.*

Beweis. Wegen der Symmetrie der Aussage genügt es eine Richtung zu beweisen. Sei $\varphi : D_1 \to D_2$ eine konforme Abbildung und sei D_2 einfach zusammenhängend. Weiter sei $C \subset D_1$ eine geschlossene Kurve mit Anfangs- und Endpunkt $z_0 \in D_1$, dann ist $\varphi(C) \subset D_2$ eine geschlossene Kurve in D_2. Da D_2 nach Voraussetzung einfach zusammenhängend ist, gibt es eine Homotopie

$$H : Q \;\to\; D_2$$

zwischen $\varphi(C)$ und der in $\varphi(z_0)$ konstanten Kurve. Wegen der Stetigkeit von φ^{-1} ist $\varphi^{-1} \circ H$ eine Homotopie zwischen C und der in z_0 konstanten Kurve. Also ist C nullhomotop. □

Definition und Bemerkung 23.9 *(Randkurve)*
Seien $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $H : \mathrm{Q} = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2 \to D$ eine stetige Abbildung. Wir definieren die Randkurve von Q in D als

$$\begin{aligned} \partial H(\mathrm{Q}) : \; [0,4] \;&\to\; D \\ t \;&\mapsto\; \begin{cases} \alpha_1(t) := H(t,0) & \text{für } t \in [0,1] \\ \alpha_2(t) := H(1,t-1) & \text{für } t \in [1,2] \\ \alpha_3(t) := H(3-t,1) & \text{für } t \in [2,3] \\ \alpha_4(t) := H(0,4-t) & \text{für } t \in [3,4] \end{cases} \end{aligned}$$

Sei weiter $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph, dann gilt

$$\int_{\partial H(\mathrm{Q})} f(w)\, dw \;=\; 0$$

Beweis. Da $\mathrm{Q} \subset \mathbb{R}^2$ kompakt ist, ist $H_{|\mathrm{Q}}$ gleichmäßig stetig. Ferner ist auch $H(\mathrm{Q}) \subset D$ eine kompakte Menge, also gibt es nach Bemerkung 22.6 eine Lebesgue'sche Zahl r. Insgesamt existiert demnach ein $\delta > 0$, so dass für alle $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{Q}$ gilt

$$\big\|(x_1, y_2) - (x_2, y_2)\big\|_2 \;<\; \delta \;\;\Rightarrow\;\; \big|H(x_1, y_1) - H(x_2, y_2)\big| \;<\; r \tag{23.1}$$

> **Beweisidee** Wir wollen, ähnlich wie im Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes für Dreieckswege 11.4, das Quadrat Q in n^2 Teilquadrate zerlegen. Die Teilquadrate werden wir so konstruieren, dass ihre Bilder unter der Abbildung H noch vollständig in einer offenen Kreisscheibe mit Radius r um einen Punkt $z \in H(\mathrm{Q})$ enthalten sind. Auf diesen Kreisscheiben wollen wir dann die Behauptung aus dem Cauchy'schen Integralsatz für Sterngebiete 11.6 folgern.

Wähle $n \in \mathbb{N}$ so dass $\frac{1}{n} < \delta \cdot \sqrt{2}$ gilt, und zerlege Q gleichmäßig in n^2-Teilquadrate der Kantenlänge $\frac{1}{n}$. Bezeichne die Teilquadrate mit $Q^{(j)} \subset \mathrm{Q}$ für $j = 1, \ldots, n^2$. Sei $\tilde{Q}$ eines der Teilquadrate mit Mittelpunkt $(\hat{x}, \hat{y}) \in \tilde{Q}$, dann gilt für alle $(x, y) \in \tilde{Q}$

$$\|(\hat{x}, \hat{y}) - (x, y)\|_2 \;<\; \frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \;<\; \delta$$

Mit Gleichung (23.1) folgt dann sofort für alle $(x, y) \in \tilde{Q}$

$$\big|H(x, y) - H(\hat{x}, \hat{y})\big| \;<\; r$$

Also liegt das Bild des Teilquadrats $\tilde{Q}$ in $\mathrm{U} := \mathrm{U}_r\big(H(\hat{x}, \hat{y})\big)$. U ist ein Elementargebiet, also hängt der Wert von $\int_\gamma f(w)\, dw$ für jede Kurve $\gamma \subset \mathrm{U}$ nur vom Anfangs- und Endpunkt der Kurve γ ab, das heißt, dass das Integral entlang der Kurve γ gleich dem Integral entlang der Verbindungsstrecke von Anfangs- und Endpunkt von γ ist, sofern diese in U liegt. Da U konvex ist, gilt für Integrale entlang der Randkurve $\partial H(\tilde{Q})$ des Ausgewählten Teilquadrates $\tilde{Q}$

$$0 \overset{11.6}{=} \int_{\partial H(\tilde{Q})} f(w)\, dw \;=\; \int_{\tilde{\alpha}_1} f(w)\, dw + \int_{\tilde{\alpha}_2} f(w)\, dw + \int_{\tilde{\alpha}_3} f(w)\, dw + \int_{\tilde{\alpha}_4} f(w)\, dw$$

Betrachte nun für jedes der Teilquadrate $Q^{(j)} \subset \mathrm{Q}$ für $j = 1, \ldots, n^2$ die Integrale entlang der entsprechenden Randkurven. Es gilt

$$\int_{\partial H(\mathrm{Q})} f(w)\, dw \;=\; \sum_{j=1}^{n^2} \int_{\partial H(Q^{(j)})} f(w)\, dw \;=\; \sum_{j=1}^{n^2} 0 \;=\; 0$$

Denn die Integrale entlang der deformierten Quadratseiten im inneren von $H(\mathrm{Q})$ kommen in der Summe je zweimal vor, aber immer mit entgegengesetzten Vorzeichen. □

Satz 23.10 *(Cauchy'scher Integralsatz in der Homotopieversion)*

(a) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Weiter seien $C_1, C_2 \subset D$ zwei in D homotope Kurven, dann gilt*

$$\int_{C_1} f(w)\, dw \;=\; \int_{C_2} f(w)\, dw$$

(b) *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Dann gilt*

$$\int_C f(w)\, dw \;=\; 0$$

für alle geschlossenen Kurven $C \subset D$.

Beweis. Nach Voraussetzung von Teil **(a)** gibt es eine Homotopie $H : \mathrm{Q} \to D$ zwischen C_1 und C_2. Nach der soeben gezeigten Bemerkung 23.9 gilt wegen der Stetigkeit von H

$$0 \;=\; \int_{\partial H(\mathrm{Q})} f(w)\, dw \;=\; \sum_{j=1}^{4} \int_{\alpha_j} f(w)\, dw$$

Da H nicht nur stetig, sondern insbesondere auch eine Homotopie ist, gelten $H(0,s) \;=\; z_0$ und $H(1,s) \;=\; z_1$ für alle $s \in [0,1]$ wobei $z_0 \in D$ der gemeinsame Anfangs- und $z_1 \in D$ der gemeinsame Endpunkt der Kurven C_1 und C_2 sind. Also sind α_2 und α_4 Parametergleichungen der in z_0 beziehungsweise in z_1 konstanten Kurven. Per Definition von H ist α_1 eine Parametergleichung der Kurve C_1 und wegen der Definition der Randkurve ist α_3 eine Parametergleichung von $-C_2$. Damit gilt

$$0 \;=\; \int_{\partial H(\mathrm{Q})} f(w)\, dw \;=\; \int_{C_1} f(w)\, dw - \int_{C_2} f(w)\, dw$$

denn Integrale entlang konstanter Kurven haben immer den Wert Null.

Für den Nachweis von Teil **(b)** sein $C \subset D$ eine geschlossene Kurve. Nach Voraussetzung ist C nullhomotop, das heißt C ist homotop zur in z_0 konstanten Kurve, wenn z_0 den Anfangs- und Endpunkt von C bezeichnet. Die Behauptung folgt nun direkt aus Teil (a). □

Satz 23.11 *Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, dann sind äquivalent*

(i) *D ist ein Elementargebiet.*

(ii) *D ist einfach zusammenhängend.*

Beweis. Wir wollen die Implikation **„(i)⇒(ii)“** zeigen. Nach Voraussetzung ist D also ein Elementargebiet. Nach dem kleinen Riemann'schen Abbildungssatz 21.4 gibt es entweder eine konforme Abbildung $f : D \to \mathbb{E}$ oder D ist bereits die komplexe Ebene. Sowohl $\mathbb{E}$ als auch $\mathbb{C}$ sind als konvexe Gebiete einfach zusammenhängend, also sind wir im Fall $D = \mathbb{C}$ bereits fertig, ansonsten folgt die Behauptung mit Bemerkung 23.8.

Für die Gegenrichtung **„(ii)⇒(i)“** sei $f : D \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Es genügt zu zeigen, dass f eine komplexe Stammfunktion F hat. Wähle dazu ein $z_1 \in D$ und wähle weiter für $z \in D$ eine Kurve $C_{z_1 z}$ die vollständig in D verläuft und als Anfangspunkt z_1 und als Endpunkt z hat. Wir definieren

$$F(z) \;:=\; \int_{C_{z_1 z}} f(w)\, dw$$

Nach Satz 23.10 ist dieses Integral unabhängig vom gewählten Weg $C_{z_1 z} \subset D$. Weiter ist F in jedem (beliebigen) Punkt $z_2 \in D$ komplex differenzierbar mit $F'(z_2) \;=\; f(z_2)$, ist also eine komplexe

Stammfunktion von F. Denn sei $r \in \mathbb{R}_+$ derart, dass $\mathrm{U}_r(z_2) \subset D$ gilt, dann betrachte für $u \in \mathrm{U}_r(z_2)$

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(u)-F(z_2)}{u-z_2} - f(z_2)\right| &= \frac{1}{|u-z_2|} \cdot \left|\int_{C_{z_1 u}} f(w)\,dw - \int_{C_{z_1 z_2}} f(w)\,dw - (u-z_2)\cdot f(z_2)\right| \\
&= \frac{1}{|u-z_2|} \cdot \left|\int_{C_{z_1 z_2}} f(w)\,dw + \int_{C_{z_2 u}} f(w)\,dw - \int_{C_{z_1 z_2}} f(w)\,dw \right.\\
&\qquad\qquad \left. - \int_{z_2}^{u} f(z_2)\,dw\right| \\
&= \frac{1}{|u-z_2|} \cdot \left|\int_{C_{z_2 u}} f(w) - f(z_2)\,dw\right| \\
&\leq \frac{1}{|u-z_2|} \cdot \int_{C_{z_2}^u} \big|f(w) - f(z_2)\big|\,dw
\end{aligned}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben, dann gibt es wegen der Stetigkeit von f in z_2 ein $\delta > 0$, so dass gilt

$$|w - z_2| < \delta \;\Rightarrow\; |f(w) - f(z_2)| < \varepsilon$$

Damit können wir die obige Abschätzung für $u \in \mathrm{U}_\delta(z_2) \subseteq \mathrm{U}_r(z_2)$ fortführen und erhalten

$$\left|\frac{F(u)-F(z_2)}{u-z_2} - f(z_2)\right| < \frac{1}{|u-z_2|} \cdot \int_{C_{z_2}^u} \varepsilon\,dw = \varepsilon$$

□

Warnung In den meisten Lehrbüchern kommt der Begriff „Elementargebiet“ nicht vor, und es wird sofort mit einfach-zusammenhängenden Gebieten gearbeitet.

Wir können feststellen, dass sich Elementargebiete mit all ihren im Verlaufe dieser Vorlesung gezeigten Eigenschaften als rein topologische Objekte beschreiben lassen. Wir brauchen zur Charakterisierung der Elementargebiete nur den Begriff der Stetigkeit und müssen nicht über holomorphe Funktionen reden.

Folgerung 23.12 *Je zwei Elementargebiete sind homöomorph, das heißt es gibt eine stetige bijektive Abbildung zwischen ihnen, deren Umkehrabbildung ebenfalls stetig ist.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass $\mathbb{C}$ und $\mathbb{E}$ homöomorph sind, denn konforme Abbildungen sind biholomorphe also insbesondere bistetige Abbildungen. Für jedes Elementargebiet $D \subsetneqq \mathbb{C}$ gibt es eine konforme Abbildung $f : D \to \mathbb{E}$.
Betrachte die stetigen Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} \alpha : \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \frac{z}{1+|z|} \end{array} \qquad \text{und} \qquad \begin{array}{rcl} \beta : \mathbb{E} & \to & \mathbb{C} \\ w & \mapsto & \frac{w}{1-|w|} \end{array}$$

Durch Nachrechnen zeigt man $\alpha(\mathbb{C}) = \mathbb{E}$, $\beta(\mathbb{E}) = \mathbb{C}$, $\alpha \circ \beta = id$ sowie $\beta \circ \alpha = id$. □

Anhang A

Ein Einblick in analytische Zahlentheorie

24 Der Primzahlsatz und die Riemannsche Vermutung

Notation 7 *Bezeichne $\mathbb{P}$ die Menge der positiven Primzahlen.*

Satz 24.1 *Es gibt unendlich viele (positive) Primzahlen.*

Beweis. (Nach Euklid)
Angenommen es gäbe nur endlich viele Primzahlen, dann seien diese mit $p_1, \ldots, p_n$ bezeichnet. Setze nun

$$m \ := \ \prod_{i=1}^{n} p_i + 1$$

dann teilt keine Primzahl p_i die so gegebene Zahl m. Da aber jede natürliche Zahl größer zwei durch mindestens eine Primzahl teilbar ist, muss es mindestens eine weitere Primzahl geben. Dies ist ein Widerspruch, denn wir hatten angenommen, dass die Zahlen $p_1, \ldots, p_n$ alle Primzahlen sind, die es gibt. □

Definition 24.2 *(Primzahlfunktion)*
Die Primzahl(-zähl-)funktion ist für $x \in \mathbb{R}_+$ definiert als

$$\pi(x) \ = \ \sharp\left\{ p \in \mathbb{P} \,\middle|\, p < x \right\}$$

Beispiel 37 *(Primzahlfunktion)*

$$\begin{aligned}
\pi(10) &= \sharp\{2,3,5,7\} \ = \ 4 \\
\pi(20) &= \sharp\{2,3,5,7,11,13,17,19\} \ = \ 8 \\
\pi(30) &= 10 \\
\pi(100) &= 25 \\
\pi(1.000) &= 168 \\
\pi(10.000) &= 1229 \\
\pi(100.000) &= 9592
\end{aligned}$$

Satz 24.3 *(Primzahlsatz)*
Es gilt

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log(x)}} \;=\; 1$$

In Worten: Assymptotisch verhält sich die Primzahlfunktion $\pi(x)$ wie $\frac{x}{\log(x)}$.

Der Beweis dieses Satzes kann mit den Mitteln dieser Vorlesung zwar geführt werden, würde aber zulange dauern. Wir werden hier nur eine Skizze des Beweises angeben können, dazu benötigen wir noch einige Beriffe und Bemerkungen:

Definition 24.4 *(Riemann'sche ζ-Funktion)*
Setze

$$\mathbb{H}_1 \;:=\; \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \mathrm{Re}(z) > 1 \right\}$$

Die Riemann'sche Zeta-Funktion ist definiert als

$$\zeta(s) \;:=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

für $s \in \mathbb{H}_1$.

Bemerkung 24.5 *Die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

konvergiert auf $s \in \mathbb{H}_1$ lokal gleichmäßig absolut und stellt somit eine holomorphe Funktion dar. Ferner lässt sich die Riemannsche ζ-Funktion für $s \in \mathbb{H}_1$ als Eulerprodukt

$$\zeta(s) \;=\; \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$$

entwickeln. Insbesondere gilt $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{H}_1$.

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $s = \sigma + i\tau \in \mathbb{H}_1$ mit $\sigma, \tau \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left|n^{-s}\right| &= \left|\exp\big(-s\cdot\log(n)\big)\right| \\
&= \left|\exp\big(-\sigma\cdot\log(n) + i\tau\cdot\log(n)\big)\right| \\
&= \left|\exp\big(-\sigma\cdot\log(n)\right| \cdot \underbrace{\left|\exp\big(i\tau\cdot\log(n)\big)\right|}_{=1} \\
&= n^{-\sigma}
\end{aligned}$$

Wir wollen nun absolute kovergenz auf kompakten (Teil-)Mengen $K \subset \mathbb{H}_1$ zeigen, denn dann folgt mit Bemerkung 13.9 die lokal gleichmäßige absolute Konvergenz. Sei also $K \subset \mathbb{H}_1$ kompakt und bezeichne σ das Minimum der Realteile aller $s \in K$, dann gilt wegen $\sigma > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-s}\right| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\mathrm{Re}(s)} \;\leq\; \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\sigma} \;<\; \infty$$

Erinnerung *(Hauptsatz der elementaren Zahlentheorie)*
Jede natürliche Zahl größer oder gleich Zwei lässt sich (bis auf die Reihenfolge der Faktoren) eindeutig als Produkt von Primzahlen schreiben.

Nummeriere die Primzahlen nach der Größe geordnet, also

$$p_1 := 2 \; < \; p_2 := 3 \; < \; p_3 := 5 \; < \; \ldots \; < \; p_n \; < \; \ldots$$

Für $N \in \mathbb{N}$ setze $\mathfrak{A}(N) := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n \text{ hat nur die Primfaktoren } p_1, \ldots, p_N \,\}$. Betrachte das Produkt

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{N} \frac{1}{1-p^{-s}} &\overset{\text{geom. Reihe}}{=} \prod_{i=1}^{N} \sum_{m=0}^{\infty} p_i^{-m_i \cdot s} \\
&\overset{\text{Ausmult.}}{=} \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \ldots \sum_{m_N=0}^{\infty} \left(p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \, \ldots \, \cdot p_N^{m_N}\right)^{-s} \\
&= \sum_{\substack{n=0 \\ n \in \mathfrak{A}(N)}}^{\infty} n^{-s}
\end{aligned}$$

Bilde nun auf beiden Seiten den Limes für N gegen ∞ und erhalte die Entwicklung der ζ-Funktion als Eulerprodukt. Damit folgt auch $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{H}_1$, denn ein Produkt ist genau dann Null, wenn einer der Faktoren Null ist, aber offensichtlich ist keiner der Faktoren des Eulerproduktes gleich Null. □

Definition 24.6 *(Mangold- und Tschebyscheff-Funktionen)*
Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Funktionen

(i) *Mangold-Funktion*

$$\Lambda(n) \; := \; \begin{cases} \log(p) & \text{falls } n = p^r \text{ mit } p \in \mathbb{P} \text{ und } r \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ii) *Tschebyscheff'sche Ψ-Funktion*

$$\Psi(n) \; := \; \sum_{m=1}^{n} \Lambda(m)$$

(iii) *Tschebyscheff'sche Θ-Funktione*

$$\Theta(n) \; := \; \sum_{\substack{p \leq n \\ p \in \mathbb{P}}} \log(p)$$

Beispiel 38 *(Mangold-Funktion)*
Es gelten $\Lambda(8) = \log(2)$, $\Lambda(36) = 0$ und $\Lambda(81) = \log(3)$

Bemerkung 24.7 *Für die auf $\mathbb{R}$ fortgesetzten Tschebyscheff-Funktionen gilt*

$$\Theta(x) \; = \; \Psi(x) + o(x) \qquad \text{mit } o \in \mathfrak{O}\left(\sqrt{x} \cdot \log(x)\right)$$

Das heißt es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ und ein $C > 0$, so dass für alle $x > x_0$ gilt

$$\left|\Theta(x) - \Psi(x)\right| \; < \; C \cdot \sqrt{x} \cdot \log(x)$$

Mit anderen Worten: „Die echten Primzahlotenzen spielen im Vergleich zu den Primzahlen eine asymptotisch unwichtige Rolle.“

Satz 24.8 *(Satz von der ζ-Funktion nach Riemann)*
Die Riemann'sche ζ-Funktion hat eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$, welche einen einzigen Pol bei $a = 1$ mit Polordnung 1 und Residuum 1 hat.
Setze

$$\xi(s) \ := \ \pi^{-\frac{s}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \zeta(s) \qquad \text{mit } \Gamma(z) \ := \ \int_0^\infty t^{z-i}\, e^{-t}\, dt$$

dann gilt die Funktionalgleichung $\xi(s) = \xi(1-s)$ für alle $s \in \mathbb{C}$.

In einem nächsten Schritt betrachten wir nun die „logarithmische Ableitung" der ζ-Funktion, das heißt wir betrachten

$$\log\big(\zeta(s)\big)' \ = \ \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$$

Allerdings mit anderem Vorzeichen. Setze

$$D(s) \ := \ -\frac{\zeta(s)}{\zeta(s)} \ = \ \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) \cdot n^{-s}$$

Ein Taubersatz angewand auf $D(s)$ gibt die nächste

Folgerung 24.9 *Es gilt*

$$\Psi(x) \ = \ x \cdot \big(1 + r(x)\big) \qquad \text{mit } r \in \mathfrak{O}\left(\frac{1}{\sqrt[N]{\log(x)}}\right) \text{ für ein } N \in \mathbb{N}$$

Insbesondere hat r also die Eigenschaft

$$\lim_{x\to\infty} r(x) \ = \ 0$$

Wir können nun den Beweis des Primzahlsatzes 24.3 unter Verwendung der soeben aufgestellten Folgerung skizzieren:
Nach Bemerkung 24.7 gilt $\Theta(x) = x\,\big(1 + s(x)\big)$ mit einer Funktion $s \in \mathfrak{O}\left(\frac{1}{\sqrt[N]{\log(x)}}\right)$, denn es gilt

$$\frac{\log(x)\cdot\sqrt{x}}{x} \ \in \ \mathfrak{O}\left(\frac{1}{\sqrt[N]{\log(x)}}\right)$$

Wir wollen nun die Funktion $\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}$ zunächst nach unten, dann nach oben gegen Eins abschätzen um die Behauptung zu zeigen, dazu betrachte

Abschätzung nach unten

$$\begin{aligned} x\,\big(1 + s(x)\big) \ = \ \Theta(x) \ &= \ \sum_{p\in\mathbb{P}_{\leq x}} \log(p) \ \leq \ \sum_{p\in\mathbb{P}_{\leq x}} \log(x) \\ &= \ \pi(x)\cdot\log(x) \end{aligned}$$

Diese Abschätzung können wir umformen und erhalten

$$\pi(x) \geq \frac{x}{\log(x)}\big(1 + s(x)\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \geq 1 + s(x) \ \overset{x\to\infty}{\longrightarrow} \ 1$$

Abschätzung nach oben Für ein $q \in (0,1)$ betrachte

$$\begin{aligned} x\bigl(1+s(x)\bigr) \;=\; \Theta(x) &= \sum_{p\in\mathbb{P}_{\leq x}} \log(p) \;\geq \sum_{\substack{x^q\leq p\leq x\\ p\in\mathbb{P}}} \log(p) \\ &\geq \sum_{\substack{x^q\leq p\leq x\\ p\in\mathbb{P}}} \log(x^q) \;=\; q\cdot\log(x)\cdot\bigl(\pi(x)-\pi(x^q)\bigr) \\ &\geq q\cdot\log(x)\cdot\bigl(\pi(x)-x^q\bigr) \end{aligned}$$

Diese Abschätzung können wir umformen und erhalten

$$\pi(x) \leq \frac{x\cdot\bigl(1+s(x)\bigr)}{q\cdot\log(x)} + x^q \;=\; \frac{x}{\log x}\left(\frac{1+s(x)}{q} + \frac{\log(x)}{x^{1-q}}\right)$$

Nach erneutem Umformen erhalten wir

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}} \leq \frac{1+s(x)}{q} + \frac{\log(x)}{x^{1-q}} \;\overset{x\to\infty}{\longrightarrow}\; \frac{1}{q} \;\overset{q\to 1}{\longrightarrow}\; 1$$

□

Wird im Beweis des Primzahlsatzes auf die Geschwindigkeit der Konvergenz geachtet, dann ergibt sich sogar das genauere Ergebnis

$$\pi(x) \;=\; \frac{x}{\log x}\bigl(1-R(x)\bigr) \qquad \text{mit } R \in \mathfrak{O}\left(\frac{1}{\sqrt[N]{\log x}}\right)$$

Also konvergiert die Primzahlfunktion $\pi(x)$ sehr langsam gegen die Asympthote $\frac{x}{\log x}$ da die beschränkende Funktion $\left(\sqrt[N]{\log x}\right)^{-1}$ sehr langsam gegen Null konvergiert.

Vermutung 24.10 *(Riemann'sche Vermutung)*
Die auf die gesamte komplexe Ebene fortgesetzte Riemann'sche ζ-Funktion hat keine Nullstelle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \frac{1}{2}$.

Anmerkung Aufgrund der Funktionalgleichung aus Satz 24.8 bedeutet die Riemann'sche Vermutung, dass für alle Nullstellen $s \in \mathbb{C}$ der ζ-Funktion mit positivem Realteil gilt $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$.
Für den Taubersatz, aus dem Folgerung 24.9 folgt, wird verwendet, dass $\zeta(s)$ keine Nullstelle hat, deren Realteil gleich Eins ist.

Satz 24.11 *Die Riemann'sche Vermutung 24.10 ist äquivalent zu der folgenden Aussage:*

$$\pi(x) \;=\; Li(x) + o(x) \qquad \text{mit } Li(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt \text{ und } o \in \mathfrak{O}\left(\sqrt{x}\cdot\log x\right)$$

Anmerkung Es gilt

$$Li(x) \;=\; \frac{x}{\log x}\bigl(1+s(x)\bigr) \qquad \text{mit } s \in \mathfrak{O}\left(\frac{1}{\log x}\right)$$

Die Riemann'sche Vermutung impliziert also eine viel exaktere Beschreibung von $\pi(x)$, das heißt eine Beschreibung mit wesentlich kleinerer Fehlerschranke.

Anhang B

Verzeichnisse und Nachweise

Literaturverzeichnis

[L1] **E. Freitag, R. Busam**, Funktionentheorie, Springer-Verlag
[L2] **A. Beutelspacher**, Lineare Algebra, Vieweg/Springer

Bildnachweise

Alle Grafiken wurden eigenhändig von mir, Johannes Hölken, erstellt und stehen unter der Creative Commons License (by-nc-nd 3.0). Ausnahmen hiervon bilden:

Beispiel 3 Grafik von SirJective. GNU FDL. - Quelle: Wikipedia

Danksagungen

Hiermit möchte ich mich bei allen Leser_innen bedanken, die mich auf (Tipp-)Fehler in dieser Mitschrift aufmerksam gemacht haben. Namentlich: Kathrin H., Daniel L.
Weiterhin möchte ich Herrn Prof. Dr. Gabor Wiese für die Hilfe mit einigen LaTeX-Makros und Shortcuts danken.

Lizenz

Die jeweils aktuelle Version dieses Dokuments kann von meiner Homepage

`http://uni.johoelken.de`

bezogen werden. Für Rückfragen aller Art erreichen Sie mich unter der eMail-Adresse:

`johannes.hoelken@stud.uni-due.de`