Mitschriften zum Blockseminar

„Gottlob Frege: *Die Grundlagen der Arithmetik*“

M. Wille, Wintersemester 2010/11, Campus Essen

Stand 31. März 2011

Inhaltsverzeichnis

Aufgeschrieben von Johannes Hölken. Alle Seitenangaben beziehen sich auf die Originalpaginierung der Centenarausgabe. Die jeweils aktuelle Version dieses Dokuments kann von meiner Homepage

`http://uni.johoelken.de`

bezogen werden. Da es sich lediglich um eine Mitschrift handelt ist Fehlerfreiheit nicht garantiert. Dies ist kein offizielles Lehrmaterial der Fakultät Philosophie der Universität Duisburg-Essen.

1 Seminarnotizen

Mo. 28.03.2011

1.1 Einleitung

Frege beschreibt, warum die „Grundlagen der Arithmetik“ notwendig sind. Er stellt fest, dass es einen Mangel in der Definition der Zahlen gibt. Solange die (natürlichen) Zahlen nicht ordentlich eingeführt und begründet sind, können auch abstraktere Zahlen (reelle, komplexe, ...) nicht erkannt werden. Frege sieht die Philosophie in der Pflicht diesen Mangel abzustellen.
Er grenzt sich bereits in der Einleitung von psychologischen Begründungsweisen ab, und stellt in Aussicht, die Grundgesetze der Arithmetik rein analytisch aus dem noch zu gebenen Zahlbegriff zu folgern.
3 Grundsätze deren Beachtung für den vorliegenden Text ungemein wichtig sind:

1. Psychologisches ist vom Logischem, subjektives von objektiven zu trennen. *D.i. die Unterscheidung in Geltung und Genese.*
2. Nach der Bedeutung der Wörter ist im Satzzusammenhang zu fragen. *Kontextprinzip*
3. Unterschied von Begriff und Gegenstand beachten

Diese Grundsätze haben einfache Anwendungen. **(1)** In dieser Schrift soll der Zahlbegriff begründet werden, dazu ist es unerheblich, auf welchem Wege der Begriff der Zahl entstanden ist. **(2)** Der Zahlbegriff muss im Satzzusammenhang geklärt werden. Es soll also nicht „Was ist Eins?“ gefragt werden, sondern „Was bedeutet es von einem X zu sprechen?“. **(3)** Jeder Satz hat die Subject/Prädikat Struktur. Gegenstand (des Satzes) ist, worüber eine Aussage getroffen wird (dies kann also auch ein Begriff sein). Begriff ist, was über den Gegenstand (des Satzes) ausgesagt werden soll.

§ 1 Das strenge fassen der Begriffe ist notwendig für einen strengen (=sicheren) Beweis.
§ 2 Anspruch: Zeige, dass Arithmetik eine komplexe Logik ist. Dazu soll (und muss) alles streng (analytisch) bewiesen werden.

1.2 (I.) ... über die Natur der arithmetischen Sätze

§ 5 Methode: Ein guter Definitionsvorschlag muss alle Beispiele erklären können. D.h. soll die Anzahl definiert werden, dann muss diese eine Definition auf alle Zahlen $n \in \mathbb{N}$ also insbesondere auf 0, 1, 999.999, ... anwendbar sein.
§ 10 (a) Der Zahlbegriff lässt sich nicht aus in der Erfahrung beobachteten Einzelfällen verallgemeinern. **(b)** Das Induktionsprinzip ist integraler Bestandteil der Zahlen. Wir können nicht eine Zahl definieren und dann das Induktionsprinzip auf diese anwenden um alle Zahlen zu erhalten.
§ 12 Die Bezugnahme auf die reine Anschauung macht nicht plausiebel, warum arithmetische Wahrheiten synthetische wahrheiten a priori sind.
§ 13 Behauptung: Arithmetik $\not\subseteq$ Geometrie $\not\subseteq$ Arithmetik.
§ 14 Axiome der Geometrie sind keine Gesetze des Denkens überhaupt: Wir

können die Forderung: Parrallele geraden schneiden sich nie negieren und erhalten immer noch ein konsistentes System (nicht euklidische Räume). Axiome der Arithmetik sind Gesetze des Denkens überhaupt: Es ist z.B. nicht möglich das Induktionsprinzip

$$\Big(\mathfrak{A}(0) \text{ ist wahr } \wedge \big(\mathfrak{A}(n) \text{ ist wahr } \Rightarrow \mathfrak{A}(n{+}1) \text{ ist wahr }\big)\Big) \Longrightarrow \forall n\ \mathfrak{A}(n) \text{ ist wahr}$$

ohne Widerspruch zu negieren.
§ 15 Logische wahrheiten sind inhaltsleer, Aritmetische Sätze sind gehaltvoll. Ansätze, die die Zugehörigkeit der Arithmetik zur Logik behaupten und diesen vermeindlichen Widerspruch nicht erklären können sind ungenügend.

1.3 (II.) ... über den Begriff der Anzahl

§ 22 Untersuchung des Sprachgebrauchs. Anzahlen sind keine Eigenschaften, die wir den Gegenständen beilegen. Ein „Gegenstand, (...) [ist] nicht der eigentliche Träger einer Zahl." (S. 29)
Willkürliche / uneindeutige Setzung:

$$1 \text{ Gedicht} \mathrel{\widehat{=}} 24 \text{ Gesänge} \mathrel{\widehat{=}} \text{viele Verse}$$

Di. 29.03.2011

Schema zur Verortung der Zahlen. Nach Frege sind die Zahlen etwas nicht-physisches objektives. Um dies zu zeigen, zeigt er zunächst, dass die Zahlen in keinem der beiden anderen möglichen Feldern zu verorten sind.

	objektiv zugänglich	**subjektiv** zugänglich
physisch	- Gegenstände *(Tisch, Tasse, ...)*	∅
nicht physisch	- Wahrheitsfähige Aussagen *(Propositionen)* - Begriffen - Zahlen (?)	- Emotionen

Frege argumetniert exemplarisch. Er zeigt auf, zu welchen Ungereimtheiten die Annahmen die Zahl sei physikalisch bzw. subjektiv führen. Wäre die Zahl physikalisch, dann wären zum einen nicht physikalische Dinge (Emotionen, Begriffe, ...) nicht Zählbar zum anderen gibt es bei allen Definitionsversuchen Probleme mit anderen Zahlen als den vorgegebenen (Siehe §5). Die Zahl kann nicht subjektiv sein, weil sonst die notwendige Eindeutigkeit der Zahlen nicht zu gewährleisten wäre.

1.4 (III.) ... über Einheit und Eins

Beim Versuch den Begriff der Einheit genauer zu fassen spielen Identität und Unterschied eine wichtige Rolle.

Identitätskriterium nach Leibnitz

$$\forall x, y\ \big[\mathfrak{A}(x) \leftrightarrow \mathfrak{A}(y)\big] \quad \rightarrow \quad x = y \tag{1}$$

$$c \neq d \quad \rightarrow \quad \exists \mathfrak{A}\ \big[\mathfrak{A}(c) \wedge \not\mathfrak{A}(d)\big] \tag{2}$$

Die Begriffsbildung als Abstraktion macht das Zählen überhaupt erst möglich. Jedoch sind die einzelnen Objekte, die unter einen Begriff fallen keine Einheiten, da sie entweder notwendig verschieden sind oder es gibt nur ein einziges Objekt, das unter diesen Begriff fällt.

Die Einheit im Sprachgebrauch ist nicht die Eins der Mathematik. Die Eins der Arithmetik ist notwendig eindeutig, die zu zählenden Dinge sind jedoch notwendig unterschieden. Wir können also nicht alle zu zählenden Dinge mit Eins bezeichnen und dann $1 + 1 + 1 + \ldots + 1 = n$ rechnen um sie zu zählen.

§ 46 Eine Zahlangabe ist eine Aussage von einem Begriff (vgl. S. 59). Also ist die (An)Zahl eine Eigenschaft (Merkmal) der Begriffe und nicht der unter diese fallenden Objekte.
Das Beispiel vom *Venusmond* illustriert dies durch Anwendung des Kontextprinzips.

Begriffe sind objektive abstrakte „Gegenstände", d.h. im unteren linken Feld der Tafel einzuordnen. Alle Dinge, Vorstellungen, ... fallen unter Begriffe, damit ist es - falls die Anzahl ein Merkmal von Begriffen ist - möglich physisches und nicht physisches gleichermaßen mit einem identischen Zahlbegriff zu behandeln. Damit erfüllt Freges Definitionsvorschlag die Forderung der universellen Anwendbarkeit.

§ 53 Obwohl Frege hier bereits zwischen Begriffen erster und zweiter Ordnung unterscheidet enthält sein Modell einen Fehler:

> **Russels Antinomie** (Mengentheorie)
> Eine wohlgeformte Eigenschaft[1]
>
> $$\lambda x \; (x \neq x)$$
>
> kann direkt als Bedingung für eine Menge
>
> $$M := \left\{ y \,\middle|\, y \in \lambda(x \neq x) \right\}$$
>
> aufgefasst werden. Da diese Menge auf diese Weise sinnvoll gebildet wurde, darf nun auch untersucht werden, ob $M \in M$ ist. Dies führt natürlich unmittelbar auf einen Widerspruch, denn
>
> $$M \in M \leftrightarrow M \notin M$$

[1] Die Eigenschaft $\lambda x \; (x \neq x)$ Benutzt Frege zur Definition der 0

Mi. 30.03.2011

1.5 (IV.) Begriff der Anzahl

§ 55 Frege bietet einen ersten eigenen Versuch zur Definition der Anzahl nach der Kennzeichnungstheorie an. Die Kennzeichnung $\iota x(\mathfrak{A}x)$ ist in der formalen Logik durch

$$\iota x(\mathfrak{A}\,x) \;\rightleftharpoons\; \exists x\Big(\mathfrak{A}\,x \wedge \forall y\,\big[\mathfrak{A}\,y \leftrightarrow x = y\big]\Big)$$

gegeben. In diesem Sinne Versucht Frege die Zahl als numerisch bestimmte Kennzeichnung einzuführen.

Definition 1 *(Anzahl)*

0 kommt $\mathfrak{A}$ zu:	$\forall x\ \neg\,\mathfrak{A}\,x$
1 kommt $\mathfrak{A}$ zu:	$\exists x\Big(\mathfrak{A}\,x \wedge \forall y\big[\mathfrak{A}\,y \leftrightarrow x = y\big]\Big)$
n kommt $\mathfrak{A}$ zu:	$\exists x_1,\ldots,x_n\Big(\big[\mathfrak{A}\,x_1 \wedge \ldots \wedge \mathfrak{A}\,x_n\big] \wedge \forall y\big[\mathfrak{A}\,y \leftrightarrow \exists x_i(x_i = y)\big]\Big)$

Mit dieser Definition wurden keine Zahlen (0, 1, ...) definiert, sondern nur was wir meinen, wenn wir sagen „die Anzahl n kommt $\mathfrak{A}$ zu“. Desweiteren löst sie das **Julius Caesar Problem**[2] nicht, d.h. es lässt sich nicht per Definition ausschließen, dass der historische Gegenstand *Julius Caesar* einem Begriff zukommt und damit eine Zahl ist.
Dieser Anspruch an eine Definition, dass zum einen genau bestimmt sein muss, auf welchen Bereich diese Definition zutreffend angewendet werden kann und zum anderen auch ein Testkriterium angegeben werden muss, wann ein Ding in diesen Bereich der legitimen Anwendung fällt.

§ 60 Explizite Anwendung des Kontextprinzips: „Es genügt, wenn der Satz als Ganzes einen Sinn hat; dadurch erhalten auch seine Theile ihren Inhalt.“ (S. 71)

1.)	Satzkonstituten	2.)	Satz
	$\downarrow$		$\downarrow$
	Satz		Satzkonstituten

Bei (1) wird vom Sinn der Satzkonstituten [= Bedeutungstragende Elemente des Satzes] auf den Sinn des Satzes geschlossen, bei (2) entsprechend andersrum. Hierbei ist die Fregsche Verwendung von Sinn und Bedeutung gemeint:
Der Fregsche Sinn des Satzes ist der im Satz beschriebene Sachverhalt, die Fregsche Bedeutung des Satzes ist der Wahrheitswert (w/f) des Satzes. Der Fregsche Sinn der Satzkonstituten sind die Gegenstände auf den diese referieren, die Fregsche Bedeutung der Satzkonstituten ist die „Weise der Gegebenheit“[3].
Freges Kontextprinzip kann nun so veranschaulicht werden, dass der Sinn der Satzkonstituten aus dem Sinn des Satzes zu schließen ist (2). Aber der so gefolgerte Sinn der Satzkonstituten muss sich immer mit Schema (1) an beliebigen Beispielen testen lassen.

[2] Der Name „Julius Caesar Problem“ geht auf das Beispiel zurück, mit dem Frege hier seinen Anspruch an eine Definition erleutert. Der Name ist mitlerweile als eigenständige Bezeichnung anzutreffen

[3] Die Venus kann als Abendstern und auch als Morgenstern gegeben sein. In beiden Fällen ist der Sinn identisch, die Bedeutung aber nicht.

Abstraktionsverfahren / Humes Principle Bezeichne $\sim$ eine Äquivalenzrelation (d.h. eine symmetrische, reflexive und transitive Relation), und seien s, t Termausdrücke (z.B. Namen für Einzeldinge) und $g(\dot{})$ ein termbildender Operator, dann ist

$$\text{(ABS)} \quad g(s) = g(t) \;:\leftrightarrow s \sim t$$

Dieses Abstraktionsverfahren führt in dieser Weise zu Inkonsistenzen, daher muss die Voraussetzung: „$g(s)$ muss vom selben Typ wie s sein" hinzugenommen werden. Dieses Abstraktionsverfahren wendet Frege nun an, um einen zweiten Versuch zur Definition des Zahlbegriffs zu unternehmen

Definition 2 *(Anzahl)*
Bezeichne $\sim_G$ die Äquivalenzrelation der Gleichzahligkeit und bezeichne $Z(F)$ die Zahl, die dem Begriff F zukommt, dann ist $Z(F)$ definiert durch:

$$Z(F) = Z(H) \;:\leftrightarrow F \sim_G H$$

Hierbei sind zwei Begriffe F, H Gleichzahlig, wenn es eine eineindeutige Abbildung φ von der Menge der Gegenstände die unter den einen Begriff fallen in die Menge der Gegenstände, die unter den anderen Begriff fallen gibt. D.h. bezeichne $M_F := \{\, x \mid x \in F \,\}$ die Menge der Gegenstände die unter den Begriff F fallen, genau dann sind F, H Gleichzahlig, wenn

$$\exists \varphi \qquad \varphi : M_F \xleftrightarrow{1:1} M_H$$

Auch die Definition 2 löst das **Julius Caesar Problem** nicht, denn $Z(F) = c$ ist nur dann zu entscheiden, wenn c selber in der Form $c = Z(H)$ gegeben ist. Damit verschieben wir die Untersuchung von $Z(F)$ auf $Z(H)$ was prinzipiell das Gleiche ist.

§ 68 Versuch einer dritten Definition als „Umfang eines Begriffs".

Definition 3 *(Anzahl)*
„Die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, ist der Umfang des Begriffs ‚gleichzahlig dem Begriffe F'." (S. 79f)

Leider macht Frege nicht deutlich, was er unter dem „Umfang eines Begriffs" versteht, ja in der Fußnote zur Definition stellt er sogar fest, dass er voraus setzt, dass diese Bedeutung bereits bekannt ist. Versuch einer Rekonstruktion:

Motivation für den dritten Definitionsversuch: Es soll der Wahrheitswert von $g(s) = t$ allein durch die Definition von $g(s)$ festgestellt werden können. Dazu Setzt Frege

$$Z(F) \rightleftharpoons \text{Umfang des Begriffs } \underbrace{\text{„Gleichzahlig dem Begriff } F\text{"}}_{\cdot \sim_G F}$$

Der Begriff „Gleichzahlig dem Begriff F" ist ein Begriff zweiter Stufe. Wir können die Äquivalenzklasse[4] bezüglich der Gleichzahligkeit bilden

$$\overline{F} := \{\, X \mid X \sim_G F \,\}$$

[4]Die Äquivalenzklasse eines Objektes a ist die Klasse der Objekte, die bezüglich der Relation äquivalent zu a sind.

Damit können wir Freges Definition reformulieren als

$$Z(F) \ \rightleftharpoons\ \overline{F}$$

Nun können wir testen, ob mit dieser Definition das **Julius Caesar Problem** gelöst wird, denn zu diesem Zweck hat Frege sie eingeführt. Leider lässt sich dieses Problem nicht lösen. Zwar ist wegen

$$Z(F) = JC \ \leftrightarrow\ \overline{F} = JC$$

kein Zirkelschluss wie in Definition 2 mehr notwendig, aber wir können noch immer nicht allein aus der Definition entscheiden, dass das historische Einzelding *Julius Caesar* keine Anzahl ist. Frege selbst vertagt die Lösung dieses Problems in seine späteren Schriften.

> **Exkurs:** Humes Principle im Neo-Fregianismus
>
> Im Neo-Fregianismus wurde zur zweiten Definition zurück gegangen um damit via (ABS) den Ausdruck $\sharp(F)$ zu definieren, durch
>
> $$\sharp(F) = \sharp(H) \ :\leftrightarrow\ F \sim_G H$$
>
> Damit konnten dann die Zahlen definiert werden, als
>
> $$0 \rightleftharpoons \sharp\big(\lambda x\,(x \neq x)\big), \quad 1 \rightleftharpoons \sharp\big(\lambda x\,(x = 0)\big), \quad \ldots$$
>
> Aber es ergeben sich auch Schwierigkeiten, denn es ist unmittelbar klar, dass mit $F = H = \lambda x\,(x = x)$ gilt:
>
> $$\sharp\big(\lambda x\,(x = x)\big) \ = \ \sharp\big(\lambda x\,(x = x)\big)$$
>
> Dies kann nun mit dem Existenzquantor versehen werden, und wir erhalten
>
> $$\exists n \ \ n = \sharp\big(\lambda x\,(x = x)\big)$$
>
> D.h. n ist die Anzahl aller möglichen Mengen. Dies ist ein Problem, da n per Definition eine endliche Anzahl ist, also gibt es nur endlich viele Mengen.

Do. 31.03.2011

Definition 4 *(n ist Anzahl)*
n ist genau dann eine Anzahl, wenn es einen Begriff F gibt, so dass n die Anzahl ist, welche F zukommt. d.h. wenn $Z(F) = n$ gilt.

Mit dem in **§§ 70 - 73** eingeführten Begriff der eineindeutigen Beziehung von Begriffen (durch eineindeutige Zuordnung der unter die Begriffe fallenenden Gegenstände) beweist Frege nun, dass die Relation der Gleichzahligkeit eine eineindeutige Beziehung von Begriffen ist, und dass diese die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation

Reflexivität	$F \sim F$
Symmetrie	$F \sim G \ \leftrightarrow\ G \sim F$
Transitivität	$F \sim G \wedge G \sim H \ \rightarrow\ F \sim H$

erfült. Damit rechtfertigt er die Definition nach Humes Principle. Insbesondere legt er damit die von uns gewählte Rekonstruktion $Z(F) = \overline{F}$ nahe.

Der allgemeine Begriff der **φ-Reihe** ist problematisch, da (insbesondere für den Spezialfall der natürliche Zahlenreihe) mit Aussagen unterschiedlichen Typs operiert werden muss. Dies verunmöglicht es Frege eine genaue Definition der φ-Reihe zu geben. Die Definition, wenn φ den Satz

1.) $\forall a \left(x \sim_\varphi a \,\rightarrow\, a \,\varepsilon\, F\right)$
2.) $d \,\varepsilon\, F \;\wedge\; \forall z \,(d \sim_\varphi z \,\rightarrow\, z \,\varepsilon\, F)$
3.) $(1), (2) \;\vDash\; \forall F \; y \,\varepsilon\, F$

erfült, so heiße x in der φ-Reihe y vorhergehend, bleibt wenig greifbar.
Das Problem im Spezialfall der natürlichen Zahlenreihe lässt sich mit der Notation aus der Typentheorie verdeutlichen:

$$\begin{aligned} \sharp\big(\lambda x\,(x^\tau \neq x^\tau)\big)^{(\tau)} &= 0^{(\tau)} \\ \sharp\left(\lambda x\,(x^{(\tau)} = 0^{(\tau)})\right)^{((\tau))} &= 1^{((\tau))} \\ \sharp\left(\lambda x\,(x = 0^{(\tau)} \,\vee\, x = 1^{((\tau))})\right)^{???} &= 2^{???} \end{aligned}$$

1.6 (V.) Schluss

In **§§ 88f** gibt Frege in seiner Auslegung der Kantschen Begriffe *analytisch* und *synthetisch* einen Grund an, wieso die Aussagen der Arithmetik - die Frege für gehaltvolle (Erkenntnis erweiternde) Sätze hält - aus der Logik abgeleitet werden können, die selber als inhaltsleer betrachtet werden muss. Nach Kant ist ein Urteil genau dann ein analytisches, wenn das Prädikat bereits in der Notion des Subjektes enthalten ist, oder eine moderne äquivalente Umformulierung:

> Ein Urteil ist genau dann ein analytisches, wenn der Wahrheitsgehalt der Aussage mit *logisch-semantischen Mitteln allein* eingesehen werden kann.

Alle Urteile auf die dies nicht zutrifft sind synthetische Urteile. Nun sagt Frege, dass wir in den Arithmetischen Urteilen mehr erkennen als das, was wir bei der Definition unserer Begriffe bereits in sie hineingelegt haben. Damit wechselt Frege illigitim von der Frage der Geltung (d.i. die Beweisgründe) zur Frage der Genese (d.i. Weg der Erkenntnis). Dass wir aus Arithmetischen Urteilen etwas lernen können, und sie in diesem Sinne Erkenntniserweiternd sind, hätte auch Kant nicht abgestritten, wohl aber, dass es mehr als Erleuterungsurteile (analytische Urteile) sind.

2 Vorbereitung

2.1 Zusammenfassung der Paragraphen

Einleitung —

§ 1 Es gibt eine allgemeine Entwicklung zurück zu strengeren Beweisen und Definitionen.

§ 2 Erfahrung liefert keinen Beweis, die Mathematik fordert Beweise.

§ 3 Geltung- / Geneseunterscheidung. Frege untersucht die Geltung und gibt Kriterien für die Weitere Untersuchung an.

§ 4 Das Anliegen der Mathematik - die Arithmetik durch strenge Beweise zu sichern - und das Anliegen der Philosophie - die Arithmetik in das a priori / a posteriori, analytisch-synthetisch Schema einzuordnen - entsprechen sich.

I. Meinungen (...) über die Natur der arithmetischen Sätze

§ 5 Mathematik benötigt keine (reine) Anschauung.

§ 6 Bisherige Beweise von Zahlformlen sind entweder lückenhaft (Leibnitz) oder schlicht falsch (Grassmann).

§ 7 Mill behauptet die Mathematik sei eine empirische Wissenschaft und hinter Zahlen stünden physikalische Tataschen. Dann muss aber jede Zerlegung einzeln betrachtet werden und die Formel

$$n = \sum_{i=1}^{n} 1$$

müsste jedesmal überprüft werden. Allgemeingültigkeit mathematischer Aussagen wäre nicht gegeben.

§ 8 Die Theorie die Mathematik sei eine empirische Wissenschaft ist Kappes!

§ 9 Die Sätze der Mathematik sind keine Naturgesetze.

§ 10 Induktion funktioniert nur, wenn die Eigenschaften der Zahlen bereits aus ihrer Definition folgen, dann brauchen wir aber keine Induktion mehr.

§ 11 Die Sätze der Mathematik gelten a priori

§ 12 Sind die Sätze der Mathematik synthetische oder analytische Sätze a priori? Baumann und Kant sagen: synthetisch a priori.

§ 13 Die Aussage dieses Abschnitts ist aufgrund des Satzes von Taniyama-Shimura-Weil abzulehnen.

§ 14 Versuch einer ersten Begründung, warum arithmetische Sätze weder empirisch noch synthetisch a priori sein können. →**F**

§ 15 Auch Leibnitz war der Meinung, die arithmetischen Gesetze seien analytische Sätze.

§ 16 Ein (mathematisches) Zeichen ohne Anschauung muss weder leer sein, noch ist es sinnlos.

§ 17 Nun ist zu zeigen, dass arithmetische Aussagen analytische sind.
Schön: „Denn nicht die Weise des Findens kommt hier in Betracht, sondern die Art der Beiweisgründe.“ (S. 23)

II. Meinungen (...) über den Begriff der Anzahl

§ 18 Motivation, warum es nötig ist den Begriff der Anzahl zu untersuchen.

§ 19 Die Zahl rein als geometrische Größe (Abstand) aufzufassen wird der verwendung der Zahl in der Arithmetik nicht gerecht.

§ 20 Zahl ist definierbar, aber es gibt noch keinen gelungenen Versuch.

§ 21 Geneseuntersuchung? Hatte Frege sich nicht auf die Geltung beschränken wollen?

§ 22 Ein „Gegenstand, (...) [ist] nicht der eigentliche Träger einer Zahl.“ (S. 29)
Der Zahlbegriff scheint eine willkürliche Setzung zu sein.

§ 23 Mills Auffassung, die Zahlen entspächen physikalischen Tatsachen, führt zu nichts.

§ 24 Der Zahlbegriff kann nicht nur auf Dinge, sondern auch auf Ereignisse und Vorstellungen angewand werden. Er kann darum keine von Dingen abstrahierte Eigenschaft sein.

§ 25 Der Zahlbegriff, den wir aus der Erfahrung ableiten können, ist zu verschwommen. Zahl muss unabhängig von der Erfahrung existieren.

§ 26 Die Zahl ist etwas Objektives, d.h. etwas Analytisches - von Empfindungen, Anschauungen Vorstellungen und der Abstraktion von Erfahrung unabhängig.

§ 27 Abgrenzung zu der Auffassung der Zahlbegriff könnte doch synthetisch a priori sein.
„Der Grund der Objectivität kann ja nicht in dem Sinneseindrucke liegen, der als Affection unserer Sinne ganz subjectiv ist, sondern, soweit ich sehe, nur in der Vernunft.“ (S. 38)

§ 28 Die Definition der Anzahl als Menge oder Vielheit schließt die 0 und die 1 aus dem Begriff aus. Unterschied und Gleichheit verschiedener Objecte in einer Menge sind wichtig. Onsbesondere der Begriff der Einheit soll weiter untersucht werden.

III. Meinungen über Einheit und Eins

§ 29 Der Begriff „ein“ kann nicht einfach ein Prädikat sein, denn **alles** kann mit diesem Prädikat versehen werden. Ein allumfassendes Prädikat ist sinnlos. Vergleich mit anderen Prädikaten ergibt gleiche Schlussfolgerung.

§ 30 Die Setzung „Ein“ Ding ist willkürlich, da das Ding wieder zerteilt werden kann und dann nicht mehr „Ein“ sondern Viele ist.

§ 31 Ungeteiltheit und Abgegrenztheit zu fordern bringt uns dem Begriff der Einheit nicht näher.

§ 32 Die Einheit der Sprache ist keine mathematische Einheit.

§ 33 Der Versucht die Ungeteiltheit durch strenge Unteilbarkeit zu ersetzen führt zu nichts. Wird auf die Strenge verzichtet ist die Setzung wieder willkürlich.

§ 34 Die Forderung: Einheiten sind einander gleich führt zu Problemen. Der Lösungsversuch durch begriffliche Abstraktion gelingt nicht, denn dies vernichtet die Besonderheiten der Einzeldinge nicht. Zwei Dinge der selben Kathegorie sind immernoch unterschiedlich und nicht identisch, also keine Einheiten - die einander gleich sind.

§ 35 Selbst wenn die begriffliche Abstraktion das Problem lösen würde, so erhielten wir nicht Identische Einheiten sondern nur ein Ding. Dann ist alles Eins.

§ 36 Verschiedene Einheiten (= verschiedene Einsen) sind ein ausgesprochen dummer Vorschlag, Denn mit verschiedenen Einsen kann nicht gerechnet werden.

§ 37 Definitionsversuche von Locke, Leibnitz, Hesse

§ 38 Fazit: Die Zahl kann nicht über die Einheit definiert werden. „Die Eins“ ist eindeutig und muss es für die Arithmetik auch sein.

§ 39 Die folgenden Schwierigkeiten können wir bei den vorgestellten Versuchen sehen:

1. Definition der Zahl als Anhäufung von Gegenständen liefert keinen brauchbaren Zahlbegriff.
2. Die Zahl als Zusammenfassung von identischen Dingen liefert keine Vielheit sondern 1 und 1 ist 1.
3. Wenn jedes zu zählende Ding mit 1 bezeichnet wird machen wir einen Fehler, weil die Dinge nicht identisch sind.

§ 40 Zur Überwindung dieser Schwierigkeiten wurden Raum und Zeit herangezogen, jedoch lassen sich auch von Raum und Zeit unabhängige Dinge Zählen, daher kann weder Raum noch Zeit noch beides zusammen grundlage der Zahl sein.
„Wenn man unräumliche und unzeitliche Gegenstände durch Raum- oder Zeitpunkte vertreten lässt, so kann dies vielleicht für die Ausführung der Zählung vortheilhaft sein; grundsätzlich wird aber dabei die Anwendbarkeit des Zahlbegriffes auf Unräumliches und Unzeitliches vorausgesetzt.“ (S. 53)

§ 41 Auch Dinge aus der reinen Anschauung des Raumes und der Zeit unterscheiden sich, und dürfen also nicht alle gleichsam mit 1 bezeichnet werden. Der Zahlbegriff ist in seiner Allgemeinheit frei von den Besonderheiten der Dinge in der Anschauung von denen abstrahiert werden soll.

§ 42 Auch die Anordnung in einer Reihe ist nicht der eigentliche Unterschied der zu zählenden Dinge, da der Anordnung in der Reihe bereits eine Unterscheidung vorausgehen muss.
Es ist nicht notwendig erst bis X zu zählen, wenn wir von X Dingen reden wollen.

§ 43 Die Zahl nur als Zahlzeichen aufzufassen vernachlässigt die Bedeutung der Zahl und wird dieser Untersuchung nicht gerecht.

§ 44 Bisher haben wir die schwierigkeiten betrachtet, die entstehen, wenn wir versuchen von den Unterschieden der zu zählenden Dinge zu abstrahieren um diese dann unter eine Zahl zu bringen. Wenn wir versuchen erst eine Menge zu bilden, und dann von den Unterschieden abstrahieren, können wir große Zahlen nicht bilden, weil es nicht möglich ist derart viele Unterschiede immer mitzudenken.

§ 45 Zusammenfassung welche Wege zur Definition der Zahl bisher ausgeschlossen wurden und welche Fragen noch unbeantwortet sind.

§ 46 Zahl ist also keine Eigenschaft der Dinge oder Agregate, sondern eine Eigenschaft der Begriffe. Bsp. „Die Venus hat 0 Monde“ ist: Es gibt kein Ding, dass unter den Begriff *Venusmond* fällt.

§ 47 Der Begriff ist etwas Objektives. Alle Dinge, Vorstellungen, etc. fallen unter Begriffe.

§ 48 Da die Zahl Begriffen zugeordnet werden, können Zahlen so allumfassend auf Vorstellungen, Gegenstände, etc. angewendet werden. →**F**

§ 49 Zur Bekräftigung der These wird Spinoza angeführt. Korrektur von Spinozas These um die Möglichkeit leere Begriffe einzuführen.

§ 50 Position von E. Schröder vorgestellt.

§ 51 Schröders ist ungenau in seiner sprachlichen Darstellung. Korrektur von Schröders These um die Mögichkeit Begriffe die nur einen Gegenstand umfassen einzuführen und diese gleichwertig mit den leeren oder den viele Objekte umfassenden Begriffen zu gebrauchen.

§ 52 Freges These ist mit dem dt. Sprachgebrauch vereinbar, Verwirrungen lassen sich durch äquivalente Formulierungen ausräumen.

§ 53 Eigenschaften der Begriffe sind <u>nicht</u> die eigenschaften der unter sie fallenden Dinge. Zahl (sowie Existenz u. Eindeutigkeit) kann Eigenschaft von Begriffen sein, jodoch nur von Begriffen höherer Ordnung.
„In dieser Beziehung hat die Existenz Aehnlichkeit mit der Zahl. Es ist ja bejahung der Existenz nichts anderes als verneinung der Nullzahl.“ (S. 65)

§ 54 Satz von der Unteilbarkeit und Einheit:
„Einheit in Bezug auf eine endliche Anzahl kann nur ein solcher Begriff sein, der das unter ihn fallende bestimmt abgrenzt und keine beliebige Zertheilung gestattet.“ (S. 66)
Ausserdem lösung des Widerspruchs von Gleichheit und Bestimmtheit.

IV. Der Begriff der Anzahl

§ 55 Erste naheliegende Definitionen von 0, 1, $(n+1)$.

§ 56 Diese Definitionen reichen nicht aus, da mit ihnen nicht Zahlen sondern Redeweisen über die Zuweisung von Zahlen zu Begriffen definiert wurde. Es lässt sich nicht ableiten, was Zahl ist, und ob $1 = 1$ gilt.

§ 57 Frege interessiert der wissenschaftliche Zahlbegriff. D.h. der Zahlbegriff muss die Verwendung der Zahlen in der Arithmetik erklären, nicht im Sprachgebrauch.

§ 58 In der Vorstellung gibt es nichts, was der Zahl entspricht. Vorstellungen von Augen eines Würfels etc. sind nicht die Vorstellung von Zahl.

§ 59 Das wir keine Vorstellung von Zahlen haben heißt nicht, dass wir nicht richtig mit ihnen rechnen können.

§ 60 Ebenso ist es kein Grund ihnen ihre Bedeutung abzusprechen.
Zahl bekommt ihre Bedeutung / Vorstellbarkeit aus dem Satz.

§ 61 Nicht alle Gegenstände (der Rede) sind Zeitlich und/oder Räumlich verortbar. Damit soll noch einmal die Verortung der Zahl als etwas nichtphysisches objektives gerechtfertigt werden.

§ 62 Darstellung der Probleme bei der Definition der Zahl.

§ 63 Gleichheit der Zahlen soll durch eindeutige Zuordnung definiert werden.
Hierbei soll nicht die Gleichheit allgemein definiert werden, sondern aus dem bekannten Begriff der Gleichheit, wann zwei Zahlen einander gleich sind und darüber die Zahlen selbst.

§ 64 Beispiele dafür, dass diese Definition versucht werden darf: →**F**
1. Anschauung gibt uns zwei parallele Geraden ($g \parallel f$). Hieraus können wir zu der Gleichung ¨die Richtung von f *ist gleich* der Richtung von g¨ gelangen.
2. Ebensolches funktioniert auch bei anderen geometrischen Objekten (Bsp. $\triangle$-Ecke)

§ 65 Da beim Definitionsvorschlag aus §63 die Zahl nur am Rande vorkommt, will Frege nun untersuchen, ob damit nicht Widersprüche zum Begriff der Gleichheit auftauchen.
Um nicht in Widersprüche zu kommen, muss bei jeder Verwendung von Zahl a diese durch Zahl b ersetzt werden können. Dies ist aber, da bisher von Zahl a nur ihre Gleichheit mit Zahl b bekannt ist, problemlos möglich, in allen anderen Fällen kann nun diese Bedingung als Voraussetzung geforder werden.

§ 66 *Die obige Definition Der Zahl sagt uns nicht, was eine Zahl ist.* Wir können also auch nicht entscheiden, ob $a = q$, wenn wir nicht wissen ob q eine Zahl ist. Dazu müssten wir aber wissen, dass $q = c$ und c ist Zahl. Die Definition ist zirkulär.

§ 67 Das Beschränken solcher Anwendungen auf durch unsere Definition gegebene Dinge ist fruchtlos, weil sich nichts darin erkennen lässt.

§ 68 Erneuter Versuch einer Definition über die Begriffe.
„Die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, ist der Umfang des Begriffs ‚gleichzahlig dem Begriffe F'.“ $\rightarrow$**F**

§ 69 Erste Rechtfertigung der Definition: Keine Widersprüche zu den bisher gestellten Forderungen.

§ 70 Einführung von zweistelligen Relationen $R(a, b)$. Von Relationen ohne ihren beurteilbaren Inhalt $R(\cdot\,, \cdot)$ erkennen wir die logische Form, dies analytisch.

§ 71 Einführung von Beziehungen φ, ψ zwischen Begriffen über Beziehungen von Dingen.

§ 72 Definition der Gleichzahligkeit von Begriffen durch eine eineindeutige Zuordnung der unter diese Begriffe fallenden Dinge. Definition der Anzahl. $\rightarrow$**F zu §68**

§ 73 Die soeben gemachten Definitionen sind brauchbar, weil sich aus ihnen analytisch die Transistivität der Gleichzahligkeit folgern lässt. (Beweis trivial)

§ 74 Einführung der Null als die Anzahl welche dem Begriff ‚sich selbst ungleich' zugeordnet wird. Formal: $0 \rightleftharpoons \lambda x\,(x \neq x)$
Rechtfertigung warum gerade so: Andere Begriffe sind auch geeignet, jedoch ist dieser besonders schön, da hier rein logisch bewiesen werden kann, dass nichts unter diesen Begriff fällt.

§ 75 Beweis: Je zwei Begriffe unter die nichts fällt sind gleichzahlig, d.h. ihnen kommt die Anzahl 0 zu.

§ 76 Definition: Nachfolger.
Frege definiert den Nachfolger wieder über Begriffe: n heißt Nachfolger von m, wenn n die Anzahl zum Begriff F ist und die Anzahl zu $F\backslash\{x\}$, für alle $x \in F$, m ist. (Notation: $N(m)$)

§ 77 Nachweis, dass 0 einen Nachfolger hat: Es gibt ein Ding, dass unter den Begriff ‚gleich 0' fällt und wenn wir ein Ding von diesem Begriff entfernen erhalten wir ‚Dinge, die gleich 0 sind, aber nicht die 0 sind'. Nach § 74 ist 0 die Anzahl, die dem letzen Begriff zukommt, somit hat 0 einen Nachfolger. Definition $1 := N(0)$

§ 78 Aufzählung einiger Sätze, die sich aus den Definitionen folgern lassen.
1.) $a = N(0) \;\Rightarrow\; a = 1$
2.) Ist 1 die Anzahl zu F so gilt: $\exists\, x \in F$
3.) Ist 1 die Anzahl zu F und sind $x, y \in F$ so gilt $x = y$
4.) Gelten $x \in F$ und $\forall\, y \in F:\; y = x$ dann ist 1 die Anzahl zu F.
5.) Die Beziehung ‚Nachfolger sein von' ist eineindeutig.
6.) Induktionsprinzip: $\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad \exists\, N(n)$

§ 79 Anfang des Beweises von **§ 78 (6)**. Hierzu zunächst Definition des Reihenbegriffs.

§ 80 Aus diesem Reihenbegriff soll hier der Schluss von n auf $(n+1)$ mit rein logischen Hilfsmitteln, d.h. streng analytisch, hergeleitet werden.

§ 81 Die Natürliche Zahlenreihe als Spezialfall des allgemeinen Reihenbegriffs.

§ 82 Beweisskizze: Zu zeigen ist, dass „die Anzahl welche dem Begriffe 'der mit n endenden natürlichen Zahlenreihe angehörend' zukommt, auf n (...) unmittelbar folgt.“ (S. 94)
Dies soll für $n = 0$ und allgemein für n, m mit $m = N(n)$ gezeigt werden, also per vollständiger Induktion mit Induktionsanfang $(n = 0)$.

§ 83 Hilfssatz, für den Beweis notwendig:
Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n \neq n+1$
Soll aus dem Reihenbegriff gefolgert werden.
Definition: Gehört n der mit 0 anfangenden nat. Zahlenreihe an, so ist n eine endliche Anzahl.

§ 84 Definition und Rechtfertigung von unendlicher Anzahl.
Definition: „Die Anzahl, welche dem Begriff 'endliche Anzahl' zukommt ist eine unendliche. Bezeichnen wir sie etwa mit ∞_1!“ (S. 96)
Rechtfertigung: Wir haben uns bei der Definition von ∞_1 streng an die Regeln, die wir zur Definition der endlichen Anzahlen aufgestellt haben, gehalten.

§ 85 Abgrenzung zu Cantors „Anzahl“ und seinem Begriff der „Mächtigkeit“.

§ 86 Cantors Arbeit könnte es ermöglichen höhere Unendlichkeiten als $\aleph = \infty_1$ zu fassen, jedoch sind einige Gedanken in Cantors Arbeit nicht ganz klar (z.B. die innere Anschauung).

V. Schluss

§ 87 Anspruch des Buches: Plausibelmachung, dass arithmetische Sätze analytische Wahrheiten sind.
Arithmetische Sätze sind auf Urteile (und nicht auf äussere Dinge) anwendbar, und also insbesondere keine Naturgesetze. Vielmehr sind sie „Gesetze der Naturgesetze“. (S. 99)

§ 88 Frege gibt seine Auslegung von Kants Begriffen 'analytisch' und 'synthetisch a priori' wieder.

§ 89 Rechtfertigung der Auslegung von Kants Schriften.

§ 90 Versuch zu klären, ob das Buch dem Anspruch aus § 87 gerecht wird.

§ 91 Werbung

§ 92 Ausweitung der Theorie auf andere Zahlen als nur die Natürlichen.
(z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{C}$) Wann ist eine Zahl möglich?

§ 93 Nach Hankel ist in der Mathemaitk alles möglich, was sich nicht selbst widerspricht.

§ 94 Gegenbeispiel: $\lambda x\ (x \neq x)$ Der Ausdruck hat offensichtlich einen Widerspruch in sich - ist aber zulässig (Def. unserer 0). Wichtig ist nur, dass von Begriffen, die einen Widerspruch in sich tragen, nicht behauptet wird, dass etwas unter sie falle.

§ 95 Der Beweis der Widerspruchslosigkeit eines Begriffs kann nur dadurch geführt werden, dass ein Gegenstand gefunden wird, der unter den Begriff fällt. Die Umkehrung dieser Schlussform ist im Allgemeinen falsch. (D.h. nur weil ein Begriff wiederspruchsfrei ist, heißt es nicht, dass es auch einen Gegenstand gibt, der unter diesen fällt.)

§ 96 Der Fehler - aus Widerspruchsfreiheit auf die Existenz von Dingen zu schließen - ist weit verbreitet in der Mathematik. (anschließend Polemik)

§ 97 Versuch zu Begründen, warum der Fehler so oft gemacht wird. Frege hält die mangelnde Unterscheidung von Begriffen und den ungerechtfertigten Gebrauch des bestimmten Artikels für das Hauptproblem.

§ 98 Beispiel für diesen Fehler: Hankels Definitionen von $+$, $-$.

§ 99 Fehleranalyse: Falscher Schluss. Wir können vom allgemeinen Fall auf den speziellen Fall schließen, jedoch nicht den allgemeinen mit dem Speziellen gleichsetzen.

§ 100 Polemische Überspitzung: $Mond^2 = -1$

§ 101 Wir können mancherlei Dinge definieren und fordern, aber dies bedeutet nicht (selbst wenn die Definition ohne Widerspruch ist) das es diese Dinge auch gibt.

§ 102 Der Fehler: Die Forderung - X soll Bedingung B erfüllen - wird oft mit dem Satz - es gibt ein X, dass die Bedingung B erfült - verwechselt.

§ 103 Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ sind nicht synthetisch!

§ 104 Behauptung: Alle anderen Zahlen ($\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$) sind ebenso wie die Zahlen $0, 1, 2, \ldots$ über den Umfang von Begriffen zu definieren.

§ 105 Warum übt die Mathematik so einen Reiz aus? „Der Gegenstand der Vernunft ist die Vernunft selbst.“ - Mathematik ist - als analytische Wissenschaft - teil der Vernunft.

§§ 106-109 Rückblick und Wiederholung

2.2 Offene Fragen

§ 68 Was ist der Umfang eines Begriffs? Die Anzahl unter dem Begriff subsumierten Dinge? Wird dann nicht Freges Definition selber wieder ein Zirkel? Wie ist Freges Definition zu verstehen?