7. Diskriminante und Spitzenformen

Zusammenfassung

In diesem Vortrag soll eine alternative Methode angegeben werden, Modulformen zu konstruieren. Bisher haben wir die Modulformen immer als Summe, entweder direkt als Fourier-Reihen oder als eine polynomielle Kombination aus den Eisensteinreihen, konstruiert. Die Diskriminante, die in diesem Vortrag einführen wird, definiere ich zunächst als Produkt und werde dann auf eine neue Weise (nämlich mit der logarithmischen Ableitung) zeigen, dass uns dieses unendliche Produkt tatsächlich eine Modulform gibt.
Als solche ist sie dann natürlich auch wieder als Polynom in Eisensteinreihen schreibbar.

Wir werden zeigen, dass die Fourier-Entwicklung der Diskriminante keinen konstanten Term hat, und werden den Modulformen dieser Art einen neuen Namen geben. Die Fourier-Koeffizienten der Diskriminante sind besonders interresant, daher werden wir im zweiten Teil des Vortrages einige verblüffende Beobachtungen, die RAMANUJAN bei den Fourier-Koeffizienten der Diskriminante gemacht hat, nennen und eine Abschätzung von HECKE zu diesen Koeffizienten beweisen.

Erinnerung. Für $z \in \mathbb{H}$ haben wir die Schreibweise

$$q \;:=\; q(z) \;:=\; \exp(2\pi i z)$$

eingeführt. Weiter kennen wir die Eisensteinreihen

$$E_k(z) \;=\; \frac{1}{2} \cdot \sum_{\substack{c,d \in \mathbb{Z} \\ (c,d)=1}} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

Explizit haben wir ein paar Fourier-Entwiklungen berechnet:

$$\begin{aligned} E_2(z) &= \frac{6}{\pi^2} \cdot G_2(z) \;=\; 1 - 24q - 72q^2 - \ldots \\ E_4(z) &= 1 + 240q + 2160q^2 + \ldots \\ E_6(z) &= 1 - 504q - 16632q^2 - \ldots \end{aligned}$$

Auch haben wir die Funktionen $\sigma_m(n)$ für $m, n \in \mathbb{N}$ eingeführt, wobei $\sigma_m(n)$ die Summe der m-ten Potenzen der positiven Teiler von n ist, also

$$\sigma_m(n) \;=\; \sum_{\substack{d \in \mathbb{N} \\ d \,|\, n}} d^m$$

Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, dann haben wir die Schreibweise

$$d\,\log(f) \;:=\; \frac{f'}{f}$$

für die logarithmische Ableitung eingeführt.

Definition 7.1 *(absolute Konvergenz unendlicher Produkte)*
Seien für $n \in \mathbb{N}$ komplexe Zahlen $a_n \in \mathbb{C}$ gegeben, dann sagen wir: Das unendliche Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n)$$

konvergiert absolut, wenn die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$$

konvergiert.

Bemerkung 7.2 *Sei $\prod(1-a_n)$ ein konvergentes unendliches Produkt, dann gelten*

(i) *Die Folge der Partialprodukte*

$$A_N \;:=\; \prod_{n=1}^{N}(1-a_n)$$

konvergiert absolut.

(ii) *Es gilt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n) \;=\; 0 \quad\Leftrightarrow\quad \exists n \in \mathbb{N} \,:\, a_n = 1$$

Beweis. . Nur von **(ii)**: Bezeichne Log den Hauptzweig des komplexen Logarithmus. Nach Voraussetzung ist die Reihe $\sum|a_n|$ konvergent, also gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n| < 1$. Damit ist der Ausdruck $\mathrm{Log}(1-a_n)$ für $n \geq N$ wohldefiniert und es gilt

$$\mathrm{Log}(1-a_n) \;=\; \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}}{m}\,a_m^n$$

Weiter gibt es ein $M \in \mathbb{N}$ mit $M \geq N$ derart, dass für alle $n \geq M$ gilt $|a_n| < \frac{1}{2}$. Dann gibt es Konstanten[1] $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ mit

$$c_1|a_n| \;\leq\; \big|\mathrm{Log}(1-a_n)\big| \;\leq\; c_2|a_n|$$

Also konvergiert die Reihe $\sum \mathrm{Log}(1-a_n)$ genau dann absolut, wenn die Reihe $\sum a_n$ absolut konvergiert. Insgesamt können wir das unendliche Produkt also aufspalten in

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-a_n) \;=\; \exp\Big(\sum_{n=N}^{\infty}\mathrm{Log}(1-a_n)\Big) \;\cdot\; \prod_{n=1}^{N-1}(1-a_n)$$

und selbstverständlich ist der erste Faktor niemals Null und der zweite genau dann, wenn die behauptete Bedingung gilt. □

Definition 7.3 *(Diskriminante / Diskriminantenfunktion)*
Für $z \in \mathbb{H}$ setzen wir die Diskriminantenfunktion als

$$\triangle(z) \;=\; \exp(2\pi i z)\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\big(1-\exp(2\pi i n z)\big)^{24} \;=\; q\cdot\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{24}$$

[1] Vergleiche [FT1]

Anmerkung Die Definition der Diskriminante scheint recht natürlich, bis auf den Exponenten 24, der irgendiwe vom Himmel fällt. Wir wissen aber schon: Wenn $\triangle$ eine Modulform ist, dann gibt es eine polinomielle Darstellung der Diskriminante in E_4 und E_6. Oben habe ich an die expliziten Berechnungen dieser Reihen erinnert, und keinesfalls zufällig gelten $24 = \mathrm{ggT}(240, 504)$ sowie $24 = 7 \cdot \mathrm{ggT}(2160, 16632)$. Weiterhin haben wir im letzten Vortrag gesehen, dass der 1-te Fourier-Koeffizient der „beinahe-Modulform“ E_2 den Wert -24 hat.

Bemerkung 7.4 *Das in der vorangegangenen Definition angegebene unendliche Produkt konvergiert absolut. Insbesondere ist die Diskriminante $\triangle$ eine auf ganz $\mathbb{H}$ holomorphe Funktion, die nirgendwo den Wert Null annimmt.*

Beweis. Für alle $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$|\,q\,| \;=\; \big|\exp(2\pi i z)\big| \;<\; 1$$

also ist zum einen kein Faktor des unendlichen Produktes aus der vorangegangenen Definition gleich Null und zum anderen konvergiert die Folge $|q|^n$ exponentiell schnell gegen Null. Damit konvergiert das unendliche Produkt aus Definition 7.3 absolut. $\square$

Definition 7.5 *(Petersonscher Strichoperator)*
Seien $k \in \mathbb{Z}$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ sowie $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ holomorph, dann definieren wir die Funktion

$$\begin{aligned} \big(f|_k A\big) : \mathbb{H} &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto (cz+d)^{-k} \cdot f(A.z) \end{aligned}$$

Der Operator $f \mapsto \big(f|_k A\big)$ heißt Petersonscher Strichoperator.

Anmerkung Die mit der vorangegangenen Definition gegebene Gruppenoperation von Γ auf dem Raum der holomorphen Funktionen ist eine Rechts-Gruppenoperation.

Satz 7.6 *Die Diskriminante $\triangle : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist eine Modulform vom Gewicht 12 über $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$.*

Beweis. Nach Bemerkung 7.4 gilt $\triangle(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$, also können wir die logarithmische Ableitung von $\triangle$ betrachten. Es gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} d\log(\triangle(z)) &= 1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\, q^n}{1-q^n} \\ &\overset{Geom.Reihe}{=} 1 - 24 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_1(m) \cdot q^m \;=\; E_2(z) \end{aligned}$$

Für die Funktion G_2 haben wir unter Operation mit einer Matrix $A \in \Gamma$ die folgende Formel gesehen:

$$G_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^2 \cdot G_2(Z) - \pi i c \cdot (cz+d)$$

Damit können wir auch E_2 auf das Verhalten bei $A.z$ mit $A \in \Gamma$ untersuchen. Es gilt

$$\begin{aligned} E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) &= \frac{6}{\pi^2} \cdot G_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) \\ &= \frac{6}{\pi^2} \cdot \big((cz+d)^2 \cdot G_2(Z) - \pi i c \cdot (cz+d)\big) \\ &= (cz+d)^2 \cdot E_2(Z) - \frac{6ic}{\pi} \cdot (cz+d) \end{aligned}$$

Wir bringen nun alles auf eine Seite und teilen die gesamte Formel durch $(cz+d)^2$. Wir erhalten

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{(cz+d)^2}\cdot E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + \frac{6ic}{\pi}\frac{1}{cz+d} - E_2(z) \\ &= \underbrace{\frac{1}{(cz+d)^2}\cdot E_2\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}_{\frac{1}{2\pi i}\, d\,\log(\triangle(A.z))} - \underbrace{\frac{12ic}{2\pi}\frac{1}{cz+d}}_{\frac{1}{2\pi i}\, d\,\log\left((cz+d)^{12}\right)} - \underbrace{E_2(z)}_{\frac{1}{2\pi i}\, d\,\log(\triangle(z)} \\ &= \frac{1}{2\pi i}\, d\,\log\left(\frac{\triangle\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}{(cz+d)^{12}\cdot\triangle(z)}\right) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Da die logarithmische Ableitung Null ist, folgt aus Formel (7.1):

$$\frac{\triangle\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)}{(cz+d)^{12}\cdot\triangle(z)} = C(A)$$

mit einer Konstanten $C(A)\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$, die ausschließlich von A abhängt. Betrachten wir nun Definition 7.5 sehen wir, dass gilt:

$$\big(\triangle\,|_{12}A\big)(z) = C(A)\cdot\triangle(z) \qquad \text{für alle } z\in\mathbb{H} \text{ und alle } A\in\Gamma$$

Um zu zeigen, dass $\triangle$ eine Modulform vom Gewicht 12 ist, müssen wir noch zeigen, dass $C(A)=1$ für alle Matrizen A aus Γ ist[2]. Weil aber $\triangle \mapsto \triangle\,|_{12}A$ eine Gruppenoperation ist, ist die Abbildung

$$C:\Gamma \to \mathbb{C}^\times$$

ein Homomorphismus, denn für $A,B\in\Gamma$ gilt

$$\begin{aligned} C(AB) &= \frac{\big(\triangle\,|_{12}AB\big)(z)}{\triangle(z)} = \frac{\big(\big(\triangle\,|_{12}A\big)|_{12}B\big)(z)}{\triangle(z)} \\ &= \frac{\big(\big(\triangle\,|_{12}A\big)|_{12}B\big)(z)}{\big(\triangle\,|_{12}A\big)(z)}\cdot\frac{\big(\triangle\,|_{12}A\big)(z)}{\triangle(z)} \\ &= \frac{C'\big(\triangle\,|_{12}B\big)(z)}{C'\,\triangle(z)}\cdot C(A) = C(B)\cdot C(A) \end{aligned}$$

Daher genügt es zu Zeigen, dass $C(T)=1=C(S)$ für die Erzeugenden $T=\left(\begin{smallmatrix}1&1\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ und $S=\left(\begin{smallmatrix}0&-1\\1&0\end{smallmatrix}\right)$ gilt. Für T ist dies offensichtlich, denn es gilt

$$\triangle(z+1) = C(T)\cdot 1^{12}\cdot\triangle(z)$$

und $\triangle(z)$ ist eine Potenzreihe von $\exp(2\pi iz)$ und hat daher Periode 1. Für S gilt

$$\triangle\left(-\frac{1}{z}\right) = C(S)\cdot z^{12}\cdot\triangle(z)$$

[2] Bemerkung zum Peterssonschen Strichoperator: Ist f eine Modulform vom Gewicht k zu Γ, dann gilt für alle $A\in\Gamma$: $\big(f|_kA\big) = f$. Vergleiche [Wiese] Lemma 2.5.18.

Wir wissen, dass $C(S)$ nur von S, nicht aber vom eingesetzten $z \in \mathbb{H}$ abhängt, daher betrachte diese Gleichung für $z = i$ und erhalte

$$\triangle(i) \;=\; C(S) \cdot (-1)^6 \cdot \triangle(i)$$

Wir haben bereits gezeigt, dass die Diskriminante auf der oberen Halbebene nicht Null wird, also ist insbesondere $\triangle(i) \neq 0$ und damit folgt die Behauptung. □

Anmerkung Wir haben nun gesehen, dass $\triangle \in M_{12}$ ist und wissen, dass alle Modulformen von Gewicht 12 eine Nullstelle haben. Weiter haben wir gesehen, dass $\triangle(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Also muss die Nullstelle von $\triangle$ bei $i\infty$ liegen.

Wir haben in den vorangegangenen Vorträgen gesehen, dass der Raum $M_{12}\big(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})\big)$ höchstens Dimension zwei hat und von E_4^3 und E_6^2 erzeugt wird. Also muss es eine Linearkombination

$$\triangle(z) \;=\; \alpha E_4^3(z) \,+\, \beta E_6^2(z)$$

geben. Aus den Fourier-Entwiklungen der Eisensteinfunktionen

$$\begin{aligned} E_4^3(z) &= 1 + 720q + \dots \\ E_6^2(z) &= 1 - 1008q + \dots \end{aligned}$$

sowie der Diskriminante

$$\triangle(z) \;=\; q + \dots$$

erhalten wir diese Linearkombination sofort als

$$\triangle(z) \;=\; \frac{1}{1728} \cdot \big(E_4^3(z) - E_6^2(z)\big) \tag{7.2}$$

Als Folgerung erhalten wir nun einen wesentlich algorithmischeren / konstruktiveren Beweis für eine bereits bekannte Tatsache.

Folgerung 7.7 *Jede Modulform vom Gewicht größer drei auf Γ ist polynomiell in E_4 und E_6.*

Beweis. Sei $f(z)$ eine Modulform von beliebigem Gewicht $k \geq 4$ und sei etwa

$$f(z) \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot q^n \qquad \text{mit } q := q(z)$$

ihre Fourierentwiklung. Wähle nun Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ mit $4a + 6b = k$ und setze

$$h(z) \;:=\; \frac{f(z) \,-\, a_0 \cdot E_4(z)^a \cdot E_6(z)^b}{\triangle(z)}$$

Die Hilfsfunktion h ist auf der gesamten oberen Halbebene holomorph, denn $\triangle(z) \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{H}$. Aber auch bei $i\infty$, denn der Zähler $f - a_0 E_4^a E_6^b$ von h hat eine Fourierentwiklung ohne konstanten Term, und die Fourierentwiklung der Diskriminante beginnt mit q. Also ist h eine Modulform vom Gewicht $k - 12$. Führe die obengenannte Konstruktion für die „neue" Modulform h aus, dieser Vorgang bricht nach endlich vielen Widerholungen ab, und wir sehen , dass h ein Polynom in E_4 und E_6 ist. Nach Formel (7.2) wissen wir, dass auch die Diskriminante polynomiell in E_4 und E_6 ist. Wegen

$$f(z) \;=\; a_0 \cdot E_4(z)^a \cdot E_6(z)^b + \triangle(z) \cdot h(z)$$

folgt daraus bereits die Polynomialität in E_4 und E_6 von f. $\square$

Anmerkung Für diesen Beweis haben wir benutzt, dass die Diskriminante auf $\mathbb{H}$ nicht verschwindet und ihre Fourier-Entwiklung mit q beginnt. Beides haben wir aus der Produktdarstellung geschöpft. Wir hätten aber auch anders vorgehen und Formel (7.2) zur Definition der Diskriminante erheben können. Dann wäre die Tatsache, dass die Fourier-Entwiklung mit 1 beginnt aus unserer Kenntnis der ersten beiden Fourier-Koeffizienten von E_4 und E_6 gefolgt. Den Umstand, dass die Diskriminante auf $\mathbb{H}$ nie den Wert Null annimmt hätten wir aus der Formel[3]

$$\sum_{\substack{z \in \mathrm{NST}_{\tilde{\mathcal{F}}}(\triangle) \\ z \neq i, \rho}} \mathrm{Ord}_z(\triangle) + \frac{\mathrm{Ord}_i(\triangle)}{2} + \frac{\mathrm{Ord}_\rho(\triangle)}{3} + \mathrm{Ord}_{i\infty}(\triangle) \quad = \quad \frac{k}{12} \quad = \quad \frac{12}{12}$$

schließen können, denn die Gesamtzahl von einer Γ-inäquivalenten Nullstelle, dies ist die Anzahl der Nullstellen von $\triangle$ auf $\tilde{\mathcal{F}}$, entfällt vollständig auf die Nullstelle erster Ordnung bei $i\infty$.

Definition 7.8 *(Ramanujam τ-Funktion)*
Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir die Ramanujam τ-Funktion als die Koeffizienten der Reihe, die wir durch Ausmultiplizieren des unendlichen Produktes der Diskriminante erhalten, das heißt

$$\triangle(z) \quad = \quad q \cdot \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^{24} \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) \cdot q^n$$

Beispiel 1 *(Einige Werte der Ramanujam τ-Funktion)*
Ramanujam hat bereits 1915 die ersten 30 Werte von τ berechnet.

n	1	2	3	4	5	6	...
$\tau(n)$	1	-24	252	-1472	4830	-6048	

Für die ersten 30 Werte der τ-Funktion hat Ramanujan zwei große Ergebisse abgelesen:

Multiplikativität $\tau(pq) = \tau(p) \cdot \tau(q)$ und $\tau(p^2) = \tau(p)^2 - p^{11}$ für verschiedene Primzahlen $p, q \in \mathbb{N}$

Abschätzung $|\tau(p)| \leq 2p^5\sqrt{p}$ für Primzahlen $p \in \mathbb{N}$.

Ramanujan hat bereits vermutet, dass diese Ergebnisse auch in Allgemeinheit gelten. Die Allgemeingültigkeit der Multiplikativität wurde ein Jahr später von Mordell nachgewiesen und später von Hecke zur Theorie der Hecke-Operatoren ausgebaut.

Die Abschätzung konnte aber erst 1974 von Deligne für alle Primzahlen bewiesen werden. Dieser Beweis von Deligne ist ein sehr tiefes Resultat, das den Umfang dieses Vortrages bei weitem sprengen würde. Aber wir wollen eine, auf Hecke zurückgehende, schwächere Abschätzung für τ zeigen. Dazu benötigen wir zunächst noch einen weiteren Begriff

Definition 7.9 *(Spitzenform)*
Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Modulform zu Γ mit Fourier-Entwiklung

$$f(z) \quad = \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot q^n$$

Wir nennen f eine Spitzenform, wenn der konstante Term der Fourier-Entwiklung verschwindet, das heißt wenn $a_0 = 0$ ist.

[3] Vergleiche Vortrag 3. „Dimension von M_k“

Anmerkung Die hier gemachte Definition einer Spitzenform ist nur richtig für Modulformen von ganz Γ und lässt sich nicht trivial zu einer Definition von Spitzenformen über beliebigen Untergruppen von Γ verallgemeinern.

Beispiel 2 *Die Diskriminante ist eine Spitzenform, denn es gilt*

$$\triangle(z) \;=\; 0 + 1q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + \dots$$

Satz 7.10 *(Hecke)*
Sei $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ eine Spitzenform vom Gewicht k mit Fourier-Entwiklung

$$f(z) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot q^n$$

Dann gibt es eine, ausschließlich von f abhängende, Konstante $C \in \mathbb{R}_+$, so dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$|a_n| \;\leq\; Cn^{\frac{k}{2}}$$

Beweis. Für $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$ und $z \in \mathbb{H}$ gilt

$$\operatorname{Im}(A.z) \;=\; \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}$$

Bezeichne $y := \operatorname{Im}(z)$ und $x := \operatorname{Re}(z)$, dann ist die Funktion

$$h(z) \;=\; y^{\frac{k}{2}} |f(z)|$$

invariant unter der Operation von Γ, denn

$$\begin{aligned} h(A.z) \;&=\; \left(\frac{y}{|cz+d|^2}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot \big|\,(cz+d)^k\big| \cdot |f(z)| \\ &=\; y^{\frac{k}{2}}|f(z)| \;=\; h(z) \end{aligned}$$

Für $y \to \infty$ geht h sehr schnell gegen Null, denn die Fourier-Entwiklung von f beginnt mit $a_1 \cdot q$ nach Voraussetzung und $|q| = |q(z)| = \exp(-2\pi y)$. Also ist h durch die Form des Fundamentalbereichs $\tilde{\mathcal{F}}$ eindeutig begrenzt, denn $h(q)$ hat eine stetige Fortsetzung auf die gesamte Einheitskreisscheibe. Das heißt aber es gibt ein $c \in \mathbb{R}_+$ mit

$$y^{\frac{k}{2}}|f(z)| \;=\; \big|y^{\frac{k}{2}}|f(z)|\big| \;=\; |h(z)| \;\leq\; c$$

Wir erhalten also die Abschätzung

$$\big|f(z)\big| \;\leq\; cy^{-\frac{k}{2}} \qquad \text{mit } y := \operatorname{Im}(z) \text{ und } c \in \mathbb{R}_+$$

wobei c ausschließlich von f abhängt. Mit der Integralformel für Fourier-Koeffizienten[4] erhalte

$$\begin{aligned} |a_n| \;&=\; \left|\,\exp(2\pi n y) \cdot \int_0^1 f(x+iy) \cdot \exp(-2\pi i n x)\,dx\right| \\ &\leq\; \exp(2\pi n y) \cdot \int_0^1 \big|f(x+iy)\big|\,dx \\ &\leq\; \exp(2\pi n y) \cdot c \cdot y^{-\frac{k}{2}} \end{aligned}$$

[4]Zum Beispiel aus [FT1]

wir dürfen $y \in \mathbb{R}_+$ frei wählen, denn die Integralformel für a_n stimmt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x + iy \in \mathbb{H}$. Wähle also $y = \frac{1}{n}$, dann erhalten wir

$$|a_n| \;\leq\; \exp(2\pi) \cdot c \cdot \frac{1}{n^{-\frac{k}{2}}} \;=\; \exp(2\pi) c \cdot n^{\frac{k}{2}} \;=:\; C n^{\frac{k}{2}}$$

und das beweist das Lemma. □

Anmerkung Eine genauere Abschätzung der a_n erhalten wir mit der Wahl $y = \frac{k}{4\pi n}$, denn dann gilt

$$|a_n| \;\leq\; c \cdot \left(\frac{4\pi e}{k}\right)^{\frac{k}{2}} \cdot n^{\frac{k}{2}}$$

Da $\triangle$ eine Spitzenform ist, gilt diese Abschätzung auch für die Fourier-Koeffizienten von $\triangle$. Dies sind aber gerade die $\tau(n)$. Wir erhalten Heckes Abschätzung

$$\big|\tau(n)\big| \;\leq\; C n^{\frac{12}{2}} \;=\; C n^6$$

Jede Modulform f vom Gewicht k hat eine eindeutige Darstellung

$$f \;=\; \alpha\, \mathbb{G}_k(z) + \beta g$$

wobei g eine Spitzenform vom Gewicht k ist, damit erhalten wir auch für Modulformen, die keine Spitzenformen sind, aus dem obigen Satz noch eine Abschätzung, denn es ist

$$\mathbb{G}_k(z) \;=\; -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) \cdot q^n$$

und für die Koeffizienten von $\mathbb{G}$ gilt

$$n^m \;\leq\; \sigma_m(n) \;<\; \zeta(m) \cdot n^m$$

Notationen

- Die Null ist in meiner Notation keine natürliche Zahl, also $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ \ldots\}$. wenn ich auch die Null betrachten will, schreibe ich $\mathbb{N}_0$.
- Die via $\mathbb{R}_+$ ausgezeichnete Menge, ist die Menge der positiven reellen Zahlen, also nichts anderes als $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$.
- Ich verwende die Notation $\Gamma := \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$. Es werden durchgängig die gleichen Bezeichnungen $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ für die Erzeuger von Γ verwendet.
- Für den Raum aller Modulformen von Gewicht k über Γ folge ich Zagiers Notation und schreibe M_k.
- An einigen Stellen habe ich die Bezeichnung

  $$\tilde{\mathcal{F}} \ := \ \left\{ z \in \mathbb{H} \,\middle|\, |z| > 1 \text{ und } |\,\mathrm{Re}(z)| < \frac{1}{2} \right\} \cup \left(\partial\tilde{\mathcal{F}} \cap \left\{ z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Re}(z) \geq 0 \right\} \right)$$

  für den Standard-Fundamentalbereich von Γ verwendet, wobei $\partial\tilde{\mathcal{F}}$ der Rand der offenen Menge $\tilde{\mathcal{F}}$ sei.

Literatur

Hauptsächlich orientiert sich dieser Vortrag am Abschnitt 2.4 „The Discriminant Function and Cusp Forms“ des Textes von Don Zagier. Ergänzt um Definitionen und Rechnungen hauptsächlich aus der Vorlesung von Herrn Wiese.

[Zagier] **D. Zagier** - *Elliptic Modular Forms and Their Applications*,
Elektronisch unter: `http://people.mpim-bonn.mpg.de/zagier/`

[Wiese] **G. Wiese** - *Modulformen, Vorlesungsskript*,
Elektronisch unter: `http://maths.pratum.net/`

[FT1] **E. Freitag, R. Busam** - *Funktionentheorie I*, Springer-Verlag, New York