

UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN

Fakultät für Mathematik

Nash-Aufblasungen torischer Varietäten

Diplomarbeit

zur Erlangung des ersten akademischen Grades

Diplommathematiker

Vorgelegt von: Johannes Hölken
Geboren am 26.03.1983 in Werne
Matrikel-Nr. ES0 2226320

Betreuer: Prof. Dr. Ulrich Görtz
Tag der Einreichung: 30.09.2014

Inhaltsverzeichnis

Einführung	ii
Danksagung	v
I Torische Varietäten	1
1 Grundlagen	1
2 Torische Varietäten zu Polyedern	6
3 Normale Polyeder	9
4 Korrespondenz der Ecken von P zu Fixpunkten von T auf X_P	14
5 Klassifizierung von torischen Varietäten zu Polyedern	20
II Nash-Aufblasungen	27
6 Definition und Eigenschaften	27
7 Geradenbündel auf torischen Varietäten	30
8 Nash-Aufblasung torischer Varietäten	38
III Algorithmische Implementierung	47
9 Beschreibung des Algorithmus	47
10 Implementierung mit SAGE	48
11 Beispiele	50
A Anhang	57
Notationen und Symbole	57
Abbildungsverzeichnis	60
Listings	60
Literaturverzeichnis	61

Einführung

Torische Varietäten bilden eine interessante Klasse von Schemata, da sie sich durch einfache kombinatorische Objekte (*Kegel, Fächer, Polyeder, ...*) beschreiben lassen. Damit bieten sie die Möglichkeit komplizierte Sachverhalte der algebraischen Geometrie an sehr expliziten Beispielen zu studieren. Darüber hinaus ist ebenfalls die algorithmische Berechnung mit Hilfe von Computern durch die Verwendung einfacherer kombinatorischer Befehle und linearer Algebra deutlich leichter umzusetzen.

Die vorliegende mathematische Schrift untersucht in Anlehnung an die Arbeit von A. Atanasov, C. Lopez, A. Perry, N. Proudfoot und M. Thaddeus [ALPPT] die Konstruktion der Nash-Aufblasung von torischen Varietäten. Insbesondere wird eine explizite Formel in kombinatorischer Sprache, sowie eine algorithmische Implementierung zur Berechnung eben dieser, bereitgestellt. Dabei wird die offene Frage, ob sich jede singuläre Varietät in endlich vielen Schritten zu einer glatten Varietät aufblasen lässt, berührt. Leider kann die Frage, ob die Nash-Aufblasung torischer Varietäten eben jene Endlichkeitseigenschaft erfüllt, in diesem Dokument nicht beantwortet werden. Jedoch stellt der beschriebene Algorithmus ein Mittel zur Suche möglicher Gegenbeispiele bereit.

Nutzungsanleitung für dieses Dokument

In diesem Dokument sind die Abschnitte fortlaufend über Kapitelgrenzen hinweg numeriert. Dadurch wird die Nummer eines Abschnittes im gesamten Dokument eindeutig und es genügt sich auf die Nummer des Abschnittes zu beziehen.

Allgemeine Voraussetzungen, die zu Beginn eines Kapitels genannt werden, gelten - sofern nicht explizit anders angegeben - für alle Abschnitte des Kapitels, aber nicht mehr im folgenden Kapitel. Entsprechend gelten die Voraussetzungen, die zu Beginn eines Abschnittes gemacht werden, auch für alle untergeordneten Gliederungstypen, aber nicht mehr im folgenden Abschnitt.

Torische Varietäten werden über einem allgemeinen algebraisch abgeschlossenen Körper k und nicht notwendig über \mathbb{C} betrachtet. Wann immer wir von einem Torus reden, ist ein algebraischer Torus $T = (k^\times)^n \cong \mathbb{G}_m^n$, also ein n -faches direktes Produkt der multiplikativen Gruppe gemeint. Im Anhang findet sich ein Verzeichnis der benutzten Notationen und Symbole.

Zusammenfassung

Kapitel I Das Kernstück des ersten Kapitels ist eine direkte Anleitung zur Errechnung von Ecken des erzeugenden Polyeders einer gegebenen torischen Varietät, sowie eine Klassifizierung torischer Varietäten vermöge einer Bijektion zwischen normalen Polyedern und torischen Varietäten, zusammen mit deren Einbettung in einen projektiven Raum.

Zunächst liefert das Kapitel jedoch eine Einführung in die benötigten Begriffe und soll die für diese Arbeit wichtigsten Ergebnisse über torische Varietäten zusammenfassen. Leser*innen, die mit der Welt der torischen Varietäten bereits vertraut sind, können die ersten Abschnitte in diesem Kapitel ruhig überspringen und nur bei Bedarf nachlesen. Die Arbeit folgt bei grundlegenden Begriffen und Notationen kombinatorischer Objekte dem Buch von Fulton [F].

Der erste Abschnitt definiert torische Varietäten und beschreibt die eindeutigen Zuordnungen von Kegeln zu affinen und Fächern zu allgemeinen torischen Varietäten.

Die folgenden zwei Abschnitte verallgemeinern im Wesentlichen benötigte Teile der Theorie wie einem Polyeder, das ist ein Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume in einem \mathbb{R} -Vektorraum $M_{\mathbb{R}}$, eine torische Varietät zugeordnet werden kann und wie sich aus Kenntnis bestimmter Eigenschaften des Polyeders auf Eigenschaften der torischen Varietät schließen lässt.

Der vierte Abschnitt betrachtet die Gegenrichtung. Hier wird von der torischen Varietät X zusammen mit einer gegebenen Einbettung in einen projektiven Raum auf die Ecken des korrespondierenden Polyeders geschlossen. Dazu betrachten wir Ein-Parameter-Untergruppen

$$\lambda^u(t) := (t^{\langle u, m_1 \rangle}, \dots, t^{\langle u, m_n \rangle})$$

für einen Gitterpunkt u und eine Basis m_1, \dots, m_n des dualen Gitters des Torus. Wir definieren den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$$

über einem allgemeinen algebraisch abgeschlossenen Körper und zeigen, dass dies gerade den ausgezeichneten Punkt eines Kegels im zu X korrespondierenden Fächer liefert. Dieser ausgezeichnete Punkt ist ein Fixpunkt von X unter der Torus-Operation, sofern der Kegel volle Dimension hat. Also genau dann, wenn die zugehörige affine torische Varietät eine affine Karte von X ist. Bezeichne Y den affinen Kegel von X bezüglich der gegebenen Einbettung, dann lassen sich die Koordinaten der Eckpunkte des korrespondierenden Polyeders aus den Exponenten der Torus-Elemente auf der Faser der Fixpunkte unter der Projektion $Y \setminus \{0\} \rightarrow X$ berechnen.

Der letzte Abschnitt des ersten Kapitels beschreibt eine Möglichkeit torische Varietäten durch die zugehörigen Polyeder zu klassifizieren. Dazu betrachten wir auf der einen Seite einen normalen Gitterpolyeder P zusammen mit einer endlichen Menge $S \subseteq P \cap M$, derart, dass $S \times \{1\}$ zusammen mit den Gitterpunkten des Rezeptionskegels $(0P \cap M) \times \{0\}$ die Halbgruppe $C(P) \cap (M')$ erzeugt. Auf der anderen Seite betrachten wir das Tupel (X, U, ι, φ) , wo $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}_U^{l-1}$ eine quasi projektive torische Varietät und U eine affine torische Varietät so sind, dass der Torus T von X auch auf U operiert und wir den zu U gehörigen streng konvexen Kegel in das, zum Torus T gehörige, Gitter einbetten können. Weiter betrachten wir die Abbildung $\varphi : T \rightarrow \mathbb{G}_m^l \times T_U$, wo T_U der Torus zu U sei, und fordern, dass die Einbettung ι äquivariant unter φ und X projektiv normal bezüglich ι ist.

Diese Tupel bezeichnen wir als Rekonstruktionsdaten und können mit diesen Begriffen die folgende Bijektion konstruieren:

$$\left\{ \begin{array}{l} (P, S) \text{ mit einem Gitter-Polyeder} \\ \text{voller Dimension und } S \text{ wie zuvor} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Phi} \\ \xleftarrow{\Psi} \end{array} \left\{ \text{Rekonstruktionsdaten} \right\} / \cong$$

Die Abbildung Φ erhalten wir hierbei im Wesentlichen aus der im zweiten Abschnitt beschriebenen Methode einem Polyeder einen normalen Fächer, und somit eine quasi-projektive Varietät, zuzuordnen und aus der im dritten Abschnitt beschriebenen Einbettung, die wir aus der Menge S konstruieren.

Die Abbildung Ψ erhalten wir aus der im vierten Abschnitt erarbeiteten Methode aus Fixpunkten einer torischen Varietät, mit gegebener Einbettung in einen projektiven Raum, Punkte im zugehörigen dualen Gitter zu errechnen, indem wir den Polyeder P als konvexe Hülle dieser Punkte setzen. Die Menge S erhalten wir aus der durch die Einbettung ι gegebenen Einbettung des affinen Kegels von X in den affinen Raum \mathbb{A}_U^l .

Kapitel II Der zentrale Punkt des zweiten Kapitels ist die konkrete Angabe der normalisierten Nash-Aufblasung einer affinen torischen Varietät in kombinatorischer Sprache.

Im zweiten Kapitel wird dazu sowohl der Begriff der Nash-Aufblasung eingeführt, als auch die zuvor bereitgestellte Theorie zur Berechnung der Ecken eines Polyeders mit Hilfe von amplen und linearisierten Geradenbündeln auf torischen Varietäten verallgemeinert.

Der erste Abschnitt des Kapitels behandelt die Herleitung der Nash-Aufblasung über den Graph der Gauss-Abbildung, die jedem Punkt im glatten Ort einer Varietät ihren Tangentialraum zuordnet. Wir sehen ein Beispiel in dem der glatte Ort bei Anwendung der Nash-Aufblasung gleich bleibt, Nash-Aufblasung alleine also nicht ausreicht, um aus einer singulären Varietät eine „glattere“ zu machen. Wir betrachten im Anschluss die normalisierte Nash-Aufblasung und einige ihrer Eigenschaften.

Abschnitt 7, der zweite Abschnitt des zweiten Kapitels, ist der erste wichtige Schritt in Vorbereitung auf das genannte Theorem. Hier wird die Berechnung der Ecken des korrespondierenden Polyeders mit der Theorie der ampelnen, linearisierten Geradenbündel auf torischen Varietäten zusammengebracht. Als Ergebnis erhalten wir, dass der Polyeder der normalisierten Nash-Aufblasung sich nur um Skalierung mit einer natürlichen Zahl vom Polyeder der nicht-normalisierten Nash-Aufblasung unterscheidet. Da beide Polyeder die selbe torische Varietät (aber mit verschiedenen Einbettungen in projektive Räume) definieren, können wir die konkrete Berechnung anhand der Plücker-Einbettung vornehmen.

Der dritte Abschnitt des zweiten Kapitels widmet sich ganz dem Nachweis der Voraussetzungen und dem anschließenden Beweis von

Theorem 8.1 *Die torische Varietät $X_{C+\text{Hull } S}$ ist, zusammen mit der Abbildung, welche durch die Inklusion der Kegel aus dem normalen Fächer $\Delta_{C+\text{Hull } S}$ nach C^N gegeben ist, die normalisierte Nash-Aufblasung von $X(C)$.*

Dabei bezeichnet C einen streng konvexen Kegel im dualen Gitter M und S berechnet sich aus der Hilbertbasis H von $C \cap M$ wie folgt:

$$S := \{h_1 + \dots + h_d \mid h_i \in H \text{ linear unabhängig} \}$$

Da sowohl die Nash-Aufblasung, als auch die Normalisierung lokale Konstruktionen sind, ist die Verallgemeinerung auf den nicht affinen Fall eine unmittelbare Folgerung.

Kapitel III Das dritte Kapitel umfasst die Beschreibung der algorithmischen Umsetzung und den Quellcode der Implementierung mit [Sage]. Im abschließenden Abschnitt werden einige Beispiele von Nash-Aufblasungen mit dem Algorithmus explizit berechnet und mit der Arbeit von [ALPPT] verglichen.

Danksagung

Danken möchte ich in erster Linie meinem Betreuer, Herrn Professor Dr. Ulrich Görtz, der mir nicht nur immer wieder über fachliche Hürden hinweg geholfen hat, sondern auch stets durch moralische Unterstützung und echte Anteilnahme an meinem Vorankommen, die für diese Arbeit nötige Motivation gegeben hat. Stets hatte er, auch kurzfristig, Zeit für meine Sorgen und Fragen und hat mich dazu gebracht über meine Grenzen hinauszudenken.

Daneben gilt mein Dank Liesa-Maria Nagel und Andrea Hessler, die beide in zahlreichen Stunden Korrektur gelesen haben. Dank ihres unermüdlichen Einsatzes ist diese Arbeit um zahlreiche Komata reicher und um einige Rechtschreibfehler ärmer.

Nicht zuletzt gebührt auch meiner Großmutter, die mir durch eine Erbschaft die finanziellen Mittel zum Studium hinterlassen hat, sowie meiner Mutter, die mich ebenfalls finanziell, vor allem aber auch gerade in der Schlussphase meines Studiums emotional immer unterstützt hat, Dank.

Kapitel I

Torische Varietäten

In diesem Kapitel bezeichne k stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper, N ein Gitter der Dimension n und M sein Dual.

1 Grundlagen

Die Einführung der eindeutigen Korrespondenz zwischen kombinatorischen Objekten (Kegeln, Fächern) und torischen Varietäten folgt im Wesentlichen [O], Kapitel 4 und 5.

Definition 1.1 Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen das n -fache direkte Produkt der multiplikativen Gruppe $T = (k^\times)^n \cong \mathbb{G}_m^n$ von k als Torus.

Eine normale algebraische Varietät X heißt eine torische Varietät zum Torus T , wenn sie den Torus T als dichte, offene Menge enthält und dieser auf X so operiert, dass sich die Gruppenstruktur von T auf X erweitert, das heißt wenn es ein kommutatives Diagramm wie folgt gibt:

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \longrightarrow & X \\ \uparrow & & \uparrow \\ T \times T & \longrightarrow & T \end{array}$$

Seien X, Y torische Varietäten mit zugehörigen Tori T_X und T_Y . Ein Morphismus von Varietäten $f : X \rightarrow Y$ heißt Morphismus von torischen Varietäten, oder ein torischer Morphismus, falls f mit den Operationen der Tori verträglich ist, also, falls das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T_X & \xrightarrow{f|_{T_X}} & T_Y \end{array}$$

Im Folgenden bezeichne N stets ein Gitter, das ist ein freier \mathbb{Z} -Modul von endlichem Rang. Nach Wahl einer Basis auf N gilt also $N \cong \mathbb{Z}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wir bezeichnen den zu N gehörigen reellen Vektorraum $N \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ mit $N_{\mathbb{R}}$ und den zugehörigen Torus mit $T_N \cong \mathbb{G}_m^n$. Weiter bezeichnen wir das zu N duale Gitter mit M und den zugehörigen reellen Vektorraum mit $M_{\mathbb{R}}$.

Torische Varietäten lassen sich kombinatorisch über *Gitter*, *Fächer* und *Kegel* beschreiben. Wir folgen in Definitionen und Notationen der kombinatorischen Objekte [F] und werden nur abweichende Definitionen hier einführen. Wie in der Literatur üblich, bezeichnen wir nur die abgeschlossenen

Punkte einer affinen torischen Varietät als Punkte. Da wir uns in dieser Arbeit nur mit rationalen, polyedrischen Kegeln befassen, bezeichnen wir diese durchweg einfach als Kegel. Wir zeigen die Übersetzung der torischen Varietäten in kombinatorische Objekte zunächst im rein affinen Fall.

Lemma 1.2 Sei σ ein Kegel in $N_{\mathbb{R}}$ und $S_{\sigma} = \sigma^{\vee} \cap M$ der zugehörige Gordan-Monoid. Die Abbildung

$$\begin{aligned} \{ \text{Kegel in } N_{\mathbb{R}} \} &\rightarrow \{ \text{Affine tor. Var. zum Torus } T_N \} \\ \sigma &\mapsto U_{\sigma} = \text{Spec } k[S_{\sigma}] \end{aligned}$$

die einem Kegel eine affine torische Varietät zuordnet, ist eine Bijektion.

Beweis. Nach Gordans Lemma ist das Gordan-Monoid S_{σ} ein endlich erzeugtes saturiertes Untermonoid von M , welches M als Gruppe erzeugt. Damit ist der zugehörigen Monoidring von endlichem Typ über k und wir haben die Darstellung

$$A = k[S_{\sigma}] = \bigoplus_{m \in S_{\sigma}} k \cdot \chi^m$$

Auf analoge Weise können wir den Koordinatenring von T beschreiben als

$$\Gamma(T, \mathcal{O}_T) = \text{Hom}(T, \mathbb{A}_k^1) = k[X_1^{\pm}, \dots, X_n^{\pm}] = \bigoplus_{m \in M} k \cdot \chi^m$$

Da S_{σ} das Gitter M als Gruppe erzeugt, stimmen die Quotientenkörper von A und $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ überein.

Wir wollen nun zeigen, dass A normal, das heißt ganzabgeschlossen in seinem Quotientenkörper, ist. Dazu bezeichne A' den ganzen Abschluss von A in $\text{Frac}(A)$. Wir haben die folgende Inklusionskette

$$A \subseteq A' \subseteq \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \subset \text{Frac}(A)$$

Die Torus-Operation ist auf $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ gegeben durch

$$\begin{aligned} T \times \Gamma(T, \mathcal{O}_T) &\rightarrow \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \\ (t, f(\underline{X})) &\mapsto t \cdot f(\underline{X}) = f(t \cdot \underline{X}) \end{aligned}$$

Betrachte $k \cdot \chi^m \subseteq \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ genauer. Es gilt

$$k \cdot \chi^m = \{ f \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T) \mid \forall t \in T : t \cdot f = (t_1^{m_1} \cdots t_n^{m_n}) \cdot f \}$$

Bezeichne zu $t \in T \subseteq \text{End}(\Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ den Eigenraum in $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ zum Eigenvektor $(t_1^{m_1}, \dots, t_n^{m_n})$ mit $ER(t, m)$, dann erhalten wir die Darstellung

$$k \cdot \chi^m = \bigcap_{t \in T} ER(t, m)$$

Etwas ungenau ausgedrückt ist $k \cdot \chi^m$ also der „simultane Eigenraum aller $t \in T$ zu m “.

Da die Endomorphismen in der Untergruppe $T \subseteq \text{End}(\Gamma(T, \mathcal{O}_T))$ untereinander kommutieren, gilt nach linearer Algebra¹ für alle $s, t \in T$

$$t(ER(s, m)) \subseteq ER(s, m) \quad \text{für alle } m \in M$$

¹**Lemma** Sei V ein k -Vektorraum und $W \subseteq V$ ein k -Untervektorraum von V . Sei weiter $f \in \text{End}_k(V)$ ein k -Endomorphismus von V der W stabilisiert, also $f(W) \subseteq W$. Es gilt: Falls f diagonalisierbar in $\text{End}_k(V)$ ist, so ist $f|_W$ diagonalisierbar in $\text{End}_k(W)$.

Damit sind A und A' stabil unter der oben genannten T -Operation auf $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ und wir erhalten auch für A' eine Darstellung der Form

$$A' = \bigoplus_{m \in M'} k \cdot \chi^m$$

mit $M' \subset M$. Da A' eine k -Algebra von endlichem Typ ist, muss auch M' ein endlich erzeugtes Untermonoid von M sein, das M als Gruppe erzeugt.

Da wir A' als den ganzen Abschluss von A in $\text{Frac}(A)$ gewählt haben, gibt es eine k -Basis von A' aus Elementen der Form $\chi^{m'}$ mit $m' \in M$ und

$$(\chi^{m'})^l + a_1(\chi^{m'})^{l-1} + \dots + a_l = 0$$

mit von m' abhängigen $a_i \in A$. Ohne Einschränkung gibt es für jedes a_i ein $m_i \in S_\sigma$ mit $a_i = \lambda_i \cdot \chi_i^{m_i}$ für ein $\lambda_i \in k$. Da alle $\chi_i^{m_i} \neq 0$ sind, muss es ein $j \in \{1, \dots, l\}$ geben, mit $a_j \neq 0$ und

$$\begin{aligned} m_j &= (lm'_1, \dots, lm'_n) - ((l-j)m'_1, \dots, (l-j)m'_n) \\ &= (jm'_1, \dots, jm'_n) = jm' \in S_\sigma \end{aligned}$$

Da S_σ saturiert ist, ist dann bereits $m' \in S_\sigma$. Insgesamt folgt $A = A'$, das heißt A ist normal.

Ein k -wertiger Punkt von $U_\sigma = \text{Spec } A$ ist ein k -Algebra-Homomorphismus $u : A \rightarrow k$ welcher eindeutig durch seine Werte auf den χ^m mit $m \in M$ bestimmt ist. Offensichtlich operiert T auf U_σ . Sei $\{m_1, \dots, m_s\}$ ein Erzeugendensystem des Gordan-Monoids S_σ , dann wird M als Monoid von den Elementen $m_1, \dots, m_s, -(m_1 + \dots + m_s)$ erzeugt. Damit ist $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ die Lokalisierung von A bei $\chi^{m_1 + \dots + m_s}$. Somit enthält U_σ den Torus T als dichte offene Teilmenge.

Wir haben nun gezeigt, dass wir jedem Kegel σ eine affine torische Varietät von endlichem Typ über k zuordnen können. Sei nun $X = \text{Spec } A$ eine affine torische Varietät zum Torus T , wie in Definition 1.1 beschrieben.

Da X insbesondere normal ist, ist auch A normal. Da A eine k -Unteralgebra endlichen Typs von $\Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ ist, gilt

$$\text{Frac } A = \text{Frac } \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$$

und A ist stabil unter der oben definierten Torus-Operation.

Genau wie zuvor erhalten wir auch hier eine Darstellung

$$A = \bigoplus_{m \in S} k \cdot \chi^m$$

für einen Monoid $S \subset M$, das M als Gruppe erzeugt, denn für $m' \in M$ ist das Ideal des Nenners von $\chi^{m'} \in \Gamma(T, \mathcal{O}_T)$ ein T -invariantes Nicht-Null-Ideal von A und enthält somit ein χ^m mit $m \in S$ und $\chi^m \cdot \chi^{m'} \in A$. Da A normal ist, ist S saturiert.

Behauptung 1 *Zu jedem saturierten Monoid $S \subseteq M$, das M als Gruppe erzeugt, gibt es einen eindeutig bestimmten Kegel σ mit $S = \sigma^\vee \cap M = S_\sigma$.*

Begründung. Sei $H \subset M$ eine endliche Menge, die S als Monoid erzeugt, dann liegt S im von H erzeugten Kegel $\text{cone}(H) \subset M_{\mathbb{R}}$. Da nach Voraussetzung S das Gitter M als Gruppe erzeugt, gilt $\dim \text{cone}(H) = \dim M_{\mathbb{R}}$. Setze

$$\sigma := \text{cone}(H)^\vee \subset N_{\mathbb{R}}$$

Dann ist σ ein streng konvexer Kegel mit $S \subseteq \sigma^\vee \cap M$. Da S nach Voraussetzung saturiert ist, ist $S = \text{cone}(H) \cap M$. Denn wegen $H \subset S$

$$\begin{aligned} \text{cone}(H) \cap M &= \left\{ \sum_{h \in H} z_h \cdot h \mid z_h \in \mathbb{N}_0 \right\} \\ &= \{ p \in M \mid \exists s \in S \exists q \in M : p + q = s \} = S \end{aligned}$$

Dies beweist wegen $\text{cone}(H) = \sigma^\vee$ die Behauptung und damit das Lemma. \square

Für die allgemeine Übersetzung der Kategorie der torischen Varietäten benötigen wir noch eine entsprechende Kategorie in der Sprache der Kegel und Fächer.

Definition 1.3 Eine partielle Zerlegung rationaler Polyeder ist ein Paar (N, Δ) mit einem Gitter N und einem Fächer Δ von Kegeln $\sigma \in \Delta$ mit

- (1) Jede Seite eines Kegels aus Δ ist selbst ein Kegel von Δ .
- (2) Der Schnitt von je zwei Kegeln aus Δ ist eine Seite von beiden.

Wir nennen die Zerlegung endlich, wenn Δ nur endlich viele Kegel enthält.

Einen \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus $h : N \rightarrow N'$ mit endlichem Cokern, der den Fächer Δ in N in einen Fächer Δ' in N' überführt, nennen wir einen Morphismus zwischen partiellen Zerlegungen rationaler Polyeder, falls es für jeden Kegel $\sigma \in \Delta$ einen Kegel $\sigma' \in \Delta'$ so gibt, dass $h_{\mathbb{R}}(\sigma) \subseteq \sigma'$ gilt. Hierbei bezeichne $h_{\mathbb{R}}$ die Erweiterung von h auf den reellen Vektorraum $h_{\mathbb{R}} : N_{\mathbb{R}} \rightarrow N'_{\mathbb{R}}$. Diesen Morphismus bezeichnen wir dann ebenfalls mit

$$h : (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$$

Satz 1.4 Der Funktor zwischen der Kategorie der partiellen Zerlegungen rationaler Polyeder ($pZrP$) und der Kategorie der torischen Varietäten ($torVar$), der jeder Zerlegung (N, Δ) die torische Varietät $T_N \subset X(\Delta)$ zuordnet, ist eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Sei (N, Δ) eine partielle Zerlegung rationaler Polyeder und bezeichne M das zu N duale Gitter. Zu einem Kegel $\sigma \in \Delta$ ist die zugehörige affine torische Varietät $U_\sigma = \text{Spec } k[\sigma^\vee \cap M]$ von endlichem Typ.

Für $\sigma, \tau \in \Delta$ ist $\sigma \cap \tau$ eine Seite von beiden. In beiden Sichtweisen ist $U_{\sigma \cap \tau}$ stabil unter der Operation von T_N auf U_σ bzw. U_τ . Wir können die affinen torischen Varietäten entlang dieser Untervarietäten verkleben und erhalten ein irreduzibles Schema $X(\Delta)$, welches lokal von endlichem Typ ist.

Offensichtlich operiert T_N auf $X(\Delta)$. Weiter ist $T_N = U_0$ und $\{0\}$ ist eine Seite von allen Kegeln in Δ , daher ist $U_0 \subset X(\Delta)$ dicht bzgl. der Zariski-Topologie auf $X(\Delta)$.

Für $\sigma, \tau \in \Delta$ gilt $U_\sigma \cap U_\tau = U_{\sigma \cap \tau}$. Insbesondere ist $U_{\sigma \cap \tau}$ eine affin offene Teilmenge von beiden. Der zu $U_{\sigma \cap \tau}$ gehöriger Koordinatenring wird von den zu den Varietäten U_σ und U_τ gehörigen Ringen erzeugt. Denn sowohl U_σ , als auch U_τ , haben eine k -Basis aus Elementen der Form χ^m mit $m \in S_\sigma$ bzw. $m \in S_\tau$ und es gilt

$$(\sigma^\vee \cap M) + (\tau^\vee \cap M) = (\sigma \cap \tau)^\vee \cap M$$

Damit ist die torische Varietät $X(\Delta)$ separiert.

Ein Morphismus $h : (N, \Delta) \rightarrow (N', \Delta')$ von partiellen Zerlegungen rationaler Polyeder induziert einen äquivarianten Morphismus $f : X(\Delta) \rightarrow X(\Delta')$, das heißt f vertauscht mit der Gruppenoperation. In Formeln: $f(t.x) = f(t).f(x)$. Wegen den Voraussetzungen an h aus Definition 1.3 ist f dominant.

Andererseits induziert ein Morphismus $f : X(\Delta) \rightarrow X(\Delta')$ einen \mathbb{Z} -Modul-Homomorphismus $h : N \rightarrow N'$. Weiter wird die für jeden Kegel $\sigma \in \Delta$ eindeutige T_N -Bahn $\text{orb}(\sigma)$ von U_σ via f auf eine $T_{N'}$ -Bahn $f(\text{orb}(\sigma)) = \text{orb}(\sigma')$ für ein $\sigma' \in \Delta'$ abgebildet. Da orb eine Bijektion

$$\text{orb} : \{ \text{Seiten von } \sigma \} \xrightarrow{1:1} \{ T_N\text{-Bahnen in } U_\sigma \}$$

liefert, etwa nach Remark 5.5 in [O] Seite 20, und mit jedem Kegel σ auch alle Seiten von σ in Δ enthalten sind, gilt

$$f(U_\sigma) \subseteq U_{\sigma'}$$

Damit wird nach dem vorangegangenen Lemma 1.2 unter h der Fächer Δ in N in einen Fächer Δ' in N' überführt.

Sei nun X eine torische Varietät lokal von endlichem Typ über k und zugehörigem Torus T . Es gibt ein Gitter N mit $T = T_N$. Jede unter T stabile, affin offene Teilmenge von X ist von endlichem Typ über k und somit nach Lemma 1.2 von der Form U_σ für ein $\sigma \in \Delta$. Wir finden also eine Menge Δ von Kegeln in N , so dass

$$\{ U_\sigma \mid \sigma \in \Delta \}$$

die Familie der T -stabilen affin offenen Teilmengen von X ist. Nach Sumihiros Theorem² überdeckt diese Familie X . Wir wollen nun zeigen, dass das so gefundene Paar (N, Δ) eine partielle Zerlegung rationaler Polyeder ist.

- Ist $\sigma \in \Delta$ und τ eine Seite von σ , dann ist auch $\tau \in \Delta$, denn wir haben die Bijektion orb zwischen den Seiten von σ und den T -stabilen affin offenen Teilmengen von U_σ .
- Sind $\sigma, \tau \in \Delta$ zwei Kegel, dann ist der Schnitt der zugehörigen affinen torischen Varietäten eine T -stabile affin offene Teilmenge von beiden. Das heißt, es gibt ein $\rho \in \Delta$ mit $U_\rho = U_\sigma \cap U_\tau$.

Da X separiert ist, wird der Koordinatenring von U_ρ von den zu U_σ und U_τ gehörigen Koordinatenringen erzeugt.

Betrachte die T -semi-Invarianten³ in U_σ und U_τ . Wir erhalten $(\sigma^\vee \cap M) + (\tau^\vee \cap M) = \rho^\vee \cap M$. Damit gilt $\rho = \sigma \cap \tau$ und da U_ρ eine T -stabile offen affine Teilmenge von beiden ist, ist ρ auch eine Seite von beiden Kegeln. \square

Bemerkung 1.5 Eine torische Varietät X ist genau dann von endlichem Typ über k (und nicht nur lokal von endlichem Typ), wenn Δ nur endlich viele Kegel enthält. Denn U_σ hat nur endlich viele T -stabile affin offene Teilmengen.

²**Theorem** (Sumihiro) Sei T ein Torus und X eine normale algebraische Varietät lokal von endlichem Typ über k . Falls T algebraisch auf X operiert, so wird X von T -stabilen affin offenen Teilmengen überdeckt. [O] Abschnitt 2

³Semi-Invariant unter T sind die $x \in U$ mit $t.x = \lambda_t \cdot x$ für ein $\lambda_t \in k$.

2 Torische Varietäten zu Polyedern

Die meisten Sätze in diesem Abschnitt finden sich ausführlicher im Buch von D. A. Cox, J. B. Little und H. K. Schenck [CLS]. Zwar wird dort ausschließlich über den komplexen Zahlen gearbeitet, an dieser Stelle ergeben sich aber noch keine Unterschiede, wenn \mathbb{C} durch unseren algebraisch abgeschlossenen Körper k ersetzt wird. Wo notwendig verweise ich daher auf die entsprechenden Stellen des Buches.

Definition 2.1 Ein Polyeder $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ist der Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume

$$P := \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_i \rangle \geq -a_i ; i = 1, \dots, s \}$$

Ein Polytop $Q \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ist ein Polyeder, der die konvexe Hülle endlich vieler Punkte $m_1, \dots, m_r \in M_{\mathbb{R}}$ ist. Schreibe

$$Q = \text{Hull}(m_1, \dots, m_r)$$

Wir können einen Polytop Q auch als einen Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume betrachten und einen allgemeinen Polyeder P als die Minkowski-Summe $Q + C$ eines Polytopes Q mit einem polyedrischen Kegel C beschreiben. Ist etwa

$$P := \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_i \rangle \geq -a_i ; i = 1, \dots, s \}$$

so erhalten wir den Kegel C als den Polyeder

$$C = \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_i \rangle \geq 0 ; i = 1, \dots, s \}$$

Jedoch ist Q durch C offenbar nicht eindeutig bestimmt.

Wir nennen den Kegel C den Rezessionskegel von P . Ist P bereits ein Polytop so gilt $P = Q$ und der Rezessionskegel ist ein Punkt. Um den Polytop Q im Allgemeinen genauer zu bestimmen, benötigen wir noch einige Sprechweisen.

Definition 2.2 Sei ein Polyeder gegeben durch

$$P := \{ m \in M_{\mathbb{R}} \mid \langle m, u_i \rangle \geq -a_i ; i = 1, \dots, s \}$$

Eine Seite F von P ist der Ort, wo für einen Teil der definierenden schwachen Ungleichungen Gleichheit gilt. Wir schreiben dann $F \prec P$.

- Eine Seite F heißt eine Facette von P , wenn F die Kodimension 1 in P hat.
- Eine Seite F heißt Ecke, oder Vertex, falls sie ein Punkt ist.

Lemma 2.3 Sei $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ein Polyeder mit Rezessionskegel C . Dann ist die Menge V der Ecken von P genau dann endlich und nicht-leer, wenn C streng konvex ist.

In diesem Fall gilt $P = \text{Hull}(V) + C$

Zum Beweis dieses Lemmas siehe [CLS] Kapitel 7, Lemma 1.1. In dieser Arbeit betrachten wir nur eine bestimmte sehr einfache Sorte von Polyedern. Als erste Einschränkung definieren wir:

Definition 2.4 Ein Polyeder $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ heißt Gitter-Polyeder zum Gitter M , falls gelten

- (1) Der Rezessionskegel ist ein streng konvexer rationaler polyedraler Kegel
- (2) Die Ecken von P liegen auf dem Gitter M

Für einen Polyeder P setze den Kegel über P als

$$C(P) := \{ \lambda \cdot (u, 1) \in M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \mid u \in P \wedge \lambda \geq 0 \}$$

Ist P ein Polytop, dann ist P die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Gitterpunkten $S \subset M$ und es gilt $C(P) = \text{cone}(S \times \{1\})$. Wir setzen weiter

$$lP := C(P) \cap (M_{\mathbb{R}} \times \{l\}) \quad \text{für } l \in \mathbb{N}_0$$

als „Schnitt“ durch den Kegel über P in der Höhe l . Dann ist der Schnitt in Höhe 1 offenbar $1P \cong P$, wie erwartet.

Zerlegen wir P in die Minkowski-Summe $Q + C$, dann erhalten wir $lP = lQ + C$. Ist P selbst ein Kegel, so gilt offenbar $lP = P$ für alle l aus \mathbb{N} .

Wir bezeichnen die Dimension des kleinsten affinen Unterraums, der den Polyeder P enthält, als die Dimension von P und sagen P hat volle Dimension, wenn $\dim P = \dim M_{\mathbb{R}}$ gilt. Das nachfolgende Lemma liefert uns die Klasse von besonders einfachen Polyedern, die wir im Folgenden betrachten wollen:

Lemma 2.5 Sei P ein Gitter-Polyeder voller Dimension mit $P = Q + C$, so ist der Kegel $C(P)$ über P ein streng konvexer rationaler Kegel in $M_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R}$, und es gilt

$$0P = C$$

Zu einem Polyeder P , wie im Lemma, wollen wir nun einen Fächer Δ_P im Sinne des vorangegangenen Abschnittes konstruieren. Sei also P nun solch ein Gitter-Polyeder voller Dimension und $v \in P$ eine Ecke von P . Setze

$$C_v = \text{cone}((P \cap M) - v) \subseteq M_{\mathbb{R}}$$

Da P ein Gitter-Polyeder ist, ist $v \in M$ und da P volle Dimension besitzt, erhalten wir einen streng konvexen rationalen Kegel C_v voller Dimension. Selbiges gilt dann auch für sein Dual $\sigma_v = C_v^\vee$.

Für den Nachweis, dass diese Konstruktion tatsächlich einen Fächer im gewünschten Sinne liefert, betrachte in [CLS] das Theorem 1.5 in Kapitel 7:

Theorem 2.6 Sei $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ein Gitter-Polyeder voller Dimension, dann gilt: Die Kegel σ_v zu den Ecken $v \in P$ bilden einen Fächer Δ_P in $N_{\mathbb{R}}$ mit Träger $(0P)^\vee$. Diesen Fächer bezeichnen wir als den normalen Fächer von P .

Setze die torische Varietät zum Polyeder P als $X_P := X(\Delta_P)$. In Bezug auf die Eindeutigkeit dieser Zuordnung können wir gleich eine wichtige Beobachtung machen. Da es bei der Konstruktion des normalen Fächers nur auf die „Ausgangswinkel“ der Strahlen an den Ecken ankommt, und diese invariant sind unter Verschieben oder Skallieren, gilt:

Folgerung 2.7 Sei $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ein Gitter-Polyeder voller Dimension, dann gilt:

$$\Delta_P = \Delta_{lP} = \Delta_{P+m}$$

für jeden Gitterpunkt $m \in M$ und für jede Zahl $l \in \mathbb{N}$. □

Ziel dieser Arbeit ist es einen Algorithmus zu geben, der uns zu einer singulären torischen Varietät eine Auflösung der Singularität, also eine glatte torische Varietät liefert. Zum Schluss dieses Abschnittes wollen wir daher noch angeben, was es für eine torische Varietät heißt glatt zu sein:

Definition 2.8 Wir nennen

- einen Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$ glatt, wenn er von einem Teil einer Basis von N erzeugt wird.
- einen Fächer Δ in N glatt, wenn alle Kegel $\sigma \in \Delta$ glatt sind.
- einen Gitter-Polyeder voller Dimension glatt, wenn der zugehörige normale Fächer glatt ist.

Mit der folgenden Proposition aus [F] Seite 29 erhalten wir einen Zusammenhang von glatten Kegeln und glatten Varietäten.

Proposition 2.9 Eine affine torische Varietät U_{σ} ist genau dann glatt, wenn σ glatt ist. In diesem Fall gilt weiter

$$U_{\sigma} \cong \mathbb{A}_k^l \times \mathbb{G}_m^{n-l}$$

mit $l = \dim \sigma$.

Ist die projektive torische Varietät $X(\Delta)$ glatt, so sind auch alle affinen Stücke glatt und mit der Proposition ist somit auch der Fächer Δ glatt und umgekehrt.

Offensichtlich ist ein Kegel voller Dimension genau dann glatt, wenn er von einer kompletten Basis von N erzeugt wird. Damit ist die zugehörige affine Varietät isomorph zu \mathbb{A}_k^n .

3 Normale Polyeder

In diesem Abschnitt wollen wir die kombinatorischen Objekte und ihre zugehörigen Varietäten noch etwas genauer verstehen. Bezeichnen wieder N , M unsere Gitter der Dimension n .

Im vorherigen Abschnitt haben wir den Kegel $C(P)$ über P im erweiterten Gitter $M' := M \times \mathbb{Z}$ definiert. Wir können diesem Kegel natürlich auch eine torische Varietät, nämlich die affine torische Varietät $Y_P = \text{Spec } k[C(P) \cap M']$, zuordnen. Die Leitfrage für diesen Abschnitt ist: Wie hängen die torischen Varietäten Y_P und X_P zusammen?

Definition 3.1 Sei S eine Halbgruppe, dann nennen wir die Menge der nicht-linearkombinierbaren nicht-null Elemente von S die Hilbertbasis von S .

Folgerung 3.2 Die Hilbertbasis einer Halbgruppe S ist das eindeutig bestimmte, minimale Erzeugendensystem von S .

Wir wollen Polyeder normal nennen, wenn diese „genügend viele Punkte“ haben, um die Halbgruppe $C(P) \cap M'$ zu erzeugen. Wir beginnen mit einer Definition für Polytope

Definition 3.3 Ein Gitter-Polytop $Q \subset M_{\mathbb{R}}$ heißt normal, falls

$$\underbrace{Q \cap M + \dots + Q \cap M}_{l \text{ mal}} = (lQ) \cap M$$

für alle $l \in \mathbb{N}$.

Die Inklusion „ \subseteq “ ist offensichtlich immer gegeben, und die andere Inklusion bedeutet gerade, dass Q genügend Punkte hat, alle ganzzahligen Vielfachen von Q zu erzeugen.

Definition 3.4 Ein Gitter-Polyeder $P \subset M_{\mathbb{R}}$ heißt normal, falls er die Minkowski-Summe eines normalen Polytops Q und einem Kegel C ist.

Da der Polytop Q durch C nicht eindeutig bestimmt ist, ist ein Gitter-Polyeder also genau dann normal, wenn es einen normalen Polytop Q so gibt, dass wir P als Minkowskisumme $Q + C$ darstellen können. Damit können wir sofort ein leicht überprüfbares Kriterium für Normalität angeben. Das folgende Lemma sagt uns, dass ein Polyeder genau dann normal ist, wenn die Elemente der Hilbert-Basis maximal die „Höhe 1“ haben, also in $0P$ und $1P$, nicht aber in lP für $l > 1$ liegen.

Lemma 3.5 Ein Gitter-Polyeder $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ist genau dann normal, wenn es einen Polytop Q mit $P = Q + C$ so gibt, dass die Punkte aus

$$((Q \cap M) \times \{1\}) \cup ((C \cap M) \times \{0\})$$

die Halbgruppe $C(P) \cap M'$ erzeugen.

Beweis. Es genügt, dieses Lemma für Polytope zu beweisen. Setzen wir zunächst voraus, dass unser Polytop normal ist. In diesem Fall kann jeder Gitterpunkt in jedem ganzzahligen Vielfachen von Q von einem Gitterpunkt in Q erzeugt werden, also ist die Hilbert-Basis von $C(Q)$ komplett in Q enthalten, und somit erzeugt $(Q \cap M) \times \{1\}$ die Halbgruppe $C(Q) \cap M'$.

Die Gegenrichtung ist ebenfalls sofort zu sehen, denn dass die Punkte aus $(Q \cap M) \times \{1\}$ die Halbgruppe erzeugen, besagt nun gerade, dass

$$lQ \cap M \subseteq (Q \cap M) + \dots + (Q \cap M)$$

wonach Q normal ist. □

Offensichtlich gibt es für jeden Gitter-Polyeder P voller Dimension mit $\dim P \geq 2$ ein maximales $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass alle Elemente der Hilbert-Basis von $C(P) \cap M'$ in $0P, \dots, l_0P$ liegen. Wir nennen l_0 dann die maximale Höhe der Hilbert-Basis. Wegen

$$((lP) \cap M) + (P \cap M) = ((l+1)P) \cap M$$

ist l_0P immer ein normaler Polyeder. Dies ist der zenterale Punkt im Beweis von Theorem 2.11 im zweiten Kapitel bei [CLS], welches uns auch gleich eine Obergrenze für dieses l_0 liefert:

Satz 3.6 *Sei $P \subset M_{\mathbb{R}}$ ein Gitter-Polyeder voller Dimension mit $\dim P = n \geq 2$, dann ist lP für alle $l \in \mathbb{N}$ mit $l \geq n - 1$ normal.*

Wegen Folgerung 2.7 können wir ohne Verlust immer $P' = l_0P$ betrachten und im Folgenden nur noch über normale Polyeder sprechen. Insbesondere für gut zeichenbare Beispiele in Dimension zwei hat dieser Satz die schöne Folgerung, dass alle volldimensionalen Gitter-Polyeder normal sind.

Wir wollen nun im Fall normaler Polyeder P wieder zum Kegel über P und der affinen torischen Varietät $Y_P = \text{Spec } k[C(P) \cap M']$ zurück kehren. Zu jeder affinen Varietät gibt es eine abgeschlossene Immersion, etwa $\iota : Y_P \hookrightarrow \mathbb{A}_k^s$. Wir werden zunächst das zugehörige Ideal konstruieren. Bezeichne die Hilbert-Basis von $C(P) \cap M'$ mit H . Nach Gordans Lemma ist diese endlich, wir können die Elemente von H daher nummerieren. Sei also $H = \{h_1, \dots, h_s\}$, dann erhalten wir eine exakte Sequenz:

$$0 \rightarrow L \rightarrow \mathbb{Z}^s \xrightarrow{e_i \mapsto h_i} M'$$

Aus der Exaktheit bei L und \mathbb{Z}^s erhalten wir ein Ideal im Polynomring $k[X_1, \dots, X_s]$ wie folgt:

$$I_L := (\underline{X}^\alpha - \underline{X}^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ und } \alpha - \beta \in L) \triangleleft k[\underline{X}]$$

Dies ist das zur abgeschlossenen Immersion $Y_P \hookrightarrow \mathbb{A}_k^s$ gehörige Ideal, siehe Proposition 1.9 in Kapitel 1 von [CLS]. Eine solche Einbettung können wir auf gleichem Wege zu jeder Menge $S \subset C \cap M'$ mit $H \subseteq S$ konstruieren.

Lemma 3.7 *Sei Q ein normaler Gitter-Polytop voller Dimension. Bezeichne die Hilbert-Basis von $C(Q) \cap M'$ mit $H = \{h_1, \dots, h_s\}$. Sei weiter L der Kern der Abbildung $\mathbb{Z}^s \ni e_i \mapsto h_i \in M'$, dann gilt: Das Ideal*

$$I_L := (\underline{X}^\alpha - \underline{X}^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^s \text{ und } \alpha - \beta \in L) \triangleleft k[C(Q) \cap M']$$

ist homogen.

Beweis. Es genügt die Erzeuger von I_L auf Homogenität zu überprüfen, diese sind genau dann homogen, wenn

$$\sum \alpha_i = \sum \beta_i$$

gilt. Es gilt

$$\alpha - \beta \in L \Leftrightarrow \sum (\alpha_i - \beta_i) h_i = 0 \stackrel{(*)}{\Leftrightarrow} \sum \alpha_i - \beta_i = 0 \Leftrightarrow \sum \alpha_i = \sum \beta_i$$

Bis auf (*) sind alle Umformungen trivial und (*) gilt weil Q ein normaler Polytop ist, denn in diesem Fall haben alle Elemente der Hilbert-Basis Höhe 1, sind also von der Form $h_i = \begin{pmatrix} h'_i \\ 1 \end{pmatrix}$. \square

Wir wollen nun normalen Polyedern eine torische Varietät zusammen mit einer Einbettung in einen projektiven Raum zuordnen. Die Einbettung und den Raum werden wir anhand von bestimmten Punkten im Polyeder konstruieren. Da es zu jeder torischen Varietät mehr als einen projektiven Raum gibt, in den sich diese einbetten lässt, ist es sinnvoll nicht auf die Hilbert-Basis eines Polyeders festgelegt zu sein. Das folgende Lemma liefert eine griffigere Charakterisierung normaler Polyeder:

Lemma 3.8 *Sei P ein Gitter-Polyeder voller Dimension, dann ist P genau dann normal, wenn es eine endliche Teilmenge $S \subset P \cap M$ so gibt, dass $S \times \{1\}$ zusammen mit $(0P \cap M) \times \{0\}$ die Halbgruppe $C(P) \cap M'$ erzeugt.*

Beweis. Ist P normal, dann erfüllen die endlich vielen Elemente der Hilbert-Basis von P mit Höhe 1 die Bedingung. Ist andererseits S eine Menge wie gefordert, dann folgt die Normalität von P aus Lemma 3.5. \square

Diese endliche Menge S muss alle nicht erzeugbaren, das heißt alle nicht linear-kombinierbaren, Elemente der Halbgruppe $C(P) \cap M'$ enthalten, insbesondere also die Ecken des Polyeders P . Damit können wir zu jeder gegebenen Menge S eine Einbettung von X_P in einen projektiven Raum konstruieren.

Satz 3.9 *Sei P ein normaler Gitter-Polyeder voller Dimension und sei $S \subset P \cap M$ eine Menge wie im vorangegangenen Lemma mit $l = \sharp S$. Dann gibt es eine kanonische abgeschlossene Einbettung*

$$\begin{aligned} X_P &\hookrightarrow \mathbb{P}_U^{l-1} \\ x &\mapsto (\chi^s(x) \mid s \in S) \end{aligned}$$

wobei U die affine torische Varietät zu $(0P)^\vee$ bezeichne.

Beweis. Bezeichne die homogenen Koordinaten auf \mathbb{P}_U^{l-1} mit X_s für $s \in S$. Nach Konstruktion ist

$$X_P = \bigcup_{v \in V} U_v$$

wobei $V \subseteq S$ die Menge der Ecken von P und U_v die affine torische Varietät zum Kegel C_v^\vee bezeichnen. Da P normal ist, ist $k[(P \cap M) - v] = k[C_v \cap M]$. Bezeichne $R = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$ den zur affinen torischen Varietät U gehörigen Ring, dann ist der kanonische Ring-Homomorphismus

$$\begin{aligned} R \left[\frac{X_s}{X_v} \mid s \in S \setminus \{v\} \right] &\twoheadrightarrow R[C_v \cap M] \\ \frac{X_s}{X_v} &\mapsto \chi^{s-v} \end{aligned}$$

eine Surjektion und liefert eine Einbettung von U_v in die Standardkarte $D_+(X_v)$ von \mathbb{P}_U^{l-1} . Seien $u, v \in S$ zwei verschiedene Ecken von Q , dann verkleben die zugehörigen Varietäten U_v, U_u entlang

der Identität auf den affinen torischen Varietäten zu gemeinsamen Seiten. Wir erhalten ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 R\left[\frac{X_s}{X_v} \mid s \in S \setminus \{v\}\right] & \longrightarrow & R[C_v \cap M] \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 R\left[\frac{X_s}{X_v} \mid s \in S \setminus \{v\}\right]_{X_u} & \longrightarrow & R[C_v \cap M] \cap R[C_u \cap M]
 \end{array}$$

Damit können wir die auf den affinen Karten kanonisch gegebenen Einbettungen zur gesuchten Einbettung verkleben. Da die lokalen Einbettungen auf \mathbb{P}_U^{l-1} abgeschlossen sind, ist auch die verklebte Einbettung abgeschlossen. \square

Den Zusammenhang der torischen Varietäten Y_P und X_P erhalten wir mit dieser Einbettung aus der Proposition 1.4 in Kapitel 2 bei [CLS]:

Lemma 3.10 *Seien Y_P, X_P, U, S sowie I_L wie oben, dann sind äquivalent*

(1) *Wir haben ein karthisches Quadrat*

$$\begin{array}{ccc}
 Y_P \setminus \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{A}_U^s \setminus \{0\} \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 X_P & \hookrightarrow & \mathbb{P}_U^{s-1}
 \end{array}$$

(2) $I_L = I(X_P)$

(3) I_L ist ein homogenes Ideal

(4) Es gibt ein $u \in N$ und ein $l \in \mathbb{N}$ mit $\langle u, h \rangle = l$ für alle $h \in H$

Der Situation von Lemma 3.10 (1) wollen wir einen Namen geben. Wir konkretisieren dies zur

Definition 3.11 (1) *Sei $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ eine Varietät. Eine Varietät $Y \subseteq \mathbb{A}^{n+1}$ heißt der affine Kegel zu X bezüglich ι , falls es ein karthisches Quadrat gibt, wie folgt:*

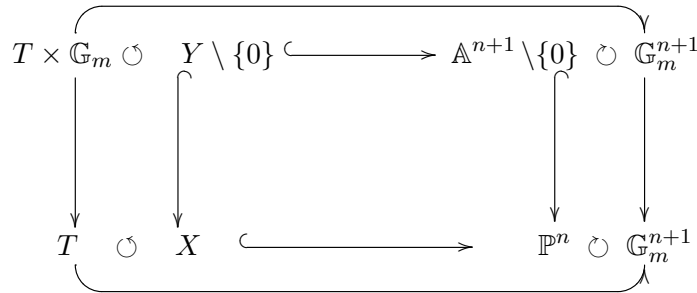
$$\begin{array}{ccc}
 Y \setminus \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{A}^{n+1} \setminus \{0\} \\
 \downarrow & \square & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}^n
 \end{array}$$

(2) *Ist X zusätzlich eine torische Varietät zum Torus T und haben wir ein kommutatives Diagramm*

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xhookrightarrow{\iota} & \mathbb{P}^n \\
 \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\
 T & \rightarrow & \mathbb{G}_m^{n+1}
 \end{array}$$

dann fordern wir zusätzlich, dass auch Y eine torische Varietät ist und das komplette karthische Quadrat mit den Abbildungen zwischen den Tori verträglich ist, also dass das folgende Diagramm

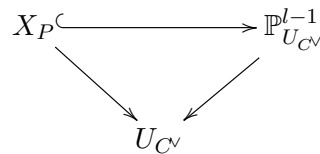
überall kommutiert.



Definition und Folgerung 3.12 Sei X eine Varietät. Eine Einbettung $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n$ heißt projektiv normal, falls der affine Kegel von X bezüglich ι normal ist.

Ist X eine torische Varietät und besitzt einen affinen Kegel nach Definition 3.11 (2) bezüglich der Einbettung ι , dann ist ι projektiv normal. \square

Wir betrachten nun wieder einen normalen Gitter-Polyeder P voller Dimension mit Rezeptionskegel C . Sei weiter $S \subset P \cap M$ eine endliche Menge, welche die Bedingungen von Lemma 3.8 erfüllt. Bezeichne mit l die Anzahl der Elemente von S mit Höhe 1, so ist X_P projektiv über der affinen Varietät U_{C^v} mit



Bezeichne $\Gamma(U, \mathcal{O}_U) = k[Y_1, \dots, Y_r]$, dann erhalten wir durch die Zuordnungen

$$\begin{aligned}
 k[Y_1, \dots, Y_r][X_1, \dots, X_l] &\twoheadrightarrow k[C(P) \cap M'] \\
 Y_j &\mapsto \chi^{s(j)} && \text{mit } s(j) \in S \text{ hat Höhe } 0 \\
 X_j &\mapsto \chi^{s(j)} && \text{mit } s(j) \in S \text{ hat Höhe } 1
 \end{aligned}$$

eine kanonische Einbettung

$$Y_P = \text{Spec } k[C(P) \cap M'] \hookrightarrow \mathbb{A}_{U_{C^v}}^l$$

und damit das Hauptergebnis dieses Abschnittes:

Folgerung 3.13 Sei (P, S) ein normaler Gitter-Polyeder voller Dimension, dann ist Y_P der affine Kegel von X_P bezüglich der durch S gegebenen Einbettung in einen projektiven Raum. \square

4 Korrespondenz der Ecken von P zu Fixpunkten von T auf X_P .

Auch in diesem Abschnitt finden sich die meisten Aussagen ausführlicher bei [CLS]. Hier ergeben sich aber an einigen Stellen bereits Unterschiede, ob nur über den komplexen Zahlen oder, wie in unserem Fall, einem beliebigen algebraisch abgeschlossenen Körper k gearbeitet wird. Wo möglich wird weiterhin auf die entsprechenden Stellen des Buches verwiesen.

In diesem Abschnitt bezeichne P stets einen normalen Gitter-Polyeder voller Dimension im Dualraum $M_{\mathbb{R}}$. Wir fassen zunächst einige Ergebnisse aus [CLS] zusammen, die wir im Folgenden voraussetzen und benutzen wollen:

- Sei $\sigma \in \Delta_P$. Wir bezeichnen den Gordan-Monoid zu σ mit $S_\sigma = \sigma^\vee \cap M$. Dann ist die zugehörige Varietät $U_\sigma = \text{Spec } k[S_\sigma]$ und die Punkte von U_σ stehen in eineindeutiger Korrespondenz zu Halbgruppenhomomorphismen $\gamma : S_\sigma \rightarrow k$:
 - Sei $p \in U_\sigma$ gegeben, dann erhalte γ aus der Evaluations-Abbildung $m \mapsto \chi^{m_1}(p) \cdots \chi^{m_n}(p)$ für $m = (m_1, \dots, m_n) \in S_\sigma$ bei p .
 - Sei γ gegeben, dann ist der Kern von γ ein Maximalideal in $k[S_\sigma]$.
- Zu jedem Kegel $\sigma \in \Delta_P$ gibt es einen eindeutig bestimmten Punkt γ_σ in U_σ , der durch den Halbgruppenmorphimus⁴

$$S_\sigma \ni m \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } m \in S_\sigma \cap \sigma^\perp = \sigma^\perp \cap M \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

bestimmt ist. Wir nennen γ_σ den ausgezeichneten Punkt zum Kegel σ .

- Der ausgezeichnete Punkt γ_σ ist genau dann ein Fixpunkt unter der Torus-Operation, wenn σ von voller Dimension ist.
- Sind $\tau, \sigma \in \Delta_P$ und ist $\tau \prec \sigma$ eine Seite, dann ist γ_τ ein Punkt in U_σ , denn σ^\perp ist eine Seite von τ^\perp .

Mit den Ergebnissen des vorangegangenen Abschnitts korrespondieren die Fixpunkte von X_P genau zu den volldimensionalen Kegeln σ_v , die von den Ecken $v \in P$ erzeugt werden. Wir wollen im Folgenden eine Methode entwickeln aus der torischen Varietät X_P die Ecken von P zu rekonstruieren. Dazu betrachten wir Ein-Parameter-Untergruppen des zu X_P gehörigen Torus von der Form

$$\lambda^u(t) := (t^{\langle u, m_1 \rangle}, \dots, t^{\langle u, m_n \rangle})$$

mit $u \in N$ und einer Basis $\{m_1, \dots, m_n\}$ von M . Über den komplexen Zahlen können wir den ausgezeichneten Punkt eines Kegel σ in der zugehörigen affinen torischen Varietät U_σ als den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$$

berechnen, vergleiche [CLS] Kapitel 3, Abschnitt 2. Wir wollen nun ein algebraisches Analogon zu diesem Grenzprozess für allgemeine algebraisch abgeschlossene Körper k geben.

⁴Weil $\sigma^\vee \cap \sigma^\perp$ eine Seite von σ^\vee ist, gilt für $m, m' \in S_\sigma$ mit $m + m' \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$, dass bereits $m, m' \in S_\sigma \cap \sigma^\perp$ gilt. Damit ist dies tatsächlich ein Halbgruppenhomomorphismus.

Fixiere eine Basis $\{m_1, \dots, m_n\}$ von M . Zu jedem $u \in N \cong \mathbb{Z}^n$ erhalte eine Abbildung

$$\begin{aligned} \lambda^u : \mathbb{G}_m &\rightarrow T \\ t &\mapsto (t^{\langle u, m_1 \rangle}, \dots, t^{\langle u, m_n \rangle}) \end{aligned}$$

Sei $\sigma \in \Delta_P$, dann liefert diese für alle $x \in U_\sigma$ eine Abbildung $\lambda_x^u(t) := \lambda^u(t) \cdot x$ von der allgemeinen multiplikativen Gruppe in die torische Varietät. Schreibe weiter $\mathbb{G}_m = \text{Spec } k[t, t^{-1}]$. Es gibt eine natürliche Abbildung $k[t^{\pm 1}] \hookrightarrow k((t))$ und $k((t))$ ist der Quotientenkörper des diskreten Bewertungsrings $k[[t]]$. Damit erhalten wir eine Abbildung

$$\widetilde{\lambda}_x^u : \text{Spec } k((t)) \rightarrow \text{Spec } k[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\lambda_x^u} U_\sigma \hookrightarrow \bigcup_{\rho \in \Delta_P} U_\rho = X_P$$

Da insbesondere der Torus selbst in U_σ enthalten ist, betrachte die Abbildung $\lambda^u(t) := \lambda_{\mathbf{1}}^u(t)$ wobei $\mathbf{1}$ das neutrale Element der Torus-Operation bezeichne. Wir erhalten das folgende kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k((t)) & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}^u} & X_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k[[t]] & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

Definition 4.1 *Wir sagen: Der Grenzwert*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$$

existiert in U_σ , wenn es einen Morphismus $\mu^u : \text{Spec } k[[t]] \rightarrow U_\sigma$ so gibt, dass

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k((t)) & \xrightarrow{\widetilde{\lambda}^u} & U_\sigma \\ \downarrow & \nearrow \mu^u & \downarrow \\ \text{Spec } k[[t]] & \longrightarrow & \text{Spec } k \end{array}$$

überall kommutiert. Bezeichne $s \in \text{Spec } k[[t]]$ den abgeschlossenen Punkt, dann setzen wir in obigem Fall

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) := \mu^u(s)$$

Für die Frage, wann der so eingeführte Grenzwert in U_σ existiert, ist es sinnvoll die assoziierten Abbildungen zu betrachten. Schreibe $\underline{X}^{\pm 1} = X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}$ und erhalte zu $T \rightarrow U_\sigma$ die Einbettung $k[S_\sigma] \hookrightarrow k[\underline{X}^{\pm 1}]$. Diesen Morphismus von k -Algebren können wir fortsetzen zur assoziierten Abbildung von $\widetilde{\lambda}^u$

$$\varphi^u : k[S_\sigma] \rightarrow k[\underline{X}^{\pm 1}] \xrightarrow{X_i \mapsto t^{u_i}} k[t^{\pm 1}] \rightarrow k((t))$$

Damit übersetzt sich die Frage, ob der oben definierte Grenzwert in U_σ existiert zu der Frage, ob das Bild von φ^u in $k[[t]]$ liegt, ob also die vorkommenden Exponenten von t negativ sind oder nicht.

Lemma 4.2 *Der Grenzwert*

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t)$$

existiert genau dann in U_σ , wenn $u \in \sigma \cap \mathbb{Z}^n$. In diesem Fall gilt genauer:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^u(t) = \gamma_\sigma \quad \Leftrightarrow \quad u \in \{v \in \sigma \mid \langle v, m \rangle > 0 \quad \forall m \in S_\sigma \setminus \sigma^\perp\}$$

Beweis. Nach der obigen Überlegung genügt es, die auftretenden Exponenten von t zu betrachten. Betrachte dazu ein Monom $X_1^{l_1} \cdots X_n^{l_n} \in k[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]$ für ein $l \in \mathbb{Z}^n$. Unter der Zuordnung $X_i \mapsto t^{\langle u, m_i \rangle}$ erhalte den Exponenten

$$\sum_{i=1}^n \langle u, m_i \rangle \cdot l_i = \langle u, l \rangle$$

Da nur Monome mit $l \in S_\sigma$ vorkommen können, existiert der Grenzwert in U_σ genau dann, wenn $\langle u, l \rangle \geq 0$ für alle $l \in S_\sigma$. Das heißt aber nichts anderes, als $u \in (\sigma^\vee)^\vee = \sigma$.

In der Definition haben wir das Bild des abgeschlossenen Punktes unter der Abbildung μ^u als den Grenzwert gesetzt. Das Bild von

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } k & \hookrightarrow & \text{Spec } k[[t]] & \rightarrow & U_\sigma \\ & & 0 & \leftarrow & t \end{array}$$

korrespondiert genau zu

$$S_\sigma \ni l \mapsto t^{\langle u, l \rangle} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \langle u, l \rangle \neq 0 \\ 1 & \text{falls } \langle u, l \rangle = 0 \end{cases}$$

Damit der Grenzwert existiert müssen alle auftretenden Paarungen $\langle u, l \rangle$ größer gleich Null sein. Die verschärfte Bedingung an u ist nun gerade äquivalent dazu, dass genau dann $\langle u, l \rangle = 0$ gilt, wenn $l \in \sigma^\perp$ ist. \square

Errechnen der Ecken Zur Vereinfachung der Diagramme und Indizes betrachte nun einen normalen Gitter-Polytop Q voller Dimension.

Sei $\hat{x} \in X_Q$ ein Fixpunkt unter T und bezeichne $S = \{h_1, \dots, h_l\}$ eine endliche Teilmenge von $Q \cap M$ wie in Lemma 3.8. Mit S erhalten wir eine nach Satz 3.9 eine Einbettung $\iota : X_Q \hookrightarrow \mathbb{P}_k^{l-1}$.

Der Torus T operiert auch auf der Faser von \hat{x} unter $\pi : Y_Q \setminus \{0\} \rightarrow X_Q$. Da Y_Q der affine Kegel von X_Q ist, ist $\overline{\pi^{-1}(\hat{x})} \cong \mathbb{A}_k^1$. Damit erhalte eine Abbildung

$$T \rightarrow \text{GL}_1(k)$$

Mit der fixierten Basis von M erhalte eine Identifikation $T \cong \mathbb{G}_m^n$. Identifiziere auch $\text{GL}_1(k) \cong \mathbb{G}_m$, dann können wir den obigen Charakter beschreiben als

$$\begin{array}{ccc} \chi_Q : & \mathbb{G}_m^n & \rightarrow & \mathbb{G}_m \\ & (t_1, \dots, t_n) & \mapsto & t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n} \end{array}$$

mit $r_i \in \mathbb{Z}$. Der Fixpunkt \hat{x} gehört zu genau einer affinen Karte, also zu einer torischen Varietät U_σ mit einem Kegel σ von voller Dimension aus dem normalen Fächer von Q . Nach der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 3.9 existiert ein $i \in \{1, \dots, l\}$ mit $\sigma = \sigma_i$ und so dass gilt

$$\{(x_1 : \dots : x_{i-1} : 1 : x_{i+1} : \dots : x_l) \in \iota(X_Q)\} \cong U_{\sigma_i}$$

Mit unseren bisherigen Bemühungen erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{G}_m^{n+1} \circlearrowleft Y_Q \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & X_Q \circlearrowleft \mathbb{G}_m^n \\
 \downarrow \alpha & & \downarrow \iota \\
 \mathbb{G}_m^l \circlearrowleft \mathbb{A}_k^l \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}_k^{l-1} \circlearrowleft \mathbb{G}_m^l / \mathbb{G}_m
 \end{array}$$

Wegen der Kommutativität muss (t_1, \dots, t_n) unter α genau auf $(\dots, t_1^{r_1} \cdots t_n^{r_n}, \dots)$ an der entsprechenden Stelle i abgebildet werden. Der Vektor der Gewichte der Torusoperation $(r_i)_i \in \mathbb{Z}^n$ überträgt sich unter dem Isomorphismus $\mathbb{Z}^n \cong M$ zu einem Gitterpunkt $s \in M$.

Definition und Satz 4.3 *In der Situation von oben ist s eine Ecke von Q . Wir nennen s die zum Fixpunkt $\hat{x} \in X_Q$ gehörige Ecke von Q .*

Beweis. Der Fixpunkt \hat{x} ist der ausgezeichnete Punkt zum Kegel σ_i , den wir als dualen Kegel zu $\text{cone}(Q \cap M - v_i)$ zur Ecke v_i von Q erhalten haben. Im affinen Fall korrespondiert genau der Ursprung zum Fixpunkt unter der Torus-Operation. Dies ist v_i nach Konstruktion. \square

Zum Abschluss spielen wir die bisherigen Ergebnisse in einem Beispiel durch. Nach Satz 3.6 sind alle Polyeder voller Dimension in Dimension 2 normal, wir können also die gewünschten Konstruktionen anwenden und unsere Ergebnisse benutzen.

Beispiel 1 Sei $M = \mathbb{Z}^2$. Betrachte den Polyeder, der von den Geraden $x = 0; y = 0$ und $y = x - 1$ begrenzt wird. In diesem Fall ist der Rezessionskegel $0P$ nicht nur ein Punkt, sondern tatsächlich ein Kegel, der von den Punkten $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ in der Ebene aufgespannt wird.

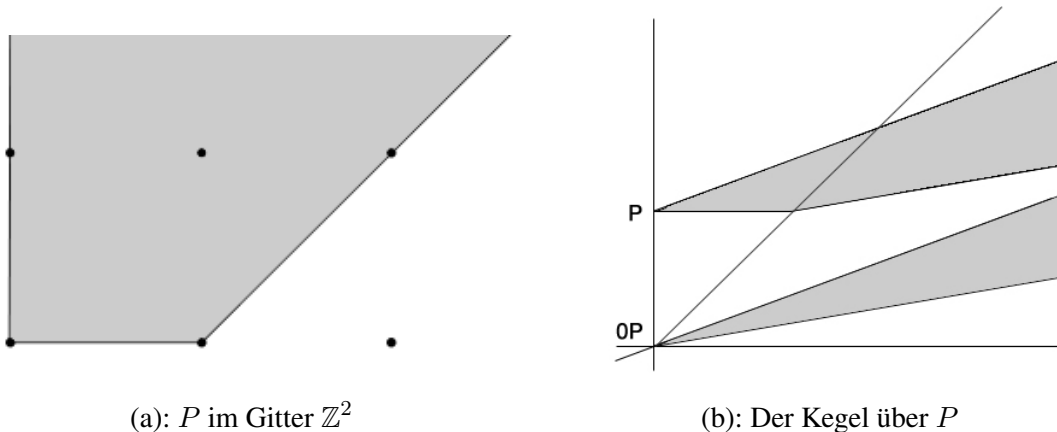


Abbildung I.1: Der Polyeder P

Beim Übergang zum erweiterten Gitter $M' = M \times \mathbb{Z}$ fügen wir die Höhe als Z -Koordinate unten an

und erhalten den Kegel über P als

$$\begin{aligned} C(P) &= \text{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} + 0P \\ &= \text{cone}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Die Hilbert-Basis H des Gordan-Monoid besteht genau aus den nicht linear-kombinierbaren, nicht-null Elementen der Halbgruppe $C(P) \cap \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}$, dies sind - da P normal ist - genau die nicht linear-kombinierbaren Gitterpunkte in P und $0P$. Damit erhalten wir die Hilbert-Basis

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Die affine torische Varietät Y_P erhalten wir damit als $\text{Spec } k[Y, XY][Z, XZ, XY^2Z]$. Diese können wir offensichtlich in \mathbb{A}^5 einbetten. Setze $S = \mathbb{A}^2$, dann erhalten wir eine mit der Torus-Operation kompatible Einbettung von Y_P nach $\mathbb{A}^5 = \mathbb{A}^3 \times \mathbb{A}^2 = \mathbb{A}_S^3$ aus der rationalen Abbildung

$$\mathbb{G}_m^3 \ni (t_X, t_Y, t_Z) \xrightarrow{\alpha} (t_Z, t_X t_Z, t_X t_Y^2 t_Z) \times (t_Y, t_X t_Y) \in \mathbb{G}_m^3 \times \mathbb{G}_m^2$$

Mit kleinem Missbrauch der Notation schreibe

$$\mathbb{A}_S^3 \setminus \{0\} := \bigcup_{i=1}^3 D(T_i)$$

dann erhalten wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{pr_{2,3}} & \\ \mathbb{G}_m^3 \circlearrowleft Y_P \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & X_P \circlearrowleft \mathbb{G}_m^2 \\ \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathbb{G}_m^5 \circlearrowleft \mathbb{A}_S^3 \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}_S^2 \circlearrowleft \mathbb{G}_m^3 / \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m^2 \end{array}$$

Wir erhalten die Abbildung β auf den Tori durch die Zuordnung

$$(t_X : t_Y) \mapsto ((t_X : t_X t_Y^2 : 1), (t_Y, t_X t_Y))$$

Wir erhalten die Ein-Parameter-Untergruppe

$$\lambda^u(t) = ((t^a : t^{a+2b} : 1), (t^b, t^{a+b})) \quad \text{für } u = (a, b) \in \mathbb{Z}^2$$

Die Fixpunkte unter der Operation von $T = \mathbb{G}_m^3 / \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_m^2$ auf $\mathbb{P}^2 \times S$ sind von der Form, dass genau eine homogene Koordinate ungleich Null ist und der affine Anteil Null. Um zu prüfen, in welchem Fall ein Fixpunkt vorliegt, können wir nach Lemma 4.2 die Konvergenz der Ein-Parameter-Untergruppe für $t \rightarrow 0$ betrachten:

- Falls $a, b > 0$ gilt

$$\lambda^u(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} ((0 : 0 : 1), (0, 0))$$

Unter α muss (t_x, t_y, t_z) auf die erste Komponente, also auf $t_x^0 \cdot t_y^0 (\cdot t_z^1)$ abgebildet werden. Damit korrespondiert dieser Fixpunkt zur Ecke von P bei $(\frac{0}{0})$.

- Falls $a < 0, b > 0$ gilt

$$\lambda^u(t) = ((1 : t^{2b} : t^{-a}), (t^b, t^{a+b})) \xrightarrow{t \rightarrow 0} ((1 : 0 : 0), (0, 0))$$

falls $a + b > 0$. Unter α muss (t_x, t_y, t_z) auf die zweite Komponente, also auf $t_x^1 \cdot t_y^0 (\cdot t_z^0)$ abgebildet werden. Damit korrespondiert dieser Fixpunkt zur Ecke von P bei $(\frac{1}{0})$.

- Falls $a, b < 0$ oder $a > 0, b < 0$ konvergiert

$$\lambda^u(t) = ((t^{-2b} : 1 : t^{-a-2b}), (t^b, t^{a+b}))$$

für $t \rightarrow 0$ nicht.

5 Klassifizierung von torischen Varietäten zu Polyedern

Wir wollen nun affine und projektive Räume über affinen Schemata S betrachten. Zur besseren Lesbarkeit ist die folgende Kurzschreibweise sinnvoll

$$\mathbb{A}_S^n \setminus \{0\} := \bigcup_{i=1}^n D(T_i)$$

wobei T_i die Koordinaten auf \mathbb{A}_S^n seien.

Auch in diesem Abschnitt bezeichne $M' = M \times \mathbb{Z}$ wieder das erweiterte Gitter.

Definition 5.1 Ein Tupel (X, U, ι, φ) mit

- X ist eine torische Varietät zum Torus T und Gitter M
- U ist eine affine torische Varietät zum Torus T_U und Gitter M_U
- $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}_U^{l-1}$ ist eine projektiv normale Einbettung
- $\varphi : T \rightarrow \mathbb{G}_m^l \times T_U$ ist ein Morphismus von Tori, so dass T via

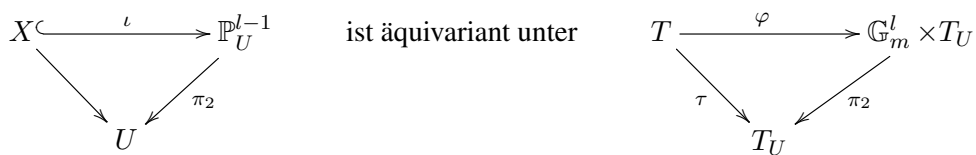
$$\tau : T \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}_m^{l-1} \times T_U \xrightarrow{\pi_2} T_U$$

auf U operiert

heißt ein Rekonstruktionsdatum, falls gelten

(i) Der Kegel $C_U \subset (M_U)_{\mathbb{R}}$, der U erzeugt, ist streng konvex.

(ii) Das kommutative Diagramm



(iii) Der durch den Gruppenhomomorphismus τ gegebene Morphismus $M_U \rightarrow M$ zwischen den Gittern ist injektiv und identifiziert M_U mit einem direkten Summanden von M .

Vom Polyeder zum Rekonstruktionsdatum Sei $P \subseteq M_{\mathbb{R}}$ ein normaler Gitter-Polyeder voller Dimension, etwa $\dim P = n$. Bezeichne $C = 0P$ den Rezeptionskegel von P und $U \subset \mathbb{A}_k^r$ die zu C^V gehörige affine torische Varietät.

Fixiere eine endliche Menge $S \subset P \cap M$ derart, dass $S \times \{1\}$ zusammen mit $(C \cap M) \times \{0\}$ die Halbgruppe $C(P) \cap M'$ erzeugt. Nach Abschnitt 2 konstruiere den normalen Fächer Δ_P und hierzu eine projektive torische Varietät $X_P = X(\Delta_P)$.

Aus der Menge S erhalte nach Satz 3.9 eine Einbettung $X_P \hookrightarrow \mathbb{P}_U^{l-1}$. Der affine Kegel zu dieser Einbettung ist gerade $Y_P = \text{Spec } k[C(P) \cap M']$.

Tragen wir diese Daten in das entsprechend verallgemeinerte Diagramm aus dem vorangegangenen Abschnitt ein, erhalten wir:

$$\begin{array}{ccc}
 \left(T \times \mathbb{G}_m \circlearrowleft Y_P \setminus \{0\} \right) & \xrightarrow{\pi} & X_P \circlearrowleft T \\
 \downarrow & & \downarrow \iota \\
 \mathbb{G}_m^l \times T_U \circlearrowleft \mathbb{A}_{U_{C^\vee}}^l \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}_{U_{C^\vee}}^{l-1} \circlearrowleft \mathbb{G}_m^l \times T_U \\
 & & \downarrow \varphi
 \end{array}$$

Zusammen mit der kanonischen Projektion $T \rightarrow T_U$ erhalten wir das gesuchte Rekonstruktionsdatum.

Rekonstruktion des Polyeders Sei (X, U, ι, φ) ein Rekonstruktionsdatum, dann konstruiere ein Polyeder wie folgt:

Sei T der Torus zu X und bezeichne das zugehörige Gitter mit M . Sei weiter T_U der Torus zu U und bezeichne das zugehörige Gitter mit M_U . Nach Voraussetzung ist eine Einbettung $M_U \rightarrow M$ so gegeben, dass wir den Kegel C_U zu U als Kegel in M auffassen können.

Sei $x \in X$ ein Fixpunkt unter der Operation von T , dann erhalte mit der Konstruktion aus dem vorangegangenen Abschnitt einen Gitterpunkt $m_x \in M$. Setze

$$P := \text{Hull} \{ m_x \in M \mid x \in \text{Fix}_T(X) \} + C_U$$

Mit dieser Definition sehen wir sofort:

- P ist Gitterpolyeder. Offensichtlich liegen die Ecken von P auf dem Gitter M . Nach Voraussetzung ist C_U ein streng konvexer Kegel, also ist Definition 2.4 erfüllt.

Für die weiteren Eigenschaften von P benötigen wir noch das folgende Lemma.

Lemma 5.2 Sei U eine affine torische Varietät zum Torus T und Kegel σ . Setze voraus, dass σ^\vee streng konvex ist und bezeichne mit M das zu T gehörige Gitter. Zu jeder 1-dimensionalen T -Bahn $O \subset U$ gibt es einen, durch den Charakter $T \times \bar{O} \rightarrow \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}_k^1$ gegebenen, Homomorphismus von Halbgruppen $\mathbb{N}_0 \rightarrow \sigma^\vee \cap M$, der $1 \in \mathbb{N}$ auf den Erzeuger des zu O korrespondierenden Strahls von σ^\vee abbildet.

Beweis. Nach Theorem 2.6 im dritten Kapitel von [CLS] gibt es eine Bijektion zwischen der Menge der Seiten von σ und der Menge der T -Bahnen in U . Unter dieser Bijektion gilt für jede Seite $\rho \prec \sigma$:

$$\dim O(\rho) = \dim M - \dim \rho$$

Mit der inklusionsumkehrenden Bijektion zwischen den Seiten eines Kegels und den Seiten seines Duals erhalten wir eine Bijektion zwischen der Menge der Seiten des dualen Kegels und der Menge der T -Bahnen in U , so dass nun für alle Seiten $\rho^\vee \prec \sigma^\vee$ gilt

$$\dim \rho^\vee = \dim M - \dim \rho = \dim O(\rho)$$

Also korrespondieren die 1-dimensionalen T -Bahnen in U zu den Strahlen von σ^\vee . Bezeichne γ_ρ den ausgezeichneten Punkt zum Kegel $\rho \prec \sigma$, dann ist die T -Bahn von ρ gegeben durch $O(\rho) = T \cdot \gamma_\rho$ und den Abschluss dieser Bahn erhalten wir als

$$\overline{O(\rho)} = \bigcup_{\tau \prec \rho} O(\tau)$$

Da σ^\vee nach Voraussetzung streng konvex ist, ist der Ursprung die einzige echte Seite von allen Strahlen und wir erhalten

$$\overline{O(\rho^\vee)} = O(\rho^\vee) \cup O(0) = O(\rho^\vee) \cup \{0_U\} \cong \mathbb{A}_k^1 = \text{Spec } k[\mathbb{N}]$$

für alle Strahlen $\rho^\vee \prec \sigma^\vee$. Mit diesem Isomorphismus können wir \mathbb{A}_k^1 als Teilmenge von U auffassen und erhalten eine Operation von T auf \mathbb{A}_k^1 in Form eines Charakters $\chi : T \rightarrow \mathbb{G}_m$. Betrachte die korrespondierenden Diagramme

$$\begin{array}{ccc} T \times \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 & \rightsquigarrow & k[M] \otimes_k k[\mathbb{N}] & \longleftarrow & k[\mathbb{N}] \\ \downarrow \chi \times id & & \parallel & & \uparrow \phi \otimes id & & \parallel \\ \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}_k^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}_k^1 & & k[\mathbb{Z}] \otimes_k k[\mathbb{N}] & \longleftarrow & k[\mathbb{N}] \end{array}$$

Der Ringhomomorphismus $\phi : k[\mathbb{Z}] \rightarrow k[M]$ induziert einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{\phi} : \mathbb{Z} \rightarrow M$.

Behauptung $\tilde{\phi}$ bildet $1 \in \mathbb{Z}$ auf den Erzeuger des zu $O(\rho)$ korrespondierenden Strahls in $\sigma^\vee \cap M$ ab.

Begründung. Fixiere eine Basis $\{m_1, \dots, m_n\}$ von M . Fasse σ^\vee zusammen mit allen zugehörigen Seiten als einen Fächer auf und schreibe $O = O(\rho)$ für einen Strahl ρ^\vee von σ^\vee . Bezeichne $u \in N$ das Dual zum Bild von 1 unter $\tilde{\phi}$, dann definiert u die Ein-Parameter-Untergruppe

$$\lambda^u(t) = (t^{\langle u, m_1 \rangle}, \dots, t^{\langle u, m_n \rangle}) \subset T$$

Da der Charakter χ durch die Zuordnung $T \ni t \mapsto t \cdot \gamma_\rho \in O(\rho) \cong \mathbb{G}_m$, und $\lambda^u(t)$ durch die zu χ korrespondierende Abbildung gegeben ist, liegt u im relativen Inneren von ρ . Damit existiert nach Lemma 4.2 zum einen der Grenzwert von $\lambda^u(t)$ für $t \rightarrow 0$ und ist genau der ausgezeichnete Punkt γ_ρ und zum anderen liegt auch der zu u duale Gitterpunkt $\tilde{\phi}(1)$ im relativen Inneren von ρ^\vee . Wegen der Gruppenhomomorphieeigenschaft von $\tilde{\phi}$ schränkt sich damit $\tilde{\phi}$ zu einem Halbgruppenmorphismus $\mathbb{N}_0 \rightarrow \rho^\vee \cap M \subseteq \sigma^\vee \cap M$ ein, der $1 \in \mathbb{Z}$ genau auf den Erzeuger des Strahls ρ^\vee abbildet. \diamond

Die in der Behauptung gefundene Einschränkung von $\tilde{\phi}$ ist der gesuchte Homomorphismus von Halbgruppen. \square

Bezeichne Y den affinen Kegel zu X bezüglich ι . Nach Voraussetzung ist ι projektiv normal, also ist Y eine affine torische Varietät bezüglich des Torus $T \times \mathbb{G}_m$. Bezeichne C_Y den zu Y gehörigen dualen Kegel. Nach Konstruktion ist C_Y von voller Dimension und streng konvex. Nach dem vorangegangenen Lemma gibt es zu jedem Strahl von C_Y einen Homomorphismus von Halbgruppen $\mathbb{N}_0 \rightarrow M'$ der $1 \in \mathbb{N}$ auf den Erzeuger des Strahls abbildet. Da C_Y durch seine Strahlen eindeutig bestimmt ist, ist die Halbgruppe $C_Y \cap M'$ durch die Bilder dieser Halbgruppen-Homomorphismen eindeutig bestimmt. Die Bahnen, die diese Homomorphismen induzieren, sind die Bahnen der ausgezeichneten Punkte, der zu den Strahlen gehörigen torischen Varietäten.

Die ausgezeichneten Punkte in X haben wir gerade benutzt, um die Ecken von P auszurechnen, und da Y der affine Kegel von X ist, erhalten wir so genau die Erzeuger der Strahlen, die nicht Höhe 0 haben. In Höhe 0 betrachten wir ausgezeichnete Punkte in U und erhalten so genau die Erzeuger der Strahlen, die C_U aufspannen.

Insgesamt stimmen die Erzeuger der Strahlen, die den Kegel C_Y aufspannen, genau mit den Erzeugern der Strahlen, die den Kegel $C(P)$ aufspannen, überein und es gilt $C_Y = C(P)$. Wir können sofort folgern:

- P hat volle Dimension. Da C_Y der Kegel zum affinen Kegel von X und von voller Dimension ist, ist auch P von voller Dimension.

Damit haben wir eine torische Varietät X_P zum Polyeder P mit $X_P \cong X$ als torische Varietäten. Wir wollen nun noch die Einbettungen beider Varietäten in projektive Räume vergleichen. Dazu müssen wir die Existenz einer endlichen Menge $S \subset P \cap M$ zeigen, die die Bedingungen aus Lemma 3.8 erfüllt und die l Elemente hat.

Schreibe $R = k[C \cap M] = \Gamma(U, \mathcal{O}_U)$, dann induziert $Y \hookrightarrow \mathbb{A}_U^l$ eine Surjektion

$$R[X_1, \dots, X_l] \twoheadrightarrow k[C(P) \cap M']$$

Insbesondere also einen surjektiven Halbgruppen-Homomorphismus

$$\begin{aligned} (C \cap M) \times \mathbb{N}_0^l &\twoheadrightarrow C(P) \cap M' \\ (u, v) &\mapsto f(u) + g(v) \end{aligned}$$

für gewisse Halbgruppenmorphisimen $f : C \cap M \rightarrow C(P) \cap M'$ und $g : \mathbb{N}_0^l \rightarrow C(P) \cap M'$. Sei S das Bild der Menge

$$\{e_i \mid e_i \text{ Standardbasisvektor in } \mathbb{N}_0^l\}$$

unter g , dann ist zu zeigen, dass $g(v) = m \times \{1\}$ ist, für ein v von der Form e_i .

Wir wissen bereits $C_Y = C(P)$. Also folgt mit Lemma 3.10, dass das Ideal $I(X_P) = I_L$ homogen ist. Es ist

$$I_L = (\mathbf{X}^\alpha - \mathbf{X}^\beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}^l \text{ und } \alpha - \beta \in L) \triangleleft R[X_1, \dots, X_l]$$

wo L der Kern von $\mathbb{Z}^l \ni e_i \mapsto h_i \in M'$ mit $h_i \in S$ ist. Also gilt

$$\alpha - \beta \in L \iff \sum_{i=1}^l (\alpha_i - \beta_i) h_i = 0$$

Insbesondere die Ecken von P kommen in der Form $v_i = h'_i \times \{1\}$ in $\{h_i\}$ vor. Angenommen es gäbe genau ein h_j mit Höhe $h > 1$ und alle anderen h_i haben Höhe 1, dann betrachte

$$\sum (\alpha_i - \beta_i) h_i = 0$$

in der letzten Komponente erhalte

$$(l-1)(\alpha_l - \beta_l) + h(\alpha_l - \beta_l) = 0$$

und damit $(l-1) + h = 0$ also $h = -(l-1) \leq 1$ für $l \geq 1$. Wenn es zwei solche Elemente gäbe, dann erhielten wir $h + h' = -(l-2) \leq 0$ für $l > 1$ und $h, h' > 1$. Induktiv sehen wir also, dass es keine h_i mit Höhe größer als 1 geben kann.

- P ist normal. Denn mit Lemma 3.8 folgt die Normalität aus der Existenz der Menge S .

Wir können nun also einem normalen Gitter-Polyeder voller Dimension eine torische Varietät und einem Rekonstruktionsdatum einen Gitter-Polyeder voller Dimension zusammen mit einer Menge S , die die Bedingungen aus Lemma 3.8 erfüllt, zuordnen.

Satz 5.3 Die beiden Konstruktionen liefern eine Bijektion

$$\left\{ \begin{array}{l} (P, S) \text{ mit einem Gitter-Polyeder} \\ \text{voller Dimension und } S \text{ wie zuvor} \end{array} \right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{\Phi} \\ \xleftarrow{\Psi} \end{array} \left\{ \text{Rekonstruktionsdaten} \right\} / \cong$$

Beweis. Sei zunächst ein Paar (P, S) gegeben. Konstruiere nach obiger Vorschrift die Varietäten $U_P := U_{0P^\vee}$ und X_P , sowie die Morphismen $\iota_P : X_P \hookrightarrow \mathbb{P}_{U_P}^{l-1}$ und $\varphi_P : T \rightarrow \mathbb{G}_m \times T_U$. Sei Y_P der affine Kegel zu X_P , dann ist Y_P nach Konstruktion die affine torische Varietät zum Kegel $C(P)$. Insbesondere ist ι_P projektiv normal.

Damit ist $\Phi(P, S)$ ein Rekonstruktionsdatum. Schreibe $(P', S') := \Psi(\Phi(P, S))$. Nach Konstruktion ist $C(P)$ der Kegel zu Y_P und aus der Rekonstruktion eines Polyeders aus einem Rekonstruktionsdatum folgt, dass $C(P')$ ebenfalls der Kegel zu Y_P ist. Also muss $C(P) = C(P')$ und damit $P = P'$ gelten. Aus der Einbettung ι_P erhalten wir die l -elementige Teilmenge S' wie folgt: Wegen der Kommutativität des Diagramms

$$\begin{array}{ccc} Y_P \setminus \{0\} & \xrightarrow{\pi} & X_P \\ \downarrow & & \downarrow \iota_P \\ \mathbb{A}_{U_P}^l \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{P}_{U_P}^{l-1} \end{array}$$

müssen die Bilder der $x \in X_P$ unter ι_P mit den Bildern der Fasern $\pi^{-1}(x)$ unter

$$Y_P \setminus \{0\} \hookrightarrow \mathbb{A}_{U_P}^l \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{U_P}^{l-1}$$

übereinstimmen. Der Morphismus $\mathbb{A}_{U_P}^l \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_{U_P}^{l-1}$ induziert den Morphismus π und verändert die Elemente in der affinen Basis U_P nicht. Damit genügt es die Einbettung $Y_P \hookrightarrow \mathbb{A}_{U_P}^l$ zu untersuchen. Diese ist gerade durch die Surjektion

$$\begin{array}{ccc} k[C(P) \cap M'] & \leftarrow & k[Y_1, \dots, Y_r][X_s \mid s \in S] \\ \chi^s & \leftarrow & X_s \\ \chi^{h_j} & \leftarrow & Y_j \end{array}$$

wobei $k[Y_1, \dots, Y_r]$ den zur affinen Varietät U_P gehörigen Ring bezeichne und h_j ein Element aus der Hilbertbasis von $C(P)$ ohne S sei, gegeben. In der obigen Konstruktion haben wir die Menge S' als das durch die Zuordnung $X_s \mapsto \chi^s$ beschriebene Bild gesetzt. Damit stimmen die Mengen S und S' überein.

Sei nun $\mathcal{R} := (X, U, \iota, \varphi)$ ein Rekonstruktionsdatum. Setze $(P, S) := \Psi(\mathcal{R})$, dann ist P ein normaler Gitter-Kegel voller Dimension und S eine endliche Teilmenge, so dass $S \times \{1\}$ zusammen mit $(0P \cap M) \times \{0\}$ die Halbgruppe $C(P) \cap M'$ erzeugt.

Wende nun die Konstruktion Φ an und erhalte $(U_P, X_P, \iota_P, \varphi_P)$. Offensichtlich stimmen U und U_P überein, denn beide affinen torischen Varietäten werden vom selben Kegel erzeugt. Sei Y der

affine Kegel von X bezüglich ι und Y_P der affine Kegel von X_P bezüglich ι_P , dann gilt $Y = Y_P$, weil auch hier beide affinen torischen Varietäten vom selben Kegel $C(P)$ erzeugt werden. Weiter sind die Einbettungen

$$Y \hookrightarrow \mathbb{A}_U^l \quad \text{und} \quad Y_P \hookrightarrow \mathbb{A}_U^l$$

gleich, weil beide Morphismen durch den selben Halbgruppenmorphismus $\mathbb{N}^l \rightarrow C(P) \cap M'$ gegeben werden. Insbesondere haben also beide Morphismen das selbe Bild in \mathbb{A}_U^l und somit folgt $X \cong X_P$. \square

Kapitel II

Nash-Aufblasungen

In diesem Kapitel wird zunächst der Begriff der Nash-Aufblasung für Varietäten eingeführt und dieser anschließend auf den torischen Fall übertragen. Hauptteil dieses Kapitels ist die Beschreibung der Nash-Aufblasungen von torischen Varietäten in kombinatorischer Sprache.

Auch in diesem Kapitel bezeichne k stets einen algebraisch abgeschlossenen Körper.

6 Definition und Eigenschaften

Bei der Definition der Nash-Aufblasung und ihrer Eigenschaften folge ich eng [ALPPT]. Sei $n \in \mathbb{N}_0$ und $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine integrale quasi-projektive Varietät der Dimension $d \in \mathbb{N}$ über k .

Sei $\{U_i\}_{i=0,\dots,n}$ die Standardüberdeckung von \mathbb{P}_k^n . Zu jedem Punkt $x \in X(k)$ gibt es ein U_i mit $x \in U_i(k)$. Für den affinen Tangentialraum gilt

$$T_x X \subseteq \mathbb{A}^{n+1}(k) \cong U_i(k)$$

Damit haben wir eine Einbettung in den projektiven Raum gegeben. Wir bezeichnen den Abschluss von $T_x X$ in \mathbb{P}_k^n als den projektiven Tangentialraum und schreiben $\mathbb{T}_x X \subseteq \mathbb{P}_k^n$. Sei nun Y der affine Kegel zu X bezüglich der Einbettung nach \mathbb{P}_k^n , dann erhalten wir durch $f : Y \setminus \{0\} \rightarrow X$ einen Punkt $f(x) \in Y(k)$ und ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{T}_x X & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^n \\ \uparrow & & \uparrow \\ T_{f(x)} Y \setminus \{0\} & \hookrightarrow & \mathbb{A}_k^{n+1} \setminus \{0\} \end{array}$$

Vergleiche [H] S. 181 ff.

Definition und Lemma 6.1 Die Gauss-Abbildung von X ist die rationale Abbildung

$$G : X \dashrightarrow \text{Grass}_{d+1,n+1,k}$$

welche durch den folgenden Repräsentanten gegeben ist:

$$X^{\text{SM}} \ni x \mapsto \mathbb{T}_x X \in \text{Grass}_{d+1,n+1,k}$$

Beweis. Wir müssen zeigen, dass der Repräsentant tatsächlich ein Morphismus ist und, dass wir $\mathbb{T}_x X$ als Element von $\text{Grass}_{d+1, n+1, k}$ auffassen können. Hierzu betrachte [H] Example 15.2 \square

Die Gauss-Abbildung ordnet also jedem glatten Punkt $x \in X$ seinen projektiven Tangentialraum in X zu. Der Graph Γ_G des zugehörigen Morphismus liegt abgeschlossen in $X^{\text{SM}} \times \text{Grass}_{d+1, n+1, k}$, denn die Grassmann-Varietät ist separiert über ihrer Basis.

Betrachten wir die kanonische Einbettung in den umgebenden Raum

$$\Gamma_G \subseteq X^{\text{SM}} \times \text{Grass}_{d+1, n+1, k} \subseteq X \times \text{Grass}_{d+1, n+1, k}$$

gelangen wir zu einer natürlichen Definition der Nash-Aufblasung:

Definition 6.2 *Bezeichne G die Gauss-Abbildung von X in die Grassmann-Varietät wie oben, und bezeichne X' den Abschluss von Γ_G in $X \times_{\text{Spec } k} \text{Grass}_{d+1, n+1, k}$. Dann nennen wir X' zusammen mit der Abbildung*

$$X' \rightarrow X \times_{\text{Spec } k} \text{Grass}_{d+1, n+1, k} \xrightarrow{\text{proj.}} X$$

die Nash-Aufblasung von X .

Die zur Nash-Aufblasung gehörige Abbildung $X' \rightarrow X$ ist offensichtlich birational.

Wir erhoffen uns durch diese Aufblasung eine Varietät zu erhalten, dessen glatter Ort echt größer ist, als der glatte Ort der ursprünglichen Varietät. Dies ist im Allgemeinen jedoch nicht so, etwa zeigt [N], dass die Nash-Aufblasung von $X = V(T_1^p - T_2^q)$ wieder X ist.

Die *Nash-Aufblasung* alleine genügt also nicht. Da jedoch die Normalisierung einer Kurve stets glatt ist, betrachte im Folgenden stets die *normalisierte Nash-Aufblasung*.

Definition 6.3 *Die Normalisierung von X ist ein normales Schema \tilde{X} zusammen mit einem ganzen und surjektiven Morphismus $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ von Schemata, so dass das Tupel (\tilde{X}, π) die folgende universelle Eigenschaft erfüllt:*

Für jedes integrale und normale Schema Y zusammen mit einem dominanten Morphismus $f : Y \rightarrow X$ von Schemata existiert ein eindeutig bestimmter Morphismus $g : Y \rightarrow \tilde{X}$ so, dass das offensichtliche Diagramm kommutiert.

Es ist sofort klar, dass die Normalisierung, sofern sie existiert, durch die universelle Eigenschaft bis auf eindeutige Isomorphie eindeutig bestimmt ist. Ein Nachweis der Existenz der Normalisierung findet sich etwa in [GW] Kapitel 12.

Notation 6.4 *Wir bezeichnen die normalisierte Nash-Aufblasung mit \tilde{X} .*

Satz 6.5 *Der natürliche Morphismus $\tilde{X} \rightarrow X' \rightarrow X$ ist projektiv.*

Beweis. Die Komposition projektiver Morphismen ist ein projektiver Morphismus. Es genügt also, die beiden Morphismen getrennt zu betrachten.

Behauptung 1 *Die Normalisierung der Nash-Aufblasung ist ein projektiver Morphismus.*

Begründung. Die Normalisierung ist ein ganzer Morphismus von endlichem Typ und somit ein endlicher Morphismus. Nach Folgerung 13.77 in [GW] ist ein Morphismus genau dann endlich, wenn er affin und projektiv ist. \diamond

Behauptung 2 Die Nash-Aufblasung von X ist ein projektiver Morphismus.

Begründung. Die Einbettung von X' in $X \times \text{Grass}_{d+1, n+1, k}$ ist per Konstruktion abgeschlossen. Es genügt also zu zeigen, dass die Projektion aus dem Faserprodukt ein projektiver Morphismus ist. Wir können mit der Plücker-Einbettung den Grassmannschen Teil des Faserproduktes abgeschlossen in den projektiven Raum der Dimension $m = \binom{n+1}{d+1} - 1$ einbetten.

$$\begin{aligned} \text{plü} : \text{Grass}_{d+1, n+1} &\hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+1}{d+1}-1} \\ U \cong (a_{ij})_{i,j} &\mapsto (\cdots : m_I(a_{i,j}), \dots) \end{aligned}$$

wobei $I = (i_1, \dots, i_{d+1})$ ein Multiindex mit $i_r \in \{1, \dots, n+1\}$ und $m_I(a_{ij}) := \det \left((a_{ij})_{\substack{i=i_1, \dots, i_{d+1} \\ j=1, \dots, d}} \right)$ ist. Erhalte die gesuchte Einbettung als

$$X \times_{\text{Spec } k} \text{Grass}_{d+1, n+1, k} \xrightarrow{\text{id} \times \text{plü}} X \times_{\text{Spec } k} \mathbb{P}_k^m$$

dann kommutiert das Diagramm offensichtlich. \square

Wir wollen nun noch einige weitere Eigenschaften untersuchen, die uns die Übertragung auf den torischen Fall vereinfachen werden:

Bemerkung 6.6 Ist X bereits eine glatte Varietät, dann ist X selbst die (normalisierte) Nash-Aufblasung von X .

Beweis. Dies ist klar, denn in diesem Fall ist die Gauss-Abbildung G auf ganz X definiert und Γ_G ist bereits abgeschlossen in $X \times \text{Grass}_{d+1, n+1, k}$. Weiter gilt dann $\Gamma_G \cong X$ und da glatte Varietäten insbesondere normal sind, folgt die Behauptung. \square

Im affinen Fall können wir die Nash-Aufblasung noch etwas vereinfachen.

Bemerkung 6.7 Ist $X \subseteq \mathbb{A}^d$ eine affine Varietät, dann liefert bereits die Gauss-Abbildung

$$X \dashrightarrow \text{Grass}_{d, n, k}$$

die gesuchte Nash-Aufblasung, denn der Morphismus

$$\begin{aligned} X \times_{\text{Spec } k} \text{Grass}_{d, n, k} &\rightarrow X \times_{\text{Spec } k} \text{Grass}_{d+1, n+1, k} \\ (x, V) &\mapsto (x, \langle (1 \times x) \rangle \oplus (0 \times V)) \end{aligned}$$

ist eine abgeschlossene Einbettung.

7 Geradenbündel auf torischen Varietäten

Ziel dieses Abschnittes ist, es zu zeigen, dass wir für die konkrete Berechnung der Nash-Aufblasung im torischen Fall den Normalisierungsschritt „ignorieren“ können. Zu diesem Zweck wollen wir die Charaktere, mit denen wir im ersten Kapitel die Ecken der Polyeder berechnet haben, noch einmal auf allgemeinerem Weg über spezielle Geradenbündel konstruieren.

Sei $l \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl.

Konstruktion 7.1 *Betrachte die Standardüberdeckung*

$$\mathbb{P}_k^{l-1} = \bigcup_{i=1}^l D_+(X_i) =: \bigcup_{i=1}^l U_i$$

Sei $d \in \mathbb{N}$, dann setze für $i, j = 1, \dots, l$

$$g_{ij} := \left(\frac{X_j}{X_i} \right)^d \in \Gamma(U_i \cap U_j, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{l-1}}^\times)$$

Diese Familie der g_{ij} erfüllt die Kozykelbedingung, denn

$$g_{jt} \cdot g_{ij} = \left(\frac{X_t}{X_j} \right)^d \cdot \left(\frac{X_j}{X_i} \right)^d = \left(\frac{X_t}{X_i} \right)^d = g_{it}$$

Durch Verkleben erhalten wir einen lokal-freien $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_k^{l-1}}$ -Modul von Rang Eins. Dieses Geradenbündel bezeichnen wir mit $\mathcal{O}(d)$.

Wir können die Torusoperation von \mathbb{G}_m^l auf \mathbb{P}_k^{l-1} durch den Morphismus

$$\theta : \mathbb{G}_m^l \times \mathbb{P}_k^{l-1} \rightarrow \mathbb{P}_k^{l-1}$$

beschreiben. Offensichtlich haben wir mit der Projektion auf die zweite Komponente

$$\pi : \mathbb{G}_m^l \times \mathbb{P}_k^{l-1} \rightarrow \mathbb{P}_k^{l-1}$$

einen zweiten kanonischen Morphismus.

Lemma 7.2 *Seien $d \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und θ, π wie oben. Dann gibt es einen natürlichen Isomorphismus zwischen den inversen Bildern von $\mathcal{O}(d)$, also*

$$\theta^*(\mathcal{O}(d)) \cong \pi^*(\mathcal{O}(d))$$

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die lokalen inversen Bilder isomorph sind und sich die lokalen Isomorphismen verkleben. Bezeichne die Einschränkungen von θ und π auf die affin offenen Teile mit $\theta_i, \pi_i : \mathbb{G}_m^l \times U_i \rightarrow U_i$.

Es gilt $\mathcal{O}(d)|_{U_i} = \mathcal{O}_{U_i}$, also ist auch das inverse Bild in beiden Fällen isomorph zur Strukturgarbe $\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m^l \times U_i}$. Im affinen Fall können wir diese durch den Ring

$$k[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_l^{\pm 1}] \left[\frac{X_1}{X_i}, \dots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \dots, \frac{X_l}{X_i} \right]$$

beschreiben, wobei die Koordinaten auf \mathbb{G}_m^l mit Y_i bezeichnet seien. Wir suchen nun Automorphismen φ_i auf diesen Ringen, die mit den Verklebe-Isomorphismen $\theta^*(g_{ij}) = \left(\frac{X_j}{X_i}\right)^d \cdot \left(\frac{Y_j}{Y_i}\right)^d$ und $\pi^*(g_{ij}) = \left(\frac{X_j}{X_i}\right)^d$ verträglich sind. Zur Vereinfachung der Notation lassen wir das Auslassungszeichen $\widehat{\frac{X_i}{X_i}}$ im folgenden Diagramm weg und bezeichnen $R := k[Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_l^{\pm 1}]$.

$$\begin{array}{ccc} R\left[\frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_l}{X_i}, \frac{X_1}{X_j}, \dots, \frac{X_l}{X_j}\right] & \xrightarrow{\sim \theta^*(g_{ij})} & R\left[\frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_l}{X_i}, \frac{X_1}{X_j}, \dots, \frac{X_l}{X_j}\right] \\ \cdot Y_i^{-d} \downarrow & & \downarrow \cdot Y_j^{-d} \\ R\left[\frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_l}{X_i}, \frac{X_1}{X_j}, \dots, \frac{X_l}{X_j}\right] & \xrightarrow{\sim \pi^*(g_{ij})} & R\left[\frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{X_l}{X_i}, \frac{X_1}{X_j}, \dots, \frac{X_l}{X_j}\right] \end{array}$$

Die Kommutativität dieses Diagramms lässt sich leicht nachrechnen. Damit verkleben sich die Automorphismen „Multiplikation mit Y_i^{-d} “ bzw. „Multiplikation mit Y_j^{-d} “ entlang beider Isomorphismen und wir haben die gesuchten Automorphismen gefunden. \square

Definition 7.3 Sei X ein Schema und \mathcal{F} ein \mathcal{O}_X -Modul. Sei weiter $x \in X$ ein abgeschlossener Punkt, dann setzen wir die Faser von \mathcal{F} in x als

$$\mathcal{F}(x) := \mathcal{F}_x / \mathfrak{m}_x \mathcal{F}_x = \mathcal{F}_x \otimes_{\mathcal{O}_{X,x}} \kappa(x)$$

wobei \mathcal{F}_x der Halm von \mathcal{F} in x und \mathfrak{m}_x das Maximalideal in $\mathcal{O}_{X,x}$ bezeichnen.

Lemma 7.4 Sei $x \in \mathbb{P}_k^{l-1}$ ein Fixpunkt unter der Torusoperation von \mathbb{G}_m^l , dann erhalten wir einen durch $\mathcal{O}(d)$ eindeutig bestimmten Charakter

$$\chi_x^{-d} : \mathbb{G}_m^l \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

der die Operation von \mathbb{G}_m^l auf der Faser $\mathcal{O}(d)(x)$ beschreibt. Dabei gilt: Der zu $\mathcal{O}(-1)$ gehörige Charakter beschreibt die Torusoperation von \mathbb{G}_m^l auf der Faser von $\pi : \mathbb{A}_k^l \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_k^{l-1}$ über x .

Beweis. Seien θ, π wie oben. Für die Faser von $\mathcal{O}(d)$ im Punkt x gilt $\mathcal{O}(d)(x) = \mathcal{O}(d)(tx)$ für alle $t \in \mathbb{G}_m^l$, denn x ist ein Fixpunkt nach Voraussetzung. Durch Zurückziehen von tx nach (t, x) unter θ erhalten wir nach Lemma 7.2 einen Isomorphismus

$$\mathcal{O}(d)(x) = \mathcal{O}(d)(tx) \cong (\theta^* \mathcal{O}(d))(t, x) \cong (\pi^* \mathcal{O}(d))(t, x) \cong \mathcal{O}(d)(x)$$

Wir erhalten einen eindeutig bestimmten, nicht trivialen Automorphismus

$$\begin{array}{ccc} \chi_x^{-d}(t) : \mathcal{O}(d)(x) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(d)(x) \\ \zeta & \mapsto & \chi_x^{-d}(t) \cdot \zeta \end{array}$$

auf der Faser $\mathcal{O}(d)(x)$. Die Faser $\mathcal{O}(d)(x)$ ist ein eindimensionaler k -Vektorraum, also ist die Gruppe der Automorphismen hiervon gerade $\text{Aut}(\mathcal{O}(d)(x)) = k^\times \cong \mathbb{G}_m$. Insgesamt erhalten wir so einen eindeutig bestimmten Charakter

$$\chi_x^{-d} : \mathbb{G}_m^l \ni t \mapsto \chi_x^{-d}(t) \in \mathbb{G}_m$$

Diesen Charakter können wir nach Lemma 7.2 konkret durch die Zuordnung $(t_1, \dots, t_l) \mapsto t_j^{-d}$ beschreiben.

Nach obiger Überlegung erhalten wir zu $\mathcal{O}(-1)$ den durch die Zuordnung $(t_1, \dots, t_l) \mapsto t_j$ beschriebenen Charakter. Wir wollen nun zeigen, dass dieser die Torusoperation wie behauptet beschreibt. Da \mathbb{A}_k^l der affine Kegel von \mathbb{P}_k^{l-1} ist, gilt

$$\overline{\pi^{-1}(x)} = \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{pmatrix} \right\rangle \cong \mathbb{A}_k^1$$

Nach Voraussetzung ist x ein Fixpunkt unter der Torus-Operation von \mathbb{G}_m^l , also sind alle x_i mit einer einzigen Ausnahme gleich Null. Sei diese Ausnahme etwa an der j -ten Stelle, so ist $\overline{\pi^{-1}(x)} = \langle e_j \rangle$. Da der Torus diagonal auf der Faser operiert, erhalten wir als konkrete Operation von (t_1, \dots, t_l) die Multiplikation mit dem j -ten Element. Insgesamt erhalten wir so einen Charakter

$$\chi^{(j)} : \mathbb{G}_m^l \rightarrow \mathbb{G}_m,$$

der durch die Zuordnung $(t_1, \dots, t_l) \mapsto t_j$ beschrieben wird. \square

Da sich die Charaktere, die von $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(-1)$ gegeben werden, nur um das Vorzeichen im Exponenten unterscheiden und sich diese also in eindeutiger Weise entsprechen, können wir genauso gut auch mit dem Geradenbündel $\mathcal{O}(1)$ weiterarbeiten.

Wir wollen nun spezielle Geradenbündel auf projektiven Varietäten untersuchen, die sich als Pullback von $\mathcal{O}(1)$ verstehen lassen.

Definition 7.5 Sei X ein quasi-kompaktes, quasi-separiertes Schema und \mathcal{L} ein Geradenbündel auf X . Wir sagen

- (i) \mathcal{L} ist sehr ampel, falls es eine Einbettung $\iota : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ in einen projektiven Raum so gibt, dass $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$ gilt.
- (ii) \mathcal{L} ist ampel, falls es ein $m \in \mathbb{N}$ so gibt, dass

$$\mathcal{L}^{\otimes m} = \underbrace{\mathcal{L} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}}_{m \text{ mal}}$$

sehr ampel ist.

Sei nun $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine quasi-projektive Varietät der Dimension $d \in \mathbb{N}$ über k und bezeichne die Nash-Aufblasung von X mit X' , dann erhalten wir aus der Plücker-Einbettung eine abgeschlossene Immersion $\iota : X' \hookrightarrow \mathbb{P}_X^{l-1}$ mit $l = \binom{n+1}{d+1}$. Bezeichne \mathcal{L} den Pullback von $\mathcal{O}(1)$ unter ι , dann ist \mathcal{L} offensichtlich sehr ampel. Da die Normalisierung $\nu : \tilde{X} \rightarrow X$ ein endlicher Morphismus ist, und der Pullback eines ampelen Geradenbündels unter einem endlichen Morphismus wieder ein amples Geradenbündel ist¹, ist $\tilde{\mathcal{L}} := \nu^*(\mathcal{L})$ ebenfalls ein amples Geradenbündel.

Damit gibt es also ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Immersion $\tilde{\iota} : \tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}_X^N$, so dass $\mathcal{L}^{\otimes N} = \tilde{\iota}^* \mathcal{O}(1)$ gilt. Allein die Tatsache, dass $\tilde{\mathcal{L}}$ ampel ist, genügt aber noch nicht um den Normalisierungsschritt zu ignorieren. Hierzu benötigen wir noch eine weitere Eigenschaft von $\mathcal{O}(1)$, die unter Pullback stabil ist.

¹Siehe etwa [GW] Theorem 13.84

Definition 7.6 Sei X eine torische Varietät mit Torus T und sei \mathcal{L} ein Geradenbündel auf X . Bezeichne wieder die beiden Morphismen Torus-Operation und Projektion auf die zweite Komponente mit θ und π . Wir sagen \mathcal{L} ist linearisiert (durch ϕ), oder \mathcal{L} ist ein (durch ϕ) linearisiertes Geradenbündel, wenn es einen Isomorphismus

$$\phi : \theta^* \mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \pi^* \mathcal{L}$$

so gibt, dass die folgende Kozykelbedingung erfüllt ist:

Bezeichne $\mu : T \times T \rightarrow T$ die Gruppenoperation auf T und π_{23} die Projektion eines dreifachen kartesischen Produktes auf die Komponenten 2 und 3. Wir erhalten drei Abbildungen π_{23} , $\mu \times \text{id}_X$ und $\text{id}_T \times \theta$ von $T \times T \times X$ nach $T \times X$. Die Kozykelbedingung ist nun die Kommutativität des folgenden Diagramms:

$$\begin{array}{ccc} [\theta \circ (\text{id}_T \times \theta)]^* \mathcal{L} & \xrightarrow{(\text{id}_T \times \theta)^* \phi} & [\pi \circ (\text{id}_T \times \theta)]^* \mathcal{L} = [\theta \circ \pi_{23}]^* \mathcal{L} & \xrightarrow{(\pi_{23})^* \phi} & [\pi \circ \pi_{23}]^* \mathcal{L} \\ \parallel & & & & \parallel \\ [\theta \circ (\mu \times \text{id}_X)]^* \mathcal{L} & \xrightarrow{(\mu \times \text{id}_X)^* \phi} & & & [\pi \circ (\mu \times \text{id}_X)]^* \mathcal{L} \end{array}$$

Folgerung 7.7 Das Geradenbündel $\mathcal{O}(1)$ auf \mathbb{P}_k^l ist linearisiert.

Beweis. Einen guten Kandidaten für einen solchen Isomorphismus liefert uns Lemma 7.2. Wir müssen nun zeigen, dass für diesen Isomorphismus die Kozykelbedingung erfüllt ist. Wie schon im Beweis des Lemmas genügt es auch hier, die affin offenen Teile zu betrachten. Wir können die inversen Bilder wieder durch konkrete Ringe angeben. Wir betrachten

$$R[Z, Y, X] := k[Z_1^{\pm 1}, \dots, Z_l^{\pm 1}][Y_1^{\pm 1}, \dots, Y_l^{\pm 1}]\left[\frac{X_1}{X_i}, \dots, \frac{\widehat{X_i}}{X_i}, \dots, \frac{X_l}{X_i}\right]$$

und die lokalen inversen Bilder von ϕ unter den drei Abbildungen von $R[Z, Y, X]$ nach $R[Y, X]$, $R[Z, X]$ bzw. $R[ZY, X]$:

$$\begin{aligned} (\text{id}_T \times \theta)^* \phi &= \cdot Z_i^{-1} \\ (\pi_{23})^* \phi &= \cdot Y_i^{-1} \\ (\mu \times \text{id}_X)^* \phi &= \cdot (Z_i Y_i)^{-1} \end{aligned}$$

tragen wir dies in das Diagramm aus der obigen Definition ein, erhalten wir

$$\begin{array}{ccc} R[Z, Y, X] & \xrightarrow{\cdot Z_i^{-1}} & R[Z, Y, X] = R[Z, Y, X] & \xrightarrow{\cdot Y_i^{-1}} & R[Z, Y, X] \\ \parallel & & & & \parallel \\ R[Z, Y, X] & \xrightarrow{\cdot (Z_i Y_i)^{-1}} & & & R[Z, Y, X] \end{array}$$

Dieses Diagramm kommutiert offensichtlich. \square

Mit Folgerung 7.7 wissen wir, dass $\mathcal{O}(1)$ und $\mathcal{O}(-1)$ linearisiert sind. Dass diese Eigenschaft stabil unter Pullback ist, zeigt das folgende Lemma.

Lemma 7.8 Seien zwei torische Varietäten X und X' zusammen mit den zugehörigen Tori T und T' , sowie Morphismen $f : X' \rightarrow X$ und $g : T' \rightarrow T$ so gegeben, dass das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f} & X \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T' & \xrightarrow{g} & T \end{array}$$

kommutiert. Dann gilt: Ist \mathcal{L} ein durch ϕ linearisiertes Geradenbündel, so ist $f^*\mathcal{L}$ durch $(g \times f)^*\phi$ linearisiert.

Beweis. Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta} \\ \xrightarrow{\pi} \end{array} & X \\ g \times f \uparrow & & \uparrow f \\ T' \times X' & \begin{array}{c} \xrightarrow{\theta'} \\ \xrightarrow{\pi'} \end{array} & X' \end{array}$$

wobei θ, θ' die Torus-Operationen und π, π' die Projektionen auf die zweite Komponente bezeichnen. Die beiden Diagramme, mit je den oberen und je den unteren Pfeilen, kommutieren, wegen der vorausgesetzten Kommutativität des ersten Diagramms. Offensichtlich ist also $(g \times f)^*\phi$ ein geeigneter Kandidat für einen Isomorphismus, wie in Definition 7.6 gefordert. Auch die Kozykelbedingung von $(g \times f)^*\phi$ folgt mit dem Diagramm aus der Kozykelbedingung von ϕ . \square

Sei X eine torische Varietät zum Torus T und sei \mathcal{L} ein bezüglich ϕ linearisiertes Geradenbündel, dann ist wegen $\theta^*(\mathcal{L}^{\otimes n}) = (\theta^*\mathcal{L})^{\otimes n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, auch $\mathcal{L}^{\otimes n}$ linearisiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und zwar bezüglich $\phi^{\otimes n} = \phi \otimes \dots \otimes \phi$. Ist also das ample Geradenbündel \mathcal{L} linearisiert, dann sind es auch alle natürlichen Tensorpotenzen von \mathcal{L} . Insbesondere also die sehr amples Potenzen.

Wir übersetzen nun Proposition 1.7 aus §3 von [MFK] in unseren Fall und unsere Notation und erhalten die folgende

Proposition 7.9 Sei X eine torische Varietät zum Torus T und sei \mathcal{L} ein sehr amples linearisiertes Geradenbündel auf X . Sei weiter $\dim H^0(X, \mathcal{L})^\vee = l$. Dann gibt es eine geeignete Basis \mathcal{B} von $H^0(X, \mathcal{L})^\vee$ und eine Einbettung

$$X \xrightarrow{\iota} \mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{L})^\vee) \stackrel{\mathcal{B}}{\cong} \mathbb{P}_k^{l-1}$$

mit $\mathcal{L} = \iota^*(\mathcal{O}(1))$, sowie einen Gruppenhomomorphismus $T \rightarrow \mathbb{G}_m^l$, so dass das folgende Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^{l-1} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T & \rightarrow & \mathbb{G}_m^l \end{array}$$

Damit haben wir den Großteil der Arbeit für das Hauptergebnis dieses Abschnittes getan. Wir wollen nun den Abschnitt 5 über die Klassifizierung torischer Varietäten zu Polyedern im Licht der soeben erarbeiteten Theorie der Geradenbündel betrachten. Der folgende Satz erfüllt das zu Beginn des Abschnitts gemachte Versprechen, bei der kombinatorischen Berechnung der Nash-Aufblasung im torischen Fall den Normalisierungsschritt außer acht lassen zu können.

Satz 7.10 Sei U eine affine torische Varietät zum Torus T . Sei weiter X eine projektive Varietät, so dass T Zariski-dicht in X liegt und sich die natürliche Multiplikation auf T durch Torusoperation auf X , kompatibel mit der Operation von T auf U , erweitert. Sei die Einbettung von X in den projektiven Raum \mathbb{P}_U^d so, dass wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} X & \hookrightarrow & \mathbb{P}_U^d \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T & \rightarrow & \mathbb{G}_m^d \times T \end{array}$$

erhalten. Mit anderen Worten: X erfüllt, bis auf die Normalität, alle Eigenschaften einer torischen Varietät. Sei weiter $f : \tilde{X} \rightarrow X$ die Normalisierung von X , dann gelten:

- (1) \tilde{X} ist eine torische Varietät bezüglich T .
- (2) Es gibt ein Rekonstruktionsdatum $(\tilde{X}, U, \tilde{\iota}, \tilde{\varphi})$.
- (3) Die Ecken des zugehörigen Polyeders lassen sich durch den von $\iota^* \mathcal{O}(-N)$, für ein $N \in \mathbb{N}$, gegebenen Charakter auf X berechnen.

Beweis. Zu (1): Betrachte zunächst das folgende Lemma:

Lemma 7.11 Seien Y, Z zwei integrale Schemata und $h : Y \rightarrow Z$ ein dominanter Morphismus. Sei Y normal und \tilde{Z} die Normalisierung von Z , dann faktorisiert h eindeutig über die Normalisierung von Z , das heißt, es gibt einen eindeutig bestimmten Morphismus $h' : Y \rightarrow \tilde{Z}$, so dass das offensichtliche Diagramm kommutiert.

Genauer ist Y sogar genau dann normal, wenn es einen solchen Morphismus h' gibt. Vergleiche etwa Folgerung 12.45 in [GW]. Wir haben eine Torus-Operation $T \times X \rightarrow X$, welche die Gruppenstruktur von T auf X erweitert. Die Normalisierung von T ist ein Isomorphismus, da T bereits normal ist. Wir erhalten das Diagramm

$$\begin{array}{ccc} T \times X & \xrightarrow{\theta} & X \\ \text{id} \times f \uparrow & & \uparrow f \\ T \times \tilde{X} & \xrightarrow{\vartheta} & \tilde{X} \end{array}$$

Der Morphismus $h := \theta \circ (\text{id} \times f)$ ist offensichtlich dominant und die Schemata $T \times \tilde{X}$ und X sind integral. Mit obigem Lemma erhalte den Morphismus ϑ . Betrachte das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} & & T \times \tilde{X} & \xrightarrow{\vartheta} & \tilde{X} \\ & m \times \text{id} \nearrow & \downarrow \text{id} \times \vartheta & & \downarrow m \\ T \times T \times \tilde{X} & \xrightarrow{\text{id} \times \vartheta} & T \times \tilde{X} & & \\ \downarrow m \times \text{id} & & \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ T \times T \times X & \xrightarrow{\text{id} \times \theta} & T \times X & \xrightarrow{\theta} & X \\ & & \downarrow m & & \downarrow m \end{array}$$

Wobei m die Multiplikation auf T und die Senkrechten in jedem Punkt die entsprechenden Normalisierungen bezeichnen, also etwa

$$T \times \tilde{X} \xrightarrow{\text{id} \times f} T \times X$$

Da das „untere“ Quadrat durch die Torus-Operation von T auf X gegeben ist, folgt erneut mit Lemma 7.11 die Kommutativität des „oberen“ Quadrates.

Zu (2): Nach (1) erfüllt \tilde{X} alle Forderungen an eine torische Varietät. Bezeichne $\mathcal{L} = \iota^* \mathcal{O}(1)$ ein sehr amplex Geradenbündel auf X und $\tilde{\mathcal{L}} := f^* \mathcal{L}$ den Pullback von \mathcal{L} unter der Normalisierung nach \tilde{X} . Dann ist $\tilde{\mathcal{L}}$ ample. Wegen unseren Voraussetzungen an X und ι erfüllt ι die Voraussetzungen von Lemma 7.8. Damit ist \mathcal{L} linearisiert. Da offensichtlich auch f die Bedingungen dieses Lemmas erfüllt ist damit auch $\tilde{\mathcal{L}}$ linearisiert. Also gibt es nach Proposition 7.9 eine Einbettung

$$\tilde{\iota}: \tilde{X} \hookrightarrow \mathbb{P}(H^0(X, \tilde{\mathcal{L}}^{\otimes N})^\vee) = \mathbb{P}_k^{L-1}$$

mit $\tilde{\mathcal{L}}^{\otimes N} = \tilde{\iota}^* \mathcal{O}(1)$, so dass wir ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \tilde{X} & \hookrightarrow & \mathbb{P}_k^{L-1} \\ \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\ T & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{G}_m^L \end{array}$$

erhalten. Wir erhalten eine solche Einbettung für jedes sehr ample Geradenbündel, also können wir ohne Einschränkung $N \in \mathbb{N}$ (und damit $L \in \mathbb{N}$) so groß wählen, dass die Einbettung $\tilde{\iota}$ projektiv normal ist. Setze

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}: T &\rightarrow \mathbb{G}_m^L \times T \\ t &\mapsto (\alpha(t), t) \end{aligned}$$

Dann erhalten wir ein Rekonstruktionsdatum $(\tilde{X}, U, \tilde{\iota}, \tilde{\varphi})$.

Für den Nachweis von (3) müssen wir zunächst zeigen, dass die Normalisierung eine Bijektion auf den Fixpunkten ist.

Behauptung *Es gibt eine, durch f induzierte, Bijektion zwischen der Menge der T -Fixpunkte auf X und der Menge der T -Fixpunkte auf \tilde{X} .*

Begründung. Sei $x \in X$ ein T -Fixpunkt, dann ist $f^{-1}(x) = f^{-1}(T.x)$ als Urbild unter einem endlichen Morphismus endlich. Da f nach (1) verträglich mit der Torus-Operation ist, muss aber $T.f^{-1}(x) = f^{-1}(x)$ gelten. Somit muss $f^{-1}(x)$ ein T -Fixpunkt sein, denn es gibt keine endlichen T -Bahnen mit mehr als einem Punkt.

Für die andere Richtung sei $x \in X$ kein T -Fixpunkt. Nimm an, dass $f^{-1}(x)$ einen Fixpunkt enthielte. In diesem Fall läge ein Fixpunkt auf der Bahn $T.x$, dies ist aber nach Voraussetzung nicht möglich. \diamond

Bezeichne den zum Rekonstruktionsdatum $(\tilde{X}, U, \tilde{\iota}, \tilde{\varphi})$ gehörigen Polyeder mit P . Die Ecken von P berechnen wir nach Abschnitt 4 auf den Fasern der T -Fixpunkte von $\tilde{X} \subseteq \mathbb{P}_U^{L-1}$ unter dem von $\mathbb{A}_k^L \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}_k^{L-1}$ induzierten Morphismus $\tilde{Y} \setminus \{0\} \rightarrow \tilde{X}$, wobei \tilde{Y} den affinen Kegel von \tilde{X} bezüglich $\tilde{\iota}$ bezeichne. Wir erhalten die Gitter-Koordinaten der Ecke als Exponenten der Toruselemente. In Lemma 7.4 haben wir gezeigt, dass wir das Negative dieser Exponenten auch aus dem Charakter, der von $\mathcal{O}(1)$ beziehungsweise von $\tilde{\mathcal{L}}^{\otimes N} = \tilde{\iota}^* \mathcal{O}(1)$ bestimmt wird, erhalten. Betrachte das folgende

Diagramm

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathbb{G}_m^L \times T_U & \xleftarrow{\tilde{\varphi}} & T & & T & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathbb{G}_m^L \times T_U \\
 \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft & & \circlearrowleft \\
 \mathbb{P}_U^{L-1} & \xleftarrow{\tilde{\iota}} & \tilde{X} & \xrightarrow{f} & X & \xrightarrow{\iota} & \mathbb{P}_U^{L-1}
 \end{array}$$

$$\mathcal{O}(1) \xleftarrow{\tilde{\iota}} \tilde{\mathcal{L}}^{\otimes N} \xrightarrow{f} \mathcal{L}^{\otimes N} \xrightarrow{\iota} \mathcal{O}(N)$$

Wegen $\mathcal{O}(1)^{\otimes N} \cong \mathcal{O}(N)$ können wir die Exponenten der Torus-Elemente, kurz: Gewichte, auf der Faser von $\tilde{\mathcal{L}}^{\otimes N}$ über einem T -Fixpunkt $\tilde{x} \in \tilde{X}$, durch Multiplikation mit N , aus den Gewichten auf der Faser von \mathcal{L} über $f(\tilde{x}) \in X$ errechnen.

Die Charaktere, welche von $\mathcal{O}(N)$ und $\mathcal{O}(-N)$ gegeben werden, unterscheiden sich gerade genau um das Vorzeichen. \square

8 Nash-Aufblasung torischer Varietäten

Bezeichne wieder $d \in \mathbb{N}$ die Dimension und sei $N = \mathbb{Z}^d$ unser Gitter. Fixiere eine Gitterbasis $\{m_1, \dots, m_d\} \subset M$. Da wir ausschließlich über einem beliebigen, aber festen, algebraisch abgeschlossen Körper k operieren, lassen wir zur Verbesserung der Übersichtlichkeit den Hinweis auf k oder $\text{Spec } k$ an Faserprodukten, affinen und projektiven Räumen weg.

Sei $C \subset \mathbb{Q}^d$ ein streng-konvexer rationaler Kegel voller Dimension. Bezeichne $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ die Hilbertbasis von $C \cap \mathbb{Z}^d$ und setze

$$S := \{ h_{i_1} + \dots + h_{i_d} \mid h_{i_1}, \dots, h_{i_d} \in H \text{ linear unabhängig} \}$$

Da S endlich ist, ist die konvexe Hülle von S ein Polytop. Diesen bezeichnen wir mit $\text{Hull } S$. Damit ist die Minkowski-Summe $C + \text{Hull } S$ ein Polyeder, dessen Rezeptionskegel gerade C ist.

Wir sind nun in der Lage die Nash-Aufblasung der torischen Varietät $X(C)$ in der kombinatorischen Sprache der Polyeder zu beschreiben:

Theorem 8.1 *Die torische Varietät $X_{C+\text{Hull } S}$ ist, zusammen mit der Abbildung, die durch die Inklusion der Kegel aus dem normalen Fächer $\Delta_{C+\text{Hull } S}$ nach C' gegeben ist, die normalisierte Nash-Aufblasung von $X(C)$.*

Mit Bemerkung 6.7 genügt es in dieser Situation die Gauss-Abbildung nach $\text{Grass}_{d,n}$ zu betrachten. Bezeichne $X := X(C)$ die affine torische Varietät zum Kegel C . Weiter schreiben wir $X' \rightarrow X$ für die Nash-Aufblasung und $\tilde{X} \rightarrow X'$ für die Normalisierung derselben.

Für den Beweis des Theorems wollen wir Satz 7.10 anwenden. Wenn die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind, wissen wir, dass

- (1) die Normalisierung \tilde{X} von X eine torische Varietät ist.
- (2) es ein Rekonstruktionsdatum $(\tilde{X}, X, \tilde{\iota}, \tilde{\varphi})$ gibt und wir die entsprechende Nash-Aufblasung über den zugehörigen Polyeder beschreiben können.
- (3) wir die Ecken des zum unter (2) genannten Rekonstruktionsdatum gehörigen Polyeders \tilde{P} als $N \in \mathbb{N}$ Vielfache der Gitterpunkte, die wir auf den Fixpunkten der Torus-Operation auf X' erhalten, ausrechnen können.

Da natürliche Vielfache nach Folgerung 2.7 den normalen Fächer nicht verändern, müssen wir anschließend nur noch den Polyeder P , dessen Ecken wir nach (3) aus dem Satz erhalten, mit dem Polyeder $C + \text{Hull } S$ vergleichen.

Lemma 8.2 *Auf X' und X operiert der selbe Torus T .*

Beweis. Bezeichne $H = \{h_1, \dots, h_n\}$ die Hilbert Basis von $C \cap \mathbb{Z}^d$. Zum Diagramm

$$\begin{array}{ccc} k[\mathbb{Z}^d] & \xleftarrow{\chi^{h_i \mapsto X_i}} & k[\mathbb{Z}^n] \\ \uparrow & & \uparrow \\ k[C \cup \mathbb{Z}^d] & \xleftarrow{\quad} & k[\mathbb{N}^n] \end{array}$$

erhalte als assoziierte Abbildung eine Einbettung von X in den affinen Raum, die mit der Operation der Tori verträglich ist:

$$\begin{array}{ccc} & \varphi' & \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ T \circ X & \hookrightarrow & \mathbb{A}^n \circ \mathbb{G}_m^n \end{array}$$

Dann operiert der Torus von X via φ' auf natürliche Weise auf \mathbb{A}^n . Also überführt die T -Operation d -dimensionale Unterräume von \mathbb{A}^n in d -dimensionale Unterräume und operiert damit auch auf $\text{Grass}_{d,n}$. Da X' abgeschlossen in $X \times \text{Grass}_{d,n}$ liegt, und der zu X gehörige Torus T sowohl auf X als auch auf $\text{Grass}_{d,n}$ operiert, operiert T auch auf X' . Nach Konstruktion von X' liegt T Zariski-dicht in X' . \square

Mit der Einbettung

$$\iota : X' \hookrightarrow \text{Grass}_{n,d} \times X \xrightarrow{\text{plü} \times \text{id}} \mathbb{P}_X^l$$

für $l = \binom{n}{d} - 1$ können wir, mit dem vorangegangenen Lemma, den Satz 7.10 anwenden. Wir können also nach (3) die normalisierte Nash-Aufblasung von X auf der von der Plücker-Einbettung bestimmten Immersion der nicht normalisierten Nash-Aufblasung nach \mathbb{P}_X^l berechnen.

Satz 8.3 *Bezeichne den Polyeder, den wir mittels Satz 7.10 auf X' ausrechnen können mit P , dann gilt: Die Polyeder P und $C + \text{Hull } S$ stimmen überein.*

Beweis. Bezeichne V die Menge der Ecken von P . Nach Konstruktion ist der Rezeptionskegel von P unser ursprünglicher Kegel C . Ein Polyeder ist durch seinen Rezeptionskegel und seine Ecken eindeutig bestimmt. Da die Rezeptionskegel beider Polyeder übereinstimmen, genügt es die Ecken zu untersuchen. Dazu wollen wir das Verfahren aus dem ersten Kapitel explizit anwenden.

Bezeichne $\{pt\} = \text{Spec } k$. Betrachte die Kette der Abbildungen

$$k \leftarrow k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_d^{\pm 1}] \leftarrow k[C \cap \mathbb{Z}^d] \leftarrow k[X_1, \dots, X_n]$$

unter denen jedes Monom $\chi^m \in k[C \cap \mathbb{Z}^d]$ auf $1 \in k$ abgebildet wird. Mit anderen Worten gilt $\chi^m(pt) = 1$ und erhalte die assoziierte Kette von Inklusionen

$$\{pt\} \hookrightarrow T \hookrightarrow X \hookrightarrow \mathbb{A}^n$$

Bezeichne weiter $G : X \dashrightarrow \text{Grass}_{d,n}$ die Gauss-Abbildung und sei $\mathcal{M} \in \text{Mat}_{n \times d}(\mathbb{Z})$ die Matrix, deren Zeilen die Elemente der Hilbert Basis H von $C \cap \mathbb{Z}^d$ sind.

Behauptung 1 *Das Bild von pt unter G ist der Spaltenraum von \mathcal{M} .*

Begründung. Der Ringhomomorphismus, korrespondierend zu $\iota : T \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ mit $1_T \mapsto (1, \dots, 1)$, ist durch die Zuordnung

$$X_i \mapsto \chi^{h_i} = \prod_{j=1}^d t_j^{h_i^{(j)}}$$

wo $(h_i^{(1)}, \dots, h_i^{(d)}) = h_i \in H$ ein Element der Hilbertbasis ist, gegeben. Die Gauss-Abbildung ordnet den Punkten 1_T und $\iota(1_T)$ ihre Tangentialräume zu. Wie sieht die Einbettung $T_{1_T}(T) \subset T_{\iota(1_T)}(\mathbb{A}_k^n)$

aus? Es gilt

$$\begin{array}{ccc}
T_{1_T}(T) & \subset & T_{\iota(1_T)}(\mathbb{A}_k^n) \\
\parallel & & \parallel \\
\text{Hom}_{1_T}(\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2, T) & \subset & \text{Hom}_{\iota(1_T)}(\text{Spec } k[\varepsilon]/\varepsilon^2, \mathbb{A}_k^n) \\
\parallel & & \parallel \\
\{(t_i \mapsto 1 + \gamma_i \varepsilon)_{i=1, \dots, d}\} & & \{(X_i \mapsto 1 + \tau_i \varepsilon)_{i=1, \dots, n}\} \\
\parallel & & \parallel \\
(\gamma_i)_{i=1, \dots, d} \in k^d & & (\tau_i)_{i=1, \dots, n} \in k^n
\end{array}$$

Die Geraden der Form $e_j : t_i \mapsto 1 + \delta_{ij} \varepsilon$ spannen den Raum $T_{1_T}(T)$ auf. Unter der Einbettung ι wird die Gerade e_j auf die Gerade $(X_i \mapsto (1 + \varepsilon)^{h_i^{(j)}})_{i=1, \dots, n}$ abgebildet. In $k[\varepsilon]/\varepsilon^2$ gilt $(1 + \varepsilon)^{h_i^{(j)}} = 1 + h_i^{(j)} \varepsilon$. Somit wird die lineare Hülle des j -ten Standardbasisvektors $(\delta_{ij})_{i=1, \dots, d}$ in k^d auf die lineare Hülle von $(h_i^{(j)})_{i=1, \dots, n}$ in k^n abgebildet, was genau der j -ten Spalte von \mathcal{M} entspricht. \diamond

Betrachten wir nun die Fixpunkte unter T auf \mathbb{P}_X^l . Für ein Gewicht $s \in \mathbb{Z}^d$ bezeichnen wir die Menge der T -Fixpunkte zum Gewicht s in \mathbb{P}_X^l mit F_s . Die Elemente von F_s sind von der Form

$$(0 : \dots : 0 : * : 0 : \dots : 0 : * : 0 : \dots : 0) \in \mathbb{P}_X^{\binom{n}{d}-1}$$

mit einem beliebigen Eintrag $*$ an jeder Plücker-Koordinate $I = i_1, \dots, i_d$ mit $h_{i_1} + \dots + h_{i_d} = s$, denn unter der Torus-Operation von T werden all diese Einträge mit dem selben Element t^s durchmultipliziert. Bezeichne nun S' die Menge aller möglichen Gewichte, also

$$S' = \{h_{i_1} + \dots + h_{i_d} \mid \{i_1, \dots, i_d\} \subset \{1, \dots, n\}\}$$

dann erhalten wir

$$\text{Fix}_T(\mathbb{P}_X^l) = \bigcup_{s \in S'} F_s$$

Behauptung 2 Sei F'_s die Menge der Fixpunkte von F_s , die nur an den Stellen Einträge ungleich Null besitzen, wo der entsprechende I -Minor von \mathcal{M} nicht verschwindet. Dann gilt: Die Gitterpunkte, die zu den Fixpunkten in $F'_s \cap X'$ korrespondieren, liegen in $\text{Hull } S$.

Begründung. Dass die Determinante des I -Minors von \mathcal{M} nicht verschwindet, ist genau dazu äquivalent, dass die zugehörigen Zeilen in \mathcal{M} linear unabhängig sind. Diese $I = (i_1, \dots, i_d)$ linear unabhängigen Zeilen liefern nun gerade d linear unabhängige Elemente der Hilbert-Basis, welche nach Konstruktion den Punkt $v_I := h_{i_1} + \dots + h_{i_d}$ des Polytops $\text{Hull } S$ liefern.

Nach Abschnitt 4 korrespondieren die Fixpunkte der Torus-Operation zu den Ecken des zugehörigen Polyeders: Wir erhalten die Koordinaten, die zu den Punkten in F'_s , wo der I -Minor von \mathcal{M} nicht verschwindet, gehörigen Gitterpunkte, aus den Exponenten der Elemente von $(t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{G}_m^d$ unter der Abbildung

$$\alpha : T \xrightarrow{\varphi} \mathbb{G}_m^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{G}_m^{\binom{n}{d}}$$

an den Stellen I . Hierbei ist die Abbildung ψ durch die Zuordnung

$$(s_1, \dots, s_n) \mapsto (s_{j_1} \cdots s_{j_d})_I$$

gegeben und φ die Abbildung aus dem vorangegangenen Beweis, also gegeben durch

$$(t_1, \dots, t_d) \mapsto (\chi^{h_1}(t_1, \dots, t_d), \dots, \chi^{h_n}(t_1, \dots, t_d))$$

Damit erhalten wir an der Stelle $I = (i_1, \dots, i_d)$ den Wert

$$\chi^{h_{i_1}}(t_1, \dots, t_d) \cdots \chi^{h_{i_d}}(t_1, \dots, t_d) = t_1^{h_{i_1}^{(1)} + \dots + h_{i_d}^{(1)}} \cdots t_d^{h_{i_1}^{(d)} + \dots + h_{i_d}^{(d)}}$$

Damit bilden die Exponenten der t_i genau die Koordinaten des Punktes v_I . Offensichtlich liegt v_I , wegen der Bedingung an den I -Minor, in S . Also folgt $v_I \in \text{Hull } S$. \diamond

Behauptung 3 Für die Fixpunkte von X' unter T gilt:

$$\text{Fix}_T(X') \subseteq \bigcup_{s \in S} F'_s$$

Begründung. Sei $s \in S$. Weil nach Konstruktion die I -te Plücker-Koordinate von $G(pt)$ in \mathbb{P}_X^l die Determinante des I -Minors von \mathcal{M} ist, liegt $\text{plü}(G(pt))$ in dem linearen Unterraum, der von den invertierbaren Minoren von \mathcal{M} aufgespannt wird. Das heißt in

$$\{ (a_I)_I \in \mathbb{P}_X^l \mid a_I = 0 \text{ für alle } I \text{ wo der } I\text{-Minor von } \mathcal{M} \text{ verschwindet} \}$$

Unter der Einbettung $\text{plü} \times \text{id}$ bleibt der affine Anteil unverändert. Da der Torus T diagonal auf \mathbb{P}^l operiert, muss auch der Abschluss des Orbits $T \cdot \text{plü}(G(pt)) = \text{plü}(T \cdot G(pt))$ in diesem Unterraum enthalten sein. Insbesondere T -Fixpunkte F'_s für $s \in S$ liegen in diesem Abschluss.

Nach Konstruktion gilt

$$X' := \overline{\Gamma(X^{\text{SM}})} = \overline{\Gamma(T)}$$

Wobei $\Gamma = \Gamma_G$ der Graph der Gauss-Abbildung ist. Denn T liegt offen und dicht im glatten Ort von X und wegen der Inklusionserhaltung gilt dann auch $\Gamma(T) \subseteq \Gamma(X^{\text{SM}})$. Angenommen, $\Gamma(T)$ wäre nicht dicht in $\Gamma(X^{\text{SM}})$, dann gäbe es eine offene Menge in $\Gamma(X^{\text{SM}})$, deren Urbild unter Γ eine offene Menge in X^{SM} wäre, die T nicht schneidet. Dies kann jedoch nicht auftreten.

Offensichtlich ist $\Gamma(T)$ in $(T \cdot G(pt)) \times X$ enthalten, also gilt diese Inklusion auch für die entsprechenden Abschlüsse. Weil weiter $(T \cdot G(pt)) \times X$ in $\overline{T \cdot G(pt)} \times X$ enthalten und $\overline{T \cdot G(pt)} \times X$ in $X \times \text{Grass}_{d,n}$ abgeschlossen ist, erhalten wir insgesamt

$$X' = \overline{\Gamma(T)} \subseteq \overline{(T \cdot G(pt)) \times X} \subseteq \overline{T \cdot G(pt)} \times X$$

Fassen wir X' als Teilmenge von $\overline{T \cdot G(pt)} \times X$ auf, so können wir den Torus auch auf X' operieren lassen. Offensichtlich sind dann alle Fixpunkte von X' unter T aus F'_s mit $s \in S$. \diamond

Mit den obigen Behauptungen haben wir gezeigt, dass die Ecken von P in S liegen. Da nach Konstruktion $0P = C$ gilt, folgt $P \subseteq C + \text{Hull } S$. Wir müssen nun noch die andere Inklusion zeigen.

Behauptung 4 Jede Ecke von $C + \text{Hull } S$ korrespondiert zu einem T -Fixpunkt in X' .

Begründung. Für jede Ecke s_I von $C + \text{Hull } S$ gibt es eine lineare Abbildung

$$A_I : \mathbb{Q}^d \ni \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \mapsto \langle a, u \rangle := (a_1, \dots, a_d) \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_d \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}$$

so, dass die Einschränkung von A_I auf $C + \text{Hull } S$ genau bei s_I ein einziges Minimum besitzt. Auch die weitere Restriktion auf $\text{Hull } S$ besitzt dann nur ein einziges Minimum bei s_I .

Ohne Einschränkung ist a ein Gitterpunkt, denn unter dem Isomorphismus $N \cong \mathbb{Z}^d$ werden alle a_i ganzzahlig, andernfalls multipliziere $a \in N$ mit dem gemeinsamen Nenner durch, dann bleiben wegen der Linearität die obigen Eigenschaften erhalten. Betrachte die korrespondierende Ein-Parameter-Untergruppe

$$\begin{aligned} \lambda^a(t) : \mathbb{G}_m &\rightarrow T \\ t &\mapsto (t^{\langle a, m_1 \rangle}, \dots, t^{\langle a, m_d \rangle}) \end{aligned}$$

mit der fixierten Gitter-Basis m_1, \dots, m_d . Wir wollen den Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^a(t) \cdot (G(pt), pt)$$

in $X' \subset \text{Grass}_{n,d} \times X$ ausrechnen. Wir können die einzelnen Faktoren getrennt betrachten.

Die Berechnung des affinen Anteils können wir mit unserer Einbettung, die durch $pt \mapsto (1, \dots, 1)$ gegeben ist, ohne Verlust auch auf \mathbb{A}^n betrachten. Wir erhalten

$$\lambda^a(t) \cdot pt = (t^{\langle a, m_j \rangle})_j \cdot (1, \dots, 1) = (t^{\sum_j \langle a, m_j \rangle h_i^{(j)}})_i$$

Damit der affine Anteil konvergiert, muss also für alle $i = 1, \dots, n$

$$\sum_{j=1}^d \langle a, m_j \rangle h_i^{(j)} = \langle a, h_i \rangle > 0$$

gelten. Dies ist aber klar, denn $h_i + s_I \in C + \text{Hull } S$ für alle $h_i \in H$ und es gilt

$$\langle a, h_i + s_I \rangle = \langle a, h_i \rangle + \langle a, s_I \rangle > \langle a, s_I \rangle$$

da wir A_I gerade so gewählt haben, dass s_I die einzige Minimalstelle auf $C + \text{Hull } S$ ist.

Die Berechnung des anderen Faktors können wir mit der Plücker-Einbettung ohne Verlust auf \mathbb{P}^{l-1} durchführen. Das Gewicht der T -Operation an der J -ten Plücker-Koordinate ist

$$\prod_{j \in J} t^{\langle a, m_1 \rangle \cdot h_{i_j}^{(1)}} \dots t^{\langle a, m_1 \rangle \cdot h_{i_j}^{(d)}} = \prod_{j \in J} t^{\langle a, h_{i_j} \rangle} = t^{\langle a, \sum_{j \in J} h_{i_j} \rangle}$$

Betrachten wir $G(pt)$ via plü in homogenen Koordinaten von \mathbb{P}^{l-1} , so finden wir nur dort Einträge ungleich Null, wo der zugehörige I -Minor von \mathcal{M} nicht verschwindet. An den übrigen Stellen wissen wir aber, dass $\langle a, s_I \rangle = 0$ das einzige Minimum von A_I ist. Wir erhalten also

$$\lim_{t \rightarrow 0} \lambda^a(t) \cdot G(pt) = G(pt)_{s_I}$$

wobei $G(pt)_{s_I}$ an allen Plücker-Koordinaten $J = (j_1, \dots, j_d)$ mit $h_{j_1} + \dots + h_{j_d} = s_I$ dieselben homogenen Koordinaten wie $G(pt)$ hat und sonst überall Nullen. Insbesondere gilt $G(pt)_{s_I} \in F'_{s_I}$.

◇

Wir haben nun gezeigt, dass P in $C + \text{Hull } S$ enthalten ist und die Ecken von $C + \text{Hull } S$ in P liegen. Da $0P = C$ gilt, folgt der Satz. □

Beweis von Theorem 8.1. Mit Bemerkung 6.7, Lemma 8.2 sowie den Sätzen 7.10 und 8.3 haben wir gezeigt, dass die normalisierte Nash-Aufblasung $\widetilde{X}(C)$ von $X(C)$ eine torische Varietät, beschrieben durch den normalen Fächer $\Delta_{C+\text{Hull } S}$, ist.

Nach Theorem 2.6 ist der Träger von $\Delta_{C+\text{Hull } S}$ genau C^\vee . Damit erhalten wir für jeden Kegel $\sigma \in \Delta_{C+\text{Hull } S}$, der zu einer Ecke von $C + \text{Hull } S$ gehört, eine Inklusion $\sigma \hookrightarrow C^\vee$ und damit eine Abbildung $U_\sigma \rightarrow X(C)$. Diese Abbildungen verkleben zu einer Abbildung $\widetilde{X}(C) \rightarrow X(C)$. Dies ist wegen

$$\begin{array}{ccc} \Gamma(T) & \supset & \Gamma(U_\sigma) \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow \\ \Gamma(T) & \supset & \Gamma(X(C)) \end{array}$$

genau die durch $\widetilde{X}(C) \hookrightarrow \mathbb{P}_X^L \twoheadrightarrow X$ gegebene, natürliche Abbildung der Nash-Aufblasung. \square

Wir können nun die normalisierte Nash-Aufblasung von affinen torischen Varietäten in kombinatorischer Sprache beschreiben und mit kombinatorischen Objekten berechnen:

Beispiel 2 Wir betrachten die Gitter $M = N = \mathbb{Z}^2$ und den Kegel

$$C = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

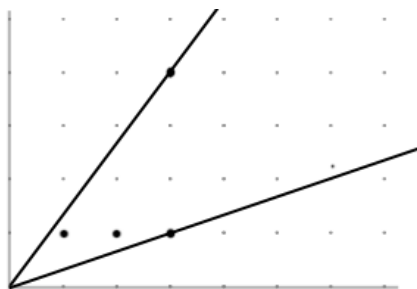
Wir erhalten als Hilbert-Basis von $C \cap \mathbb{Z}^2$ die Menge aller nicht-linearkombinierbaren Gitterpunkte in C , also

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

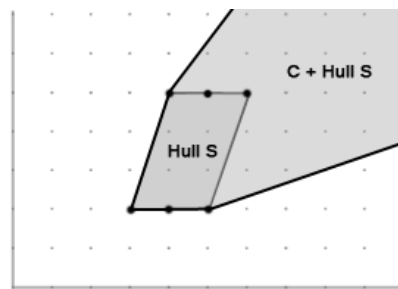
Bilde nun die Menge S mit den Summen aller linear-unabhängigen Paare:

$$\begin{aligned} S &= \{ h_1 + h_2 \mid h_i \in H \text{ linear unabhängig} \} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die folgenden kombinatorischen Objekte:



(a): Der Kegel C mit Hilbert-Basis



(b): Der Polyeder $C + \text{Hull } S$

Abbildung II.1: Nash-Aufblasung eines Kegels

Wir können die (normalisierte) Nash-Aufblasung der affinen torischen Varietät

$$U_{C^\vee} = X(C) = \text{Spec } k[X^3Y, X^2Y, X^3Y, X^3Y^4]$$

als torische Varietät zum Polyeder $C + \text{Hull } S$ berechnen. Dazu bilden wir den normalen Fächer, der von den Kegeln

$$\sigma_i = C_{v_i}^\vee = \text{cone}(C + \text{Hull } S \cap \mathbb{Z}^2 - v_i)^\vee$$

zu den drei Ecken $v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ des Polyeders, aufgespannt wird und dessen Träger C^\vee ist.

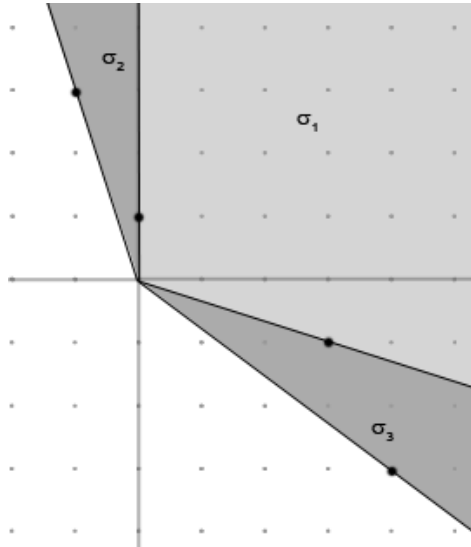


Abbildung II.2: Der normale Fächer zu $C + \text{Hull } S$

Wir erhalten die Kegel

$$\sigma_1 = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \sigma_2 = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \sigma_3 = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

Die zugehörigen Gordan-Monoide S_{σ_1} , erzeugt von $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$, S_{σ_2} , erzeugt von $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, sowie S_{σ_3} , erzeugt von $\left\{ \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$, liefern uns die entsprechenden affinen torischen Varietäten

$$\begin{aligned} U_{\sigma_1} &= \text{Spec } k[S_{\sigma_1}] = \text{Spec } k[Y, X^3Y] \\ U_{\sigma_2} &= \text{Spec } k[S_{\sigma_2}] = \text{Spec } k[Y^{-1}, XY^{-3}] \\ U_{\sigma_3} &= \text{Spec } k[S_{\sigma_3}] = \text{Spec } k[X^{-3}Y^{-1}, X^{-1}, Y, XY^2, X^2Y^3] \end{aligned}$$

Diese verkleben sich zur gesuchten Nash-Aufblasung $X_{C+\text{Hull } S}$ von $X(C)$. Von diesen drei torischen Varietäten ist jedoch nur U_{σ_1} bereits glatt.

Der allgemeine Fall. Im allgemeinen Fall korrespondiert eine torische Varietät nicht zu einem einzelnen Kegel, sondern zu einem Fächer. Wir haben aber durch den Fächer eine kanonische Überdeckung durch affine torische Varietäten gegeben.

Lemma 8.4 *Die Nash-Aufblasung ist eine lokale Konstruktion, das heißt, die Nash-Aufblasungen einer offenen Überdeckung bilden eine offene Überdeckung der Nash-Aufblasung.*

Beweis. Sei X eine Varietät und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen, die X überdecken. Bezeichne U'_i die einzelnen Nash-Aufblasungen der U_i . Die Gauss-Abbildung ist jeweils gegeben durch den Repräsentanten

$$U_i^{\text{SM}} \ni x \mapsto \mathbb{T}_x U$$

Da $\mathbb{T}_x U = \mathbb{T}_x X$ für alle offenen Teilmengen $U \subseteq X$ mit $x \in U$ gilt, und offensichtlich die glatten Orte U_i^{SM} der U_i den glatten Ort von X überdecken, erhalten wir so eine Familie $(U'_i)_{i \in I}$, die X' überdeckt. \square

Lemma 8.5 *Die Normalisierung ist eine lokale Konstruktion, das heißt, die Normalisierungen einer offenen Überdeckung bilden eine offene Überdeckung der Normalisierung.*

Beweis. Sei Y eine Varietät und $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen, die Y überdecken. Bezeichne $\pi : \tilde{Y} \rightarrow Y$ die Normalisierung von Y . Die Urbilder der U_i unter π zusammen mit den Einschränkungen

$$\pi|_{\pi^{-1}(U_i)} : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i$$

die Normalisierungen der U_i und die Familie der $(\pi^{-1}(U_i))_{i \in I}$ eine offene Überdeckung von \tilde{Y} . \square

Auch die Verkettung dieser lokalen Konstruktionen ist eine lokale Konstruktion. Wir erhalten das unmittelbare Resultat:

Folgerung 8.6 *Sei X eine torische Varietät und Δ der korrespondierende Fächer. Werde weiter Δ von den Kegeln $\sigma_1, \dots, \sigma_l \subseteq N$ aufgespannt, dann erhalten wir die normalisierte Nash-Aufblasung wie folgt: Ersetze jedes σ_i durch den nach Theorem 8.1 zu σ_i^\vee erhaltenen Fächer.*

Beweis. Für jedes $i = 1 \dots l$ gilt nach Theorem 2.6: Der Fächer, den wir zu σ_i^\vee erhalten, hat genau Träger σ_i . \square

Nach Bemerkung 6.6 verändert die Nash-Aufblasung Überdeckungsmengen, die komplett im glatten Ort enthalten sind, nicht. Insbesondere werden also bei der kanonisch durch den korrespondierenden Fächer gegebenen, offenen Überdeckung durch affine torische Varietäten die glatten Varietäten nicht berührt. Insgesamt ist es ausreichend, die Nash-Aufblasungen der nicht-glatten affinen torischen Varietäten zu betrachten.

Kapitel III

Algorithmische Implementierung

9 Beschreibung des Algorithmus

Sei $X \subseteq \mathbb{P}_k^n$ eine torische Varietät der Dimension $d \in \mathbb{N}$ über k . Da wir jedes Gitter N mit $\dim N = d$, nach Wahl einer Basis, mit \mathbb{Z}^d identifizieren können, genügt es im Algorithmus das Gitter \mathbb{Z}^d zu betrachten.

Algorithmus 9.1 (Auflösen torischer Varietäten mit Nash)

Sei $C \subset \mathbb{R}^d$ ein nicht glatter, streng konvexer Kegel voller Dimension.

- (1) Suche die Hilbert-Basis H von $C \cap \mathbb{Z}^d$.
- (2) Berechne $S := \{ h_1 + \dots + h_d \mid h_i \in H \text{ linear unabhängig} \}$ und die konvexe Hülle $\text{Hull } S$.
- (3) Berechne den Polyeder $C + \text{Hull } S$ und den zugehörigen normalen Fächer $\Delta_{C + \text{Hull } S}$.
- (4) Untersuche die Kegel $\sigma_v \in \Delta_{C + \text{Hull } S}$ zu den Ecken v von $C + \text{Hull } S$.
 - (a) Sind alle Kegel glatt, so beende den Algorithmus.
 - (b) Andernfalls wende den gesamten Algorithmus auf alle nicht glatten Kegel σ_v an.

Wie das Beispiel im vorangegangenen Abschnitt zeigt, ist zu erwarten, dass sich der Algorithmus in Punkt (4) verzweigt. Dennoch gibt es eine sinnvolle Art über die Endlichkeit des Algorithmus zu reden:

Definition 9.2 Wir nennen einen Kegel C , beziehungsweise eine affine torische Varietät $X(C)$, endlich Nash-Auflösbar, wenn sich der Algorithmus 9.1 nur endlich oft verzweigt und alle Zweige abgeschlossen sind.

Im endlichen Fall erhalten wir also einen Baum mit unserem ursprünglichen Kegel als Wurzel und den glatten Kegeln als Blätter.

Die offene Frage, ob der Algorithmus immer abbricht, und damit die Nash-Aufblasung torischen Fall immer in endlich vielen Schritten eine glatte Varietät liefert, kann in dieser Arbeit leider nicht behandelt werden.

10 Implementierung mit SAGE

Das vollständige Script „nashbl.sage“ können Sie unter nash.johoecken.de herunterladen. Speichern Sie das Script in einem Ordner, von dem aus Sie die interaktive [Sage]-Kommandozeile starten können. Laden Sie es mit `runfile nashbl.sage`.

Bei jedem Start legt das Script eine Datei `out.txt` an. Sollte bereits eine Datei dieses Namens im gleichen Ordner existieren, wird diese überschrieben. In der Textdatei wird der gesamte Verlauf der Aufblasung, das heißt alle Zwischenschritte, sowie das Endergebnis gespeichert. Zusätzlich wird das Endergebnis in die interaktive Kommandozeile ausgegeben.

Nach dem erfolgreichen Anlegen der Ausgabedatei werden Sie aufgefordert die Dimension des Gitters und die Anzahl der erzeugenden Strahlen des Ausgangskegels zu benennen. Anschließend werden Sie durch den weiteren Eingabeprozess der erzeugenden Strahlen geführt. Sobald das Programm alle notwendigen Informationen hat, wird sofort mit dem Aufblasungsprozess begonnen.

Kernstück der Implementierung ist die Umsetzung des Aufblasungsschrittes. Die Funktion *blowup* nimmt einen streng-konvexen, nicht glatten Kegel C voller Dimension in $M_{\mathbb{R}}$, also zum dualen Gitter M , entgegen und konstruiert zunächst die Hilbert-Basis H des Kegels mit der entsprechenden [Sage]-Funktion. Aus dieser wird anschließend mit linearer Algebra die Menge

$$S := \{ h_1 + \dots + h_d \mid h_i \in H \text{ linear unabhängig} \}$$

berechnet. Hieraus wird der Polyeder $P = C + \text{Hull } S$ konstruiert. Die Funktion gibt den normalen Fächer zum Polyeder P zurück.

Listing III.1: Python-Code der blowup-Funktion

```

1 def blowup(C):
2     H = C.Hilbert_basis()
3     S = []
4     combinations = Combinations(range(0, len(H)), dim)
5     for I in combinations.list():
6         I = tuple(I)
7         M = matrix([H[x] for x in I])
8         if M.rank() == dim:
9             Sum = 0
10            for x in I:
11                Sum = Sum + H[x]
12            S.append(Sum)
13    P = Polyhedron(vertices=S, rays=C.rays())
14    cones = [ [ ieq.index() for ieq in vertex.incident() ]
15              for vertex in P.vertices() ]
16    rays = [ ieq.A() for ieq in P.inequalities() ]
17    returnfan = Fan(cones, rays, check=False)
18    return returnfan;

```

Mit dieser Funktion kann nun der Aufblasungsschritt beliebig oft hintereinander ausgeführt werden. Lassen wir die für Ein- und Ausgabe notwendigen Zeilen beiseite, und geben uns einen Kegel C im Dualraum M vor. Zunächst wird getestet, ob der gegebene Kegel den Anforderungen, streng-konvex zu sein und volle Dimension zu haben, entspricht. Der Test auf Glattheit spart (Rechen-) Zeit, denn die Nash-Aufblasung eines glatten Kegels ist nach Bemerkung 6.6 der Kegel selber.

Nach der Prüfung wird zunächst der erste Aufblasungsschritt angestoßen und der zurückgegebene Fächer in der Variablen `fan` gespeichert. In der anschließenden while-Schleife wird jeder erzeugende Kegel aus dem Fächer `fan` auf Glattheit überprüft. Ist der Kegel nicht glatt, wird die Aufblasung

des Duals mit der oben beschriebenen `blowup()`-Funktion berechnet und der Kegel in `fan` durch die neuerhaltenen Kegel ersetzt. Dies ist möglich, da nach Theorem 2.6 der Neuberechnete Fächer den ursprünglichen Kegel als Träger hat. Die `while`-Schleife läuft nun solange fort, bis alle Kegel des Fächers glatt sind.

Listing III.2: Python-Code der `while`-Schleife

```

1 abort = false
2 if not C.is_strictly_convex(): #Error: not strictly convex.
3     abort = true
4 if C.is_smooth():           #Error: already smooth.
5     abort = true
6 if C.dim() != dim:          #Error: not full dimensional.
7     abort = true
8
9 if not abort:
10    fan = blowup(C)
11    count = 1
12    while not fan.is_smooth():
13        count += 1
14        cones = []
15        for cone in fan:
16            if cone.is_smooth():
17                cones.append(cone)
18            else:
19                dual = cone.dual()
20                temp = blowup(dual)
21                for temp_cone in temp:
22                    cones.append(temp_cone)
23                del temp
24                del dual
25    fan = Fan(cones)

```

Achtung In diesem Dokument wird nicht gezeigt, dass alle torischen Varietäten nach endlich vielen Nash-Aufblasungsschritten glatt sind. Da es sich hierbei immernoch um eine offene Frage handelt, könnte diese Schleife theoretisch also endlos laufen.

11 Beispiele

Am Ende des zweiten Kapitels haben wir bereits im Beispiel 2 gesehen, dass wir in der Regel nicht mit einem Schritt einen glatten Fächer erhalten werden. Das zuvor beschriebene Script liefert für den im Beispiel betrachteten Kegel

$$C = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{bzw.} \quad C^\vee = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \right\}$$

die folgende Ausgabedatei:

Listing III.3: out.txt zu Beispiel 2

```
Lattice dimension: 2
Generating cone C from generators set [[3, 4], [3, 1]] in dual Lattice M.
```

```
=====
#0
```

```
start:
N(-1, 3),
N( 4, -3)
in 2-d lattice N
```

```
new:
N(0, 1),
N(3, -1)
in 2-d lattice N
```

```
new:
N( 0, 1),
N(-1, 3)
in 2-d lattice N
```

```
new:
N(3, -1),
N(4, -3)
in 2-d lattice N
```

```
=====
#1
```

```
start:
N(0, 1),
N(3, -1)
in 2-d lattice N
```

```
new:
N(1, 0),
N(0, 1)
in 2-d lattice N
```

```
new:
N(1, 0),
N(3, -1)
in 2-d lattice N
```

```
start:
N( 0, 1),
N(-1, 3)
in 2-d lattice N
is smooth.
```

```
start:
N(3, -1),
N(4, -3)
in 2-d lattice N
new:
N(2, -1),
N(3, -1)
in 2-d lattice N
new:
N(4, -3),
N(5, -3)
in 2-d lattice N
new:
N(2, -1),
N(5, -3)
in 2-d lattice N
```

```
=====
#2
```

```
start:
N(0, 1),
N(1, 0)
in 2-d lattice N
is smooth.
```

```
start:
N(3, -1),
N(1, 0)
in 2-d lattice N
is smooth.
```

```
start:
N( 0, 1),
N(-1, 3)
in 2-d lattice N
is smooth.
```

```
start:
N(2, -1),
N(3, -1)
in 2-d lattice N
is smooth.
```

```
start:
N(4, -3),
N(5, -3)
in 2-d lattice N
```

```

new:
N(3, -2),
N(5, -3)
in 2-d lattice N
new:
N(3, -2),
N(4, -3)
in 2-d lattice N

start:
N(2, -1),
N(5, -3)
in 2-d lattice N
is smooth.

```

```

=====
=====

```

Deepest branching: 3

The smooth nash-blowup of C is given by the fan:

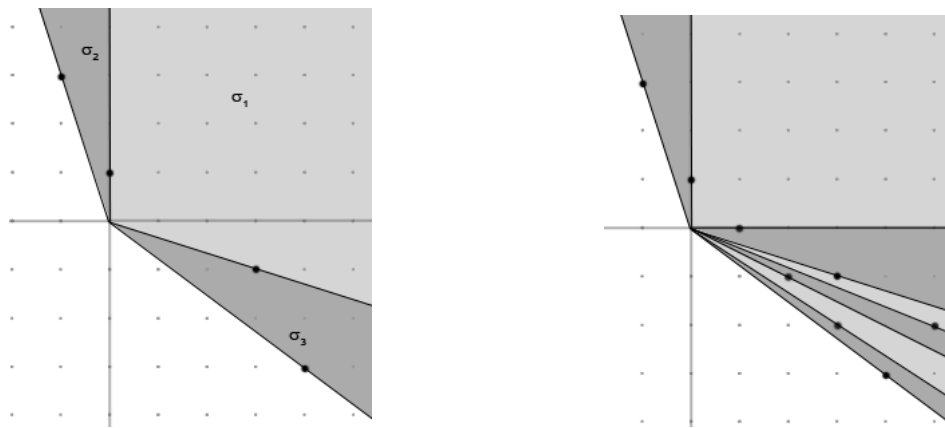
```

N(0, 1),
N(1, 0)
in 2-d lattice N
N(3, -1),
N(1, 0)
in 2-d lattice N
N( 0, 1),
N(-1, 3)
in 2-d lattice N
N(2, -1),
N(3, -1)
in 2-d lattice N
N(3, -2),
N(5, -3)
in 2-d lattice N
N(4, -3),
N(3, -2)
in 2-d lattice N
N(2, -1),
N(5, -3)
in 2-d lattice N

```

Den ersten Schritt haben wir in Beispiel 2 genauer untersucht. Wir erhalten einen Fächer, der von drei Kegeln aufgespannt wird. Von diesen ist einer, nämlich der mit σ_1 bezeichnete, glatt. Die anderen beiden Kegel werden in weiteren Aufblasungsschritten nochmals verfeinert, bis wir das in Abbildung III.1 (b) auf Seite 53 dargestellte Endergebnis erhalten.

Hiermit kennen wir nun nicht nur die Auflösung der torische Varietät zu unserem Ausgangskegel $C = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ sondern auch die der Kegel σ_2^\vee und σ_3^\vee , sowie aller weiteren Kegeln, die in diesem Prozess als Zwischenschritt vorgekommen sind.



(a): Erster Aufblasungsschritt

(b): Endergebnis des Aufblasungsprozesses

Abbildung III.1: Aufblasungsschritte

In der Artikel [ALPPT] werden bereits einige Beispiele in dritter und vierter Dimension vorgestellt. Diese können wir mit dem oben beschriebenen Programm reproduzieren. So finden wir in Tabelle 5 auf Seite 300 op. cit. etwa den Kegel $C_{2,2} = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ zusammen mit dem zugehörigen glatten Fächer

$$\Delta_{2,2} = \left\{ \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \right\}$$

Für das hier verwendete Script müssen wir den Kegel zunächst in sein Dual umrechnen. Es gilt

$$C_{2,2}^\vee = \text{cone} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Damit erhalten wir die Ausgabe

Listing III.4: Reproduktion eines Ergebnisses von [ALPPT]

```
Lattice dimension: 3
Generating cone C from generators set [[0, 0, 1], [2, 0, -1], [0, 2, -1]] in dual
Lattice M.
```

```
=====
```

```
#0

start:
N(1, 0, 0),
N(0, 1, 0),
N(1, 1, 2)
in 3-d lattice N

new:
N(1, 1, 1),
N(0, 1, 0),
N(1, 0, 0)
in 3-d lattice N

new:
N(1, 1, 1),
N(1, 1, 2),
N(0, 1, 0)
```

```

in 3-d lattice N
new:
N(1, 1, 1),
N(1, 1, 2),
N(1, 0, 0)
in 3-d lattice N

```

```

=====
=====

```

Deepest branching: 1

The smooth nash-blowup of C is given by the fan:

```

N(1, 1, 1),
N(0, 1, 0),
N(1, 0, 0)
in 3-d lattice N
N(1, 1, 1),
N(1, 1, 2),
N(0, 1, 0)
in 3-d lattice N
N(1, 1, 1),
N(1, 1, 2),
N(1, 0, 0)
in 3-d lattice N

```

Die folgende Tabelle stellt weitere Ergebnisse exemplarisch gegenüber. Aus Platzgründen sind alle Vektoren als Zeilenvektoren geschrieben und die Kegel nur durch die Vektoren der Erzeuger der aufspannenden Strahlen beschrieben.

ALPPT	nashbl.sage
$C_{3,3} : (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 3)$	$C_{3,3}^\vee : (0, 0, 1), (3, 0, -1), (0, 3, -1)$
$(1, 0, 0), (2, 2, 3), (1, 1, 2)$	$(0, 1, 0), (2, 2, 3), (1, 0, 0)$
$(0, 1, 0), (2, 2, 3), (1, 1, 2)$	$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$
$(1, 1, 3), (1, 0, 0), (1, 1, 2)$	$(2, 2, 3), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$
$(0, 1, 0), (1, 1, 3), (1, 1, 2)$	$(2, 2, 3), (1, 0, 0), (1, 1, 1)$
$(0, 1, 0), (1, 0, 0), (2, 2, 3)$	$(1, 0, 0), (2, 2, 3), (1, 1, 2)$
$(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$	$(0, 1, 0), (1, 1, 3), (1, 1, 2)$
$(2, 2, 3), (0, 1, 0), (1, 1, 1)$	$(0, 1, 0), (2, 2, 3), (1, 1, 2)$
$(2, 2, 3), (1, 0, 0), (1, 1, 1)$	$(1, 1, 3), (1, 0, 0), (1, 1, 2)$
$D_{3,7} : (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0),$ $(0, 0, 1, 0), (2, 2, 2, 3)$	$D_{3,7}^\vee : (0, 0, 0, 1), (3, 0, 0, -2),$ $(0, 3, 0, -2), (0, 0, 3, -2)$
$(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$	$(0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$
$(0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$	$(0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$
$(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$	$(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$
$(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$	$(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (1, 1, 1, 2), (1, 1, 1, 1)$

Zum Abschluss noch ein einfaches Beispiel aus Dimension 5:

Listing III.5: Nash-Aufblasung in Dimension 5

Lattice dimension: 5
 Generating cone C from generators set $[[0, 0, 0, 0, 1], [0, 0, 0, 1, 0], [0, 0, 1, 0, 0], [0, 1, 0, 0, 0], [2, 2, 3, 4, 5]]$ in dual Lattice M.

```

=====
#0
=====

start:
N( 1, 0, 0, 0, 0),
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-3, 0, 2, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-5, 0, 0, 0, 2)
in 5-d lattice N

new:
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-2, 0, 0, 0, 1),
N( 1, 0, 0, 0, 0),
N(-1, 0, 1, 0, 0)
in 5-d lattice N

new:
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-2, 0, 0, 0, 1),
N(-4, 0, 1, 0, 1),
N(-1, 0, 1, 0, 0)
in 5-d lattice N

new:
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-4, 0, 1, 0, 1),
N(-3, 0, 2, 0, 0),
N(-1, 0, 1, 0, 0)
in 5-d lattice N

new:
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-2, 0, 0, 0, 1),
N(-4, 0, 1, 0, 1),
N(-5, 0, 0, 0, 2)
in 5-d lattice N

=====
Deepest branching: 1

The smooth nash-blowup of C is given
by the fan:
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-2, 0, 0, 0, 1),
N( 1, 0, 0, 0, 0),
N(-1, 0, 1, 0, 0)
in 5-d lattice N
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-2, 0, 0, 0, 1),
N(-4, 0, 1, 0, 1),
N(-1, 0, 1, 0, 0)
in 5-d lattice N
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-4, 0, 1, 0, 1),
N(-3, 0, 2, 0, 0),
N(-1, 0, 1, 0, 0)
in 5-d lattice N
N(-1, 1, 0, 0, 0),
N(-2, 0, 0, 1, 0),
N(-2, 0, 0, 0, 1),
N(-4, 0, 1, 0, 1),
N(-5, 0, 0, 0, 2)
in 5-d lattice N

```


Anhang A

Anhang

Notationen und Symbole

In der untenstehenden Auflistung finden Sie die typische Verwendung von Notationen und Symbolen in dieser Arbeit. Auf hiervon abweichende Notation oder Spezialisierungen wird stets an der entsprechenden Stelle oder zu Beginn des jeweiligen Abschnitts hingewiesen.

Besondere Mengen

A, R	Ringe
\mathbb{G}_m	Die multiplikative Gruppe.
$GL_n(R)$	Die allgemeine lineare Gruppe der Dimension n über R .
k, K	Ein (algebraisch abgeschlossener) Körper.
\mathbb{N}	Die natürlichen Zahlen beginnend mit 1, also $\{1, 2, \dots\}$.
\mathbb{N}_0	Die natürlichen Zahlen beginnend mit 0, also $\{0, 1, 2, \dots\}$.
$k[[t]]$	Ring der formalen Potenzreihen über k .
$R[X_1, \dots, X_n]$	Der Polynomring mit Variablen X_1, \dots, X_n über R .
$R[H]$	Der Monoid-Ring zum Monoid H über R .
$\text{End } A$	Menge der Endomorphismen auf A .
$ER(t, m)$	Eigenraum zum Eigenvektor $(t_1^{m_1}, \dots, t_n^{m_n})$.
$\text{Fix}_T(X)$	Die Fixpunkte der Torus-Operation von T auf der torischen Varietät X
$\text{Frac } A$	Der Quotientenkörper des Rings A .
$\text{Hom}(A, B)$	Menge der Morphismen von A nach B in der entsprechenden Kategorie.
$\text{Spec}(A)$	Das Primspektrum von A
$\text{Spm}(A)$	Das Maximalspektrum von A

Kombinatorische Objekte

$\text{cone}(x_1, \dots, x_s)$	Der von den (Gitter-)Punkten x_i erzeugte Kegel.
C	Ein Kegel im Dualraum $M_{\mathbb{R}}$.
Δ	Ein Fächer von Kegeln in $N_{\mathbb{R}}$.
Δ_P	Der normale Fächer zum Polyeder P .
γ_σ	Der ausgezeichnete Punkt zum Kegel σ .
$\text{Hull } S$	Die konvexe Hülle der Menge S .
$\lambda^u(t)$	Eine Ein-Parameter-Untergruppe zum Parameter t und einer gegebenen Basis.
N, M	bezeichnen Gitter, also einen freien \mathbb{Z} -Modul. M ist stets das zu N duale Gitter.
M'	Das erweiterte Gitter $M \times \mathbb{Z}$.
$N_{\mathbb{Q}}, N_{\mathbb{R}}$	bezeichnen den rationalen bzw. reellen Vektorraum zum Gitter N .
P	Ein Polyeder, also Schnitt endlich vieler abges. Halbräume im Dualraum $M_{\mathbb{R}}$.
Q	Ein Polytop, also die konvexe Hülle endlich vieler Punkte im Dualraum $M_{\mathbb{R}}$.
σ	Ein Kegel im \mathbb{R} -Vektorraum $N_{\mathbb{R}}$.
S_σ	Das Gordan-Monoid zum Kegel σ .

Varietäten und Schemata

\mathbb{A}_R^n	Der affine Raum der Dimension n mit Basis R .
f_*, f^*	Direktes und inverses Bild von \mathcal{O}_X bzw. \mathcal{O}_Y -Moduln unter dem Morphismus $f : X \rightarrow Y$.
\mathcal{F}	Ein \mathcal{O}_X -Modul
$\kappa(x)$	Der Restklassenkörper von $x \in X$
$\Gamma(U, \mathcal{F}), \mathcal{F}(U)$	Ring der Schnitte von \mathcal{F} auf U .
$\text{Grass}_{d,n,R}$	Die d -te Grassmann-Varietät zur Dimension n und Basis R .
$\mathcal{O}_{X,x}, \mathcal{F}_x$	Der Halm von \mathcal{O}_X bzw. \mathcal{F} in $x \in X$
\mathcal{L}	Ein Geradenbündel
\mathcal{O}_X	Die Strukturgarbe zum Schema X .
T	Eine algebraischer Torus, also nach Basiswahl $T \cong \mathbb{G}_m^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$.
\mathbb{P}_U^n	Der projektive Raum der Dimension n mit Basis U .
U	Eine affine torische Varietät.
U_σ	Die affine torische Varietät zum Kegel $\sigma \subset N_{\mathbb{R}}$.
X, Y, Z	Schemata oder Varietäten.
X'	Die Nash-Aufblasung der torischen Varietät X .
\tilde{X}	Die normalisierte Nash-Aufblasung der torischen Varietät X .
$X(C)$	Die affine torische Varietät zum Kegel $C \subset M_{\mathbb{R}}$.

$X(\Delta)$	Die torische Varietät zum Fächer Δ .
$X_P = X(\Delta_P)$	Die torische Varietät zum Polyeder P .
X^{SM}	der glatte Ort, also $X^{\text{SM}} = \{x \in X : f \text{ ist glatt in } x\}$. Wenn kein f explizit genannt ist, ist hier immer $f : X \rightarrow \text{Spec } k$ gemeint.

Sonstiges

$*^\vee$	Symbol für das entsprechende Dual, etwa bezeichnet V^\vee den Dualraum von V oder σ^\vee den zu σ dualen Kegel.
plü	Die Plücker-Einbettung.
id	Die Identitätsabbildung.

Abbildungsverzeichnis

I.1	Ein Polyeder mit zugehörigem Kegel darüber	17
II.1	Nash-Aufblasung eines Kegels	43
II.2	Normaler Fächer zu einem Polyeder	44
III.1	Aufblasungsschritte	53

Listings

III.1	Python-Code der blowup-Funktion	48
III.2	Python-Code der while-Scheife	49
III.3	out.txt zu Beispiel 2	50
III.4	Reproduktion eines Ergebnisses von [ALPPT]	53
III.5	Nash-Aufblasung in Dimension 5	55

Literaturverzeichnis

- [ALPPT] **A. Atanasov, C. Lopez, A. Perry, N. Proudfoot, M. Thaddeus**, *Resolving toric varieties with Nash blow-ups*, Exp. Math., 20(3): 288-303, Taylor & Francis, 2011
- [CLS] **D. A. Cox, J. B. Little, H. K. Schenck**, *Toric varieties*, AMS Graduate Studies in Math. 124
- [F] **W. Fulton**, *Introduction to toric varieties*, Ann. of Math. Stud. 131, Princeton, 1993
- [GW] **U. Görtz, T. Wedhorn**, *Algebraic Geometry I*, Vieweg+Teubner, Springer, 2010
- [H] **J. Harris**, *Algebraic Geometry. A First Course*, Grad. Texts in Math. 133, Springer, 1992
- [L] **R. Lazarsfeld**, *Positivity in algebraic geometry I*, Ergeb. Math. 48, Springer, 2004
- [MFK] **D. Mumford, J. Fogarty, F. Kirwan**, *Geometric Invariant Theory*, 3rd en. ed., Springer, 1994
- [N] **A. Nobile**, *Some Properties of the Nash blowing-up*, Pacific Journal of Mathematics 60 (1975), 297-305
- [O] **T. Oda**, *Lectures on Torus Embeddings and Applications*, TADA Institute, New Delhi, 1978
- [Sage] **William A. Stein et al.**, *Sage Mathematics Software (Version 6.1.1)*, The Sage Development Team, 2009, www.sagemath.org

Erklärung zur selbstständigen Verfassung der Diplomarbeit

Hiermit erkläre ich, **Johannes Hölken**, geboren am **26 März 1983** in **Werne**, dass die vorgelegte Diplomarbeit mit dem Titel „**Nash-Aufblasungen torischer Varietäten**“ durch mich selbstständig verfasst wurde.

Ich habe keine anderen, als die angegebenen, Quellen und Hilfsmittel benutzt und die Diplomarbeit nicht bereits in derselben oder einer ähnlichen Fassung an einer anderen Fakultät oder einem anderen Fachbereich zur Erlangung eines akademischen Grades eingereicht.

Ort, Datum

Unterschrift